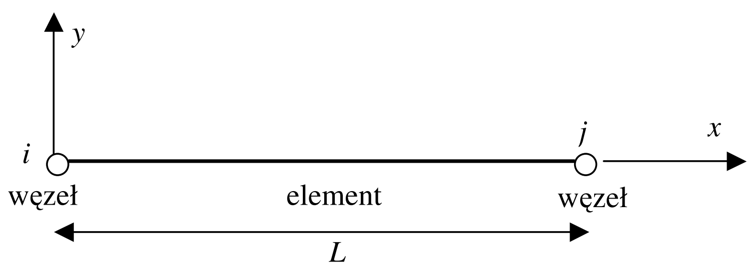
Metody komputerowe i obliczeniowe
Metoda Elementów Skończonych

Element dwuwymiarowy liniowy : belka

Jest to element bardzo podobny do pręta: współrzędne lokalne i globalne jego węzłów są takie same – nie potrzeba żadnych transformacji układów współrzędnych, a jego sztywność zdefiniowana jest pośrednio, za pomocą momentu bezwładności *I*, długości *L* oraz modułu sprężystości *E*. Jest to element liniowy, tzn. liniowo interpoluje się przemieszczenia pomiędzy jego końcami, które zdefiniowane są węzłami (UWAGA! Kółeczka na schematach oznaczają węzły, a nie przeguby!!!).



Każdy węzeł może przemieścić się w kierunku osi *y* i obrócić się (ma dwa stopnie swobody: u_y i ϕ, pomija się przemieszczenie w kierunku osi *x*) - macierz sztywności elementu zdefiniowanego dwoma węzłami (a więc czteroma stopniami swobody) zapisuje się jako macierz 4x4 (każdy wymiar macierzy to liczba stopni swobody całego elementu):

$$K = \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

jeśli w całym układzie wielu połączonych ze sobą prętów wystąpi *n* węzłów, to macierz sztywności będzie miała wymiar $2n \times 2n$. W dalszym ciągu obowiązuje ogólny układ równań liniowych metody:

$$[K]\{u\} = \{f\}$$

gdzie: [K] – macierz sztywności, {u} – wektor przemieszczeń węzłów, {f} – wektor sił działających w węzłach. Jeśli znamy sztywność elementu oraz przemieszczenia węzłów – możemy wyliczyć działające siły, a jeśli znamy siły, to po rozwiązaniu równania możemy wyliczyć przemieszczenia.

Poniższe zbiory poleceń należy przepisać umieszczając je w osobnych plikach M-File, nadając im nazwy takie, jakie mają zawarte w nich funkcje:

```
function y = SztywnoscElementBelkowy(E,I,L)
%funkcja tworzy macierz sztywnosci dla pojedynczego elementu belkowego
%wymiar wyniku : 4x4
y = E*I/(L*L*L)*[12 6*L -12 6*L ; 6*L 4*L*L -6*L 2*L*L ;
                 -12 -6*L 12 -6*L ; 6*L 2*L*L -6*L 4*L*L];
```

```
function y = ZlozSztywnoscBelek(K,k,i,j)
%funkcja sklada w jedna macierz sztywnosci K wszystkie belki
%w zadaniu laczac wszystkie sztywnosci pojedynczych elementow
%UWAGA! Funkcja moze byc wywolana po wczesniejszym uruchomieniu
%funkcji SztywnoscElementBelkowy!

%skladanie
K(2*i-1,2*i-1) = K(2*i-1,2*i-1) + k(1,1);
K(2*i-1,2*i) = K(2*i-1,2*i) + k(1,2);
K(2*i-1,2*j-1) = K(2*i-1,2*j-1) + k(1,3);
K(2*i-1,2*j) = K(2*i-1,2*j) + k(1,4);
K(2*i,2*i-1) = K(2*i,2*i-1) + k(2,1);
K(2*i,2*i) = K(2*i,2*i) + k(2,2);
K(2*i,2*j-1) = K(2*i,2*j-1) + k(2,3);
K(2*i,2*j) = K(2*i,2*j) + k(2,4);
K(2*j-1,2*i-1) = K(2*j-1,2*i-1) + k(3,1);
K(2*j-1,2*i) = K(2*j-1,2*i) + k(3,2);
K(2*j-1,2*j-1) = K(2*j-1,2*j-1) + k(3,3);
K(2*j-1,2*j) = K(2*j-1,2*j) + k(3,4);
K(2*j,2*i-1) = K(2*j,2*i-1) + k(4,1);
K(2*j,2*i) = K(2*j,2*i) + k(4,2);
K(2*j,2*j-1) = K(2*j,2*j-1) + k(4,3);
K(2*j,2*j) = K(2*j,2*j) + k(4,4);

%i wynik zwracany przez funkcje
y = K;
```

```
function y = SilyElementBelkowy(k,u)
%funkcja wylicza sily wezlowe na podstawie znanych przemieszczen u i
%sztywnosci k
y = k * u;
```

