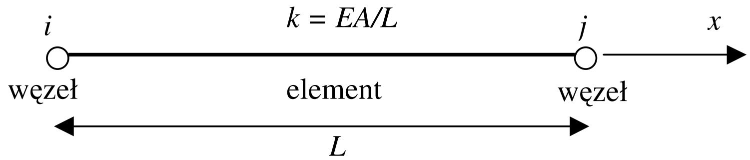
Metody komputerowe i obliczeniowe
Metoda Elementów Skończonych

Element jednowymiarowy liniowy : pręt

Jest to element bardzo podobny do „sprężyny”: współrzędne lokalne i globalne jego węzłów są takie same – nie potrzeba żadnych transformacji układów współrzędnych, a jego sztywność zdefiniowana jest pośrednio, za pomocą pola przekroju *A*, długości *L* oraz modułu Younga *E*. Element ma dwa węzły definiujące jego końce.



Jeśli sztywność elementu opisuje stała *k=EA/L*, a każdy węzeł może przemieścić się tylko w kierunku osi *x* (ma jeden stopień swobody), to macierz sztywności elementu zdefiniowanego dwoma węzłami (a więc dwoma stopniami swobody) zapisuje się jako macierz 2x2 (każdy wymiar macierzy to liczba stopni swobody całego elementu):

$$\mathrm{K} = \begin{bmatrix} \mathrm{k} & -\mathrm{k} \\ -\mathrm{k} & \mathrm{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} \\ -\frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} \end{bmatrix}$$

jeśli w całym układzie wielu połączonych ze sobą prętów wystąpi *n* węzłów, to macierz sztywności będzie miała wymiar $n{\times}n$. W dalszym ciągu obowiązuje ogólny układ równań liniowych metody:

$$[\mathrm{K}]\{\mathrm{u}\} = \{\mathrm{f}\}$$

gdzie: [K] – macierz sztywności, {u} – wektor przemieszczeń węzłów, {f} – wektor sił działających w węzłach. Jeśli znamy sztywność elementu oraz przemieszczenia węzłów – możemy wyliczyć działające siły, a jeśli znamy siły, to po rozwiązaniu równania możemy wyliczyć przemieszczenia.

Funkcje realizujące obliczenia MES na elementach prętowych w Matlabie (należy je przepisać w osobnych plikach M-File, nadając im nazwy takie, jakie mają zawarte w nich funkcje):

poniższą funkcję zapisujemy w pliku: `SztywnoscElementPretowy.m`

```
function y = SztywnoscElementPretowy(E,A,L)
%funkcja tworzy macierz sztywnosci dla pojedynczego elementu pretowego
%wymiar wyniku : 2x2
y = [E*A/L -E*A/L; -E*A/L E*A/L];
```

---

poniższą funkcję zapisujemy w pliku: `ZlozSztywnoscPretow.m`

```
function y = ZlozSztywnoscPretow(K,k,i,j)
%funkcja sklada w jedna macierz sztywnosci K wszystkie prety
%w zadaniu laczac wszystkie sztywnosci pojedynczych elementow k
%zdefiniowanych wezlami i j
```

```
%UWAGA! Funkcja moze byc wywolana po wczesniejszym uruchomieniu
%funkcji SztywnoscElementPretowy!

%skladanie
K(i,i) = K(i,i) + k(1,1);
K(i,j) = K(i,j) + k(1,2);
K(j,i) = K(j,i) + k(2,1);
K(j,j) = K(j,j) + k(2,2);

%i wynik zwracany przez funkcje
y = K;
```
---

poniższą funkcję zapisujemy w pliku: `SilyElementPretowy.m`

```
function y = SilyElementPretowy(k,u)
%funkcja wylicza sily wezlowe dla danego elementu na podstawie znanych
przemieszczen u i sztywnosci k
y = k * u;
```
---

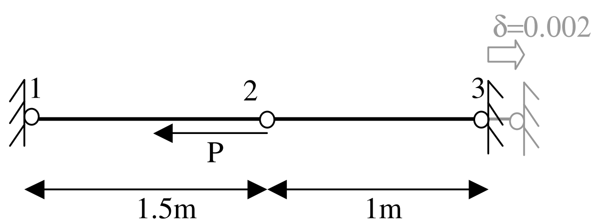
poniższą funkcję zapisujemy w pliku: `NaprezeniaElementPretowy.m`

```
function y = NaprezeniaElementPretowy(k,u,A)
%funkcja wylicza naprezenia dla danego elementu na podstawie znanych
przemieszczen u, sztywnosci k oraz pola przekroju A
y = k * u/A;
```

Przykład nr 1.

Dla podanego układu elementów wykonanych z materiału o znanym module E = 210GPa, polu przekroju A = 0.003m^2 i sile obciążającej P = 10kN wyznaczyć poniższe niewiadome przy założeniu, że węzeł nr 3 jest przesuwany o 0.002m:

1. macierz sztywności układu
2. przemieszczenie węzła nr 2
3. reakcje w węzłach nr 1 i 3
4. siłę w każdym elemencie
5. naprężenie w każdym elemencie



Rozwiązanie:

Krok 1 – dyskretyzacja zadania
Zadanie jest już podzielone na elementy i węzły :
- element nr 1 zdefiniowany jest węzłami nr i=1 i j=2
- element nr 2 zdefiniowany jest węzłami nr i=2 i j=3

węzeł nr 2 jest wspólny dla obu elementów – elementy są połączone w węźle nr 2.
W węzłach nr 1 i 3 są podpory, ale podpora w węźle nr 3 jest przemieszczana.

Krok 2 – utworzenie macierzy sztywności dla każdego elementu
Wprowadzamy zmienne globalne, które przechowują dane materiałowe i geometryczne naszego zadania: E, A i L1 oraz L2

```
>>E=210e6
>>A=0.003
>>L1=1.5
>>L2=1
```

Mamy dwa elementy, zatem tworzymy dwie macierze sztywności : k1 i k2 komendami:

```
>>k1=SztywnoscElementPretowy(E,A,L1)
>>k2=SztywnoscElementPretowy(E,A,L2)
```

Krok 3 – składanie macierzy sztywności elementów w jedną globalną macierz dla całego układu
Ponieważ w układzie mamy 3 węzły, więc globalna macierz sztywności będzie miała wymiar 3x3. Macierz K należy przed składaniem wyzerować, co wykonujemy komendą:

```
>>K=zeros(3,3)
```

Ponieważ mamy dwa elementy, to funkcję `ZlozSztywnoscPretow` trzeba wywołać dwa razy – niezależnie dla każdego elementu, podając jako parametry globalną macierz K (która jest wynikiem), macierz elementu k (k1, a potem k2) i numery węzłów definiujące dany element (najpierw 1 i 2, a potem 2 i 3):

```
>>K=ZlozSztywnoscPretow(K,k1,1,2)
>>K=ZlozSztywnoscPretow(K,k2,2,3)
```

Na odpowiednich miejscach w macierzy K pojawią się sumowane sztywności poszczególnych elementów (PROSZĘ SPRAWDZIĆ!).

Krok 4 – uwzględnienie warunków brzegowych
Stworzona macierz sztywności ma postać:

$$K = \begin{bmatrix} 420000 & -420000 & 0 \\ -420000 & 1050000 & -630000 \\ 0 & -630000 & 630000 \end{bmatrix}$$

a układ równań [K]{u}={f} można rozpisać w postać:

$$\begin{bmatrix} 420000 & -420000 & 0 \\ -420000 & 1050000 & -630000 \\ 0 & -630000 & 630000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u1 \\ u2 \\ u3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f1 \\ f2 \\ f3 \end{Bmatrix}$$

Warunkami brzegowymi w naszym zadaniu są:
- przemieszczenie węzła nr 1 jest niemożliwe – podpora: u1 = 0
- w węźle nr 2 jest obciążenie : f2 = P = -10kN (w lewo, przeciwnie do zwrotu osi x)
- w węźle nr 3 jest ruchoma podpora : u3 = 0.002m (narzucone przemieszczenie)

Po uwzględnieniu powyższych wiadomych, układ równań przyjmuje postać:

$$\begin{bmatrix} 420000 & -420000 & 0 \\ -420000 & 1050000 & -630000 \\ 0 & -630000 & 630000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ u2 \\ 0.002 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f1 \\ -10 \\ f3 \end{Bmatrix}$$

nie znamy zatem przemieszczenia u2 i reakcji f1 i f3 (podpory).