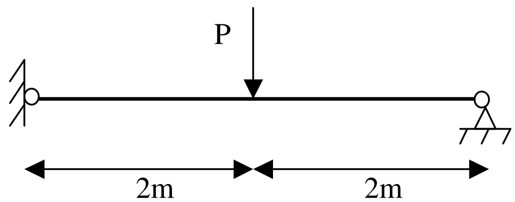
```
function TWykresElementBelkowy(f,L)
%funkcja rysuje wykres sily tnacej na podstawie sil wezlowych f i dlugosci
%elementu L
x = [0 ; L];
z = [f(1) ; -f(3)];
hold on
title('Wykres sily tnacej');
plot(x,z);
y1 = [0 ; 0];
plot(x,y1,'k');
```

```
function MWykresElementBelkowy(f,L)
%funkcja rysuje wykres momentu zginajacego na podstawie sil wezlowych f
%i dlugosci elementu L
x = [0 ; L];
z = [-f(2) ; f(4)];
hold on
title('Wykres momentu zginajacego');
plot(x,z);
y1 = [0 ; 0];
plot(x,y1,'k');
```

Przykład nr 1.

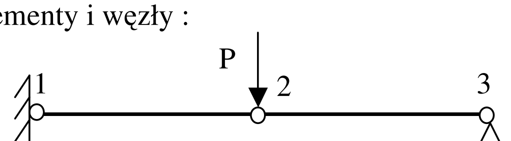
Dla podanej belki wykonanej z materiału o znanym module E = 210GPa, momencie bezwładności I = $6.0*10^{-5}m^4$ i sile obciążającej P = 20kN wyznaczyć poniższe niewiadome:

1. macierz sztywności układu
2. przemieszczenie w punkcie działania siły P
3. rotacje węzłów podporowych
4. reakcje w węzłach podporowych
5. rozkład siły tnącej i momentu zginającego w belce



Rozwiązanie:

Krok 1 – dyskretyzacja zadania
Zadanie dzielimy na elementy i węzły :



- element nr 1 zdefiniowany jest węzłami nr i=1 i j=2
- element nr 2 zdefiniowany jest węzłami nr i=2 i j=3

W węzłach nr 1 i 3 są podpory, w węźle nr 2 jest przyłożona siła.

Krok 2 – utworzenie macierzy sztywności dla każdego elementu
Wprowadzamy zmienne globalne, które przechowują dane materiałowe i geometryczne naszego zadania: E, I i L

```
>>E=210e6
>>I=6e-5
>>L=2
```

Mamy dwa elementy, zatem tworzymy dwie macierze sztywności : k1 i k2 komendami:

```
>>k1=SztywnoscElementBelkowy(E,I,L)
>>k2=SztywnoscElementBelkowy(E,I,L)
```

Krok 3 – składanie macierzy sztywności elementów w jedną globalną macierz dla całego układu
Ponieważ w układzie mamy 3 węzły, więc globalna macierz sztywności będzie miała wymiar 2*3x2*3 = 6x6. Macierz K należy przed składaniem wyzerować, co wykonujemy komendą:

```
>>K=zeros(6,6)
```

Ponieważ mamy dwa elementy, to funkcję `ZlozSztywnoscBelek` trzeba wywołać dwa razy – niezależnie dla każdego elementu, podając jako parametry globalną macierz K (która jest wynikiem), macierz elementu k (k1, a potem k2) i numery węzłów definiujące dany element (najpierw 1 i 2, a potem 2 i 3):

```
>>K=ZlozSztywnoscBelek(K,k1,1,2)
>>K=ZlozSztywnoscBelek(K,k2,2,3)
```

Na odpowiednich miejscach w macierzy K pojawią się sumowane sztywności poszczególnych elementów (PROSZĘ SPRAWDZIĆ!).

Krok 4 – uwzględnienie warunków brzegowych

Układ równań [K]{u}={f} można rozpisać w postać:

$$\begin{bmatrix} 18900 & 18900 & -18900 & 18900 & 0 & 0 \\ 18900 & 25200 & -18900 & 12600 & 0 & 0 \\ -18900 & -18900 & 37800 & 0 & -18900 & 18900 \\ 18900 & 12600 & 0 & 50400 & -18900 & 12600 \\ 0 & 0 & -18900 & -18900 & 18900 & -18900 \\ 0 & 0 & 18900 & 12600 & -18900 & 25200 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{1y} \\ \phi_1 \\ U_{2y} \\ \phi_2 \\ U_{3y} \\ \phi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1y} \\ M_1 \\ F_{2y} \\ M_2 \\ F_{3y} \\ M_3 \end{Bmatrix}$$

gdzie F – siła, M – moment, U – przemieszczenie, ϕ – obrót.
Warunkami brzegowymi w naszym zadaniu są:
$U_{1y} = \phi_1 = 0$, $F_{2y} = -20$, $M_2 = 0$, $U_{3y} = 0$, $M_3 = 0$ (dlaczego?)

Po uwzględnieniu powyższych wiadomych, układ równań przyjmuje postać:

$$\begin{bmatrix} 18900 & 18900 & -18900 & 18900 & 0 & 0 \\ 18900 & 25200 & -18900 & 12600 & 0 & 0 \\ -18900 & -18900 & 37800 & 0 & -18900 & 18900 \\ 18900 & 12600 & 0 & 50400 & -18900 & 12600 \\ 0 & 0 & -18900 & -18900 & 18900 & -18900 \\ 0 & 0 & 18900 & 12600 & -18900 & 25200 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ U_{2y} \\ \phi_2 \\ 0 \\ \phi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1y} \\ M_1 \\ -20 \\ 0 \\ F_{3y} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Krok 5 – rozwiązanie równań
Jak poprzednio, wykreślimy z macierzy sztywności układu wiersze i kolumny odpowiadające znanym wartościom {u}:

$$\begin{bmatrix} 18900 & 18900 & -18900 & 18900 & 0 & 0 \\ 18900 & 25200 & -18900 & 12600 & 0 & 0 \\ -18900 & -18900 & 37800 & 0 & -18900 & 18900 \\ 18900 & 12600 & 0 & 50400 & -18900 & 12600 \\ 0 & 0 & -18900 & -18900 & 18900 & -18900 \\ 0 & 0 & 18900 & 12600 & -18900 & 25200 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ U_{2y} \\ \phi_2 \\ 0 \\ \phi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1y} \\ M_1 \\ -20 \\ 0 \\ F_{3y} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 37800 & 0 & 18900 \\ 0 & 50400 & 12600 \\ 18900 & 12600 & 25200 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{2y} \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -20 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

w Matlabie realizujemy to poleceniami:
przepisanie wyrazów z 3, 4 i 6 wiersza oraz 3, 4 i 6 kolumny z K do k:

```
>>k=[K(3:4,3:4) K(3:4,6) ; K(6,3:4) K(6,6)]
```

stworzenie wektora wyrazów wolnych (prawej strony równania) ze znanymi siłami:

```
>>f=[-20 ; 0 ; 0]
```

wyliczamy nieznane przemieszczenia poleceniem (eliminacja Gaussa):

```
>>u=k\f
```

i otrzymujemy w wyniku:

```
u =

  1.0e-003 *

   -0.9259
   -0.1984
    0.7937
```

zatem: U_{2y} = -0.9259 10^{-3} m, ϕ_2 = -0.1984 10^{-3} rad i ϕ_3 = 0.7937 10^{-3} rad. Jakie są kierunki przemieszczeń i obrotów? Proszę przeanalizować schemat statyczny.

Krok 6 – obróbka wyników (postprocessing)

Mając przemieszczenia wszystkich węzłów, możemy obliczyć reakcje w podporach. Najpierw zbierzmy przemieszczenia w jeden wektor:

```
>>U=[0 ; 0 ; u(1) ; u(2) ; 0 ; u(3)]
```

a potem wyliczmy siły:

```
>>F=K*U
```

otrzymamy:

```
F =

   13.7500
   15.0000
  -20.0000
    0.0000
    6.2500
    0.0000
```

czyli: F_1 = 13.75 kN i M_1 = 15.00 kNm oraz F_3 = 6.25kN i M_3 = 0.00 kNm. Jakie są kierunki reakcji? Czy zgadza się obciążenie w węźle nr 2?

Siły w elementach wyznaczymy dzięki funkcji `SilyElementBelkowy(k,u)`, której parametrami są: macierz sztywności elementu (k1 i k2) oraz przemieszczenia węzłów definiujących dany element: najpierw przygotujemy po DWIE PARY przemieszczeń dla każdego elementu:

```
>>u1=[U(1) ; U(2) ; U(3) ; U(4)]
```

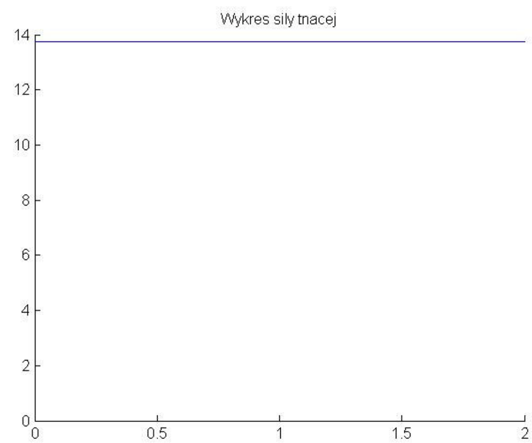
```
>>u2=[U(3) ; U(4) ; U(5) ; U(6)]
```

a potem wyznaczymy siły:

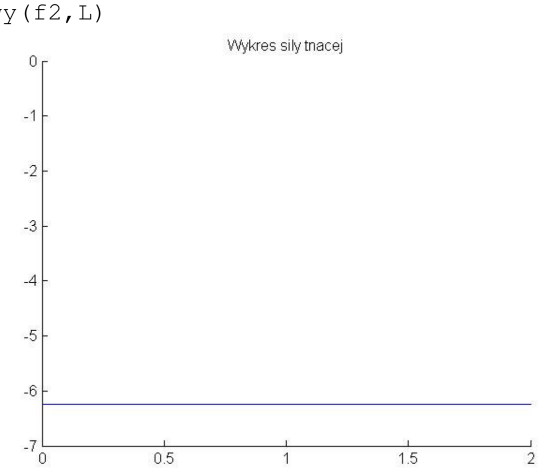
```
>>f1=SilyElementBelkowy(k1,u1)
f1 =

   13.7500
   15.0000
  -13.7500
   12.5000

>>f2=SilyElementBelkowy(k2,u2)
f2 =

   -6.2500
  -12.5000
    6.2500
    0.0000
```

Wyniki pokazują wartości siły tnącej oraz momentu zginającego. Które liczby reprezentują siły, a które momenty?
Narysujemy teraz wykresy sił wewnętrznych w elementach:

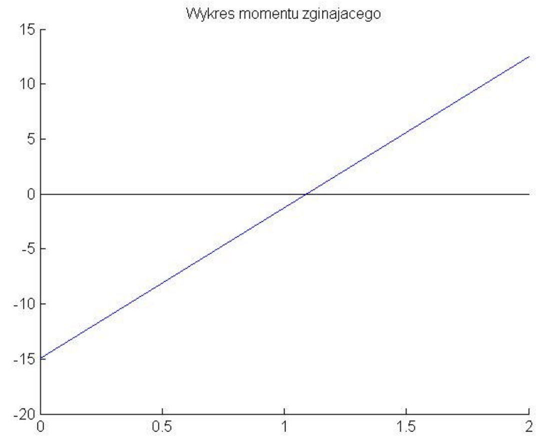
```
>>TWykresElementBelkowy(f1,L)
```



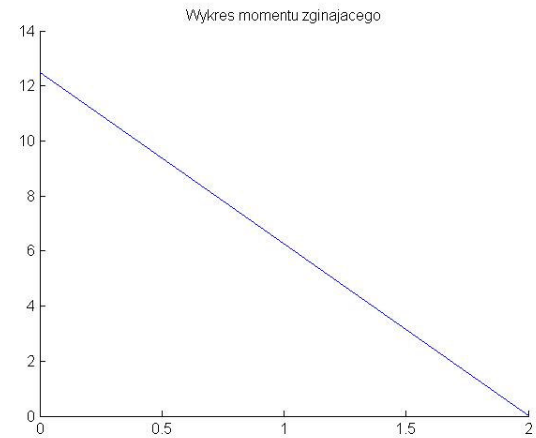

```
>>TWykresElementBelkowy(f2,L)
```




```
>>MWykresElementBelkowy(f1,L)
```



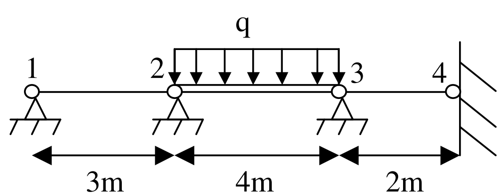

```
>>MWykresElementBelkowy(f2,L)
```



Przykład nr 2.

Dla podanej belki wykonanej z materiału o module E = 210GPa, I = $5*10^{-6}m^4$ i obciążonej q = 7kN/m wyznaczyć:

1. macierz sztywności układu
2. rotacje w punktach 1, 2 i 3
3. reakcje w punktach 1, 2, 3 i 4
4. rozkład siły tnącej i momentu zginającego



Rozwiązanie:

Krok 1 – dyskretyzacja zadania

Wspornik dzielimy na 3 elementy i 4 węzły:

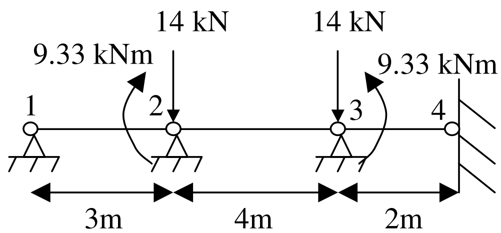
- element nr 1 zdefiniowany jest węzłami nr i=1 i j=2
- element nr 2 zdefiniowany jest węzłami nr i=2 i j=3

- element nr 3 zdefiniowany jest węzłami nr i=3 i j=4

Obciążenie równomiernie rozłożone należy zamienić na równoważne obciążenie węzłowe (warunki brzegowe – przemieszczenia i/lub obciążenia - możemy nakładać tylko w węzłach):

- siły węzłowe: $q * L / 2 = 7 * 4 / 2 = 14$ kN
- momenty węzłowe: $q * L^2 / 12 = 7 * 4^2 / 12 = 9.33$ kNm

Schemat zastępczy



Krok 2 – utworzenie macierzy sztywności dla każdego elementu

Tworzymy zmienne globalne. Dla każdego elementu wyliczamy jego pole przekroju dla x w środku rozpiętości danego elementu:

```
>>E=210e6
>>I=5e-6
>>L1=3
>>L2=4
>>L3=2
```

Mamy trzy elementy, zatem tworzymy trzy macierze sztywności : od k1 do k3 komendami:

```
>>k1=SztywnoscElementBelkowy(E,I,L1)
>>k2=SztywnoscElementBelkowy(E,I,L2)
>>k3=SztywnoscElementBelkowy(E,I,L3)
```

Krok 3 – składanie macierzy sztywności elementów w jedną globalną macierz dla całego układu

Ponieważ w układzie mamy 4 węzły, więc globalna macierz sztywności będzie miała wymiar 8x8. Macierz K należy przed składaniem wyzerować, co wykonujemy komendą:

```
>>K=zeros(8,8)
```

Ponieważ mamy trzy elementy, to funkcję `ZlozSztywnoscBelek` trzeba wywołać trzy razy – niezależnie dla każdego elementu, podając jako parametry globalną macierz K (która jest wynikiem), macierz elementu k (od k1 do k3) i numery węzłów definiujące dany element:

```
>>K=ZlozSztywnoscBelek(K,k1,1,2)
>>K=ZlozSztywnoscBelek(K,k2,2,3)
>>K=ZlozSztywnoscBelek(K,k3,3,4)
```

Na odpowiednich miejscach w macierzy K pojawią się sumowane sztywności poszczególnych elementów.

Krok 4 – uwzględnienie warunków brzegowych

Układ równań [K]{u}={f} można rozpisać w postać (nie pokazano K ze względu na zbyt duże wymiary):

$$K_{8x8} * \begin{Bmatrix} U_{1y} \\ \phi_1 \\ U_{2y} \\ \phi_2 \\ U_{3y} \\ \phi_3 \\ U_{4y} \\ \phi_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1y} \\ M_1 \\ F_{2y} \\ M_2 \\ F_{3y} \\ M_3 \\ F_{4y} \\ M_4 \end{Bmatrix}$$

Warunkami brzegowymi w naszym zadaniu są:
$U_{1y} = M_1 = U_{2y} = U_{3y} = U_{4y} = \phi_4 = 0$, $M_2 = -9.33$, $M_3 = 9.33$ (dlaczego?)

Po uwzględnieniu powyższych wiadomych, układ równań przyjmuje postać:

$$K_{8x8} * \begin{Bmatrix} 0 \\ \phi_1 \\ 0 \\ \phi_2 \\ 0 \\ \phi_3 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1y} \\ 0 \\ F_{2y} \\ -9.33 \\ F_{3y} \\ 9.33 \\ F_{4y} \\ M_4 \end{Bmatrix}$$

nie znamy zatem rotacji $\phi_1 \div \phi_3$, a także reakcji F_{1y}, F_{2y}, F_{3y}, F_{4y} i M_4.

Krok 5 – rozwiązanie równań
Układ równań rozwiążemy „po kawałku", wykreślając z K 1, 3, 5, 7 i 8 wiersz oraz kolumnę, zostawiając resztę (proszę to rozpisać w zeszytach).
W Matlabie realizujemy to poleceniami:
przepisanie wierszy 2, 4 i 6 i kolumn 2, 4 i 6 z K do k (macierz K jest tak „poszatkowana", że trzeba kopiować poszczególne jej wyrazy):

```
>>k=[K(2,2) K(2,4) K(2,6) ; K(4,2) K(4,4) K(4,6) ; K(6,2) K(6,4) K(6,6)]
```

stworzenie wektora f ze znanymi obciążeniami:

```
>>f=[0 ; -9.33 ; 9.33]
```

wyliczamy nieznane przemieszczenia poleceniem (eliminacja Gaussa):

```
>>u=k\f
```

i otrzymujemy w wyniku:

```
u =

    0.0027
   -0.0054
    0.0039
```

Proszę przyporządkować wyniki niewiadomym.

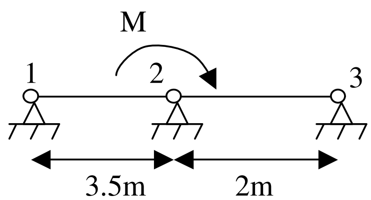
Krok 6 – obróbka wyników (postprocessing)
Wyliczenie sił i stworzenie wykresów proszę zrealizować samodzielnie.

Zadania do samodzielnego rozwiązania:

Zadanie nr 1.

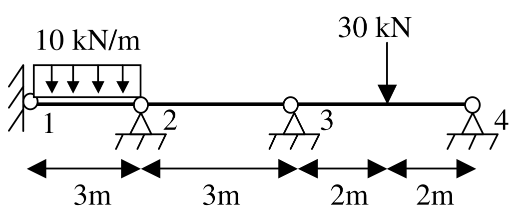
Dla układu jak na rysunku poniżej, mając: E=200GPa, I=7*$10^{-4}$$m^4$ oraz M=15kN, wyznaczyć:

1. macierz sztywności układu
2. rotacje węzłów nr 1, 2 i 3
3. reakcje w węzłach nr 1, 2 i 3
4. siłę w każdym elemencie
5. wykresy sił wewnętrznych



Zadanie nr 2.

Rozwiązać układ jak na rysunku poniżej, mając: E=210GPa, I=5*$10^{-5}$$m^4$



Zadanie nr 3.

Rozwiązać układ jak na rysunku poniżej, mając: E=70GPa, I=4*$10^{-5}$$m^4$ i k=5000kN/m.