Krok 5 – rozwiązanie równań

Przyglądając się układowi równań zauważymy, że można go rozwiązać „po kawałku”, ale tym razem znana wartość przemieszczenia u3 jest różna od zera – nie możemy zastosować postępowania z poprzedniej lekcji. Wydzielimy cały wiersz z macierzy sztywności dla nieznanego przemieszczenia u2:

$$\begin{bmatrix} 420000 & -420000 & 0 \\ -420000 & 1050000 & -630000 \\ 0 & -630000 & 630000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ u2 \\ 0.002 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f1 \\ \boxed{-10} \\ f3 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -420000 & 1050000 & -630000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ u2 \\ 0.002 \end{Bmatrix} = \{-10\}$$

Proszę zauważyć, że wiersz macierzy sztywności przemnożony przez kolumnę przemieszczeń da w wyniku jedną wartość : znaną siłę (K_{1x3} x u_{3x1} = f_{1x1}):

K(2,1) * u1 + K(2,2) * u2 + K(2,3) * u3 = f2
-420000 * 0 + 1050000 * u2 + (-630000) * 0.002 = -10

co można uprościć do równania:

K(2,2) * u2 = f2 - K(2,3) * u3
1050000 * u2 = -10 + 630000 * 0.002

w Matlabie realizujemy to poleceniami:
przepisanie tylko jednego wyrazu z 2 wiersza i 2 kolumny z K do k:

```
>>k=K(2,2)
```

stworzenie wektora wyrazów wolnych (prawej strony równania) ze znaną siłą f2=-10kN oraz znanym przemieszczeniem u3=0.002:

```
>>f=-10-K(2,3)*0.002
```

wyliczamy nieznane przemieszczenia poleceniem (eliminacja Gaussa):

```
>>u=k\f
```

i otrzymujemy w wyniku: u = 0.0012m.

Krok 6 – obróbka wyników (postprocessing)
Mając przemieszczenia wszystkich węzłów, możemy obliczyć reakcje w podporach. Najpierw zbierzmy przemieszczenia w jeden wektor (dodajemy u1=0 i u3=0.002 do wyniku u2):

```
>>U=[0;u;0.002]
```

a potem wyliczmy siły:

```
>>F=K*U
```

otrzymamy: F1 = -500.0; F2 = -10.0 i F3 = 510.0. Zatem reakcja w podporze nr 1 wynosi -500kN i jest skierowana przeciwnie do zwrotu osi x (w lewo, znak ujemny), natomiast reakcja w podporze 2 jest równa 510kN i jest skierowana w prawo.
Siły w elementach wyznaczymy dzięki funkcji `SilyElementPretowy(k,u)`, której parametrami są: macierz sztywności elementu (k1 i k2) oraz przemieszczenia węzłów definiujących dany element (czyli u1 i u2, a potem u2 i u3):
najpierw przygotujemy pary przemieszczeń dla każdego elementu:

```
>>u1=[U(1);U(2)]
>>u2=[U(2);U(3)]
```

a potem wyznaczymy siły:

```
>>f1=SilyElementPretowy(k1,u1)
>>f2=SilyElementPretowy(k2,u2)
```

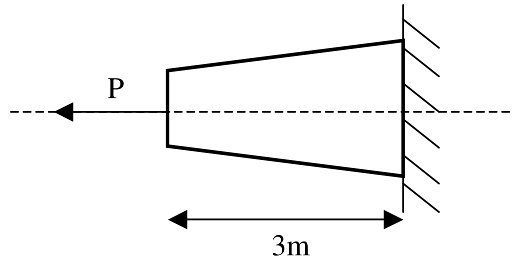
Wyniki wskazują, że oba elementy są rozciągane siłami 500kN i 510kN. Naprężenia w elementach wyznaczymy dzięki funkcji `NaprezeniaElementPretowy(k,u,A)`, której parametrami są: macierz sztywności elementu (k1 i k2), przemieszczenia węzłów definiujących dany element (czyli u1 i u2, a potem u2 i u3) oraz pole przekroju elementów A:

```
>>s1=NaprezeniaElementPretowy(k1,u1,A)
>>s2=NaprezeniaElementPretowy(k2,u2,A)
```

Uzyskane naprężenia dla elementów: 1.667E5 kPa i 1.700E7kPa (rozciągające – DLACZEGO?)

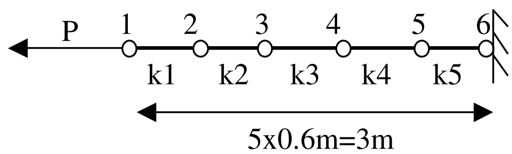
Przykład nr 2.

Dla podanego wspornika o zmiennym przekroju A1 = 0.002m^2 ÷ A2 = 0.012m^2, wykonanego z materiału o module E = 210GPa, obciążonego siłą P = 18kN wyznaczyć przemieszczenie jego wolnego końca.



Rozwiązanie:

Krok 1 – dyskretyzacja zadania
Wspornik dzielimy na 5 elementów i 6 węzłów :
- element nr 1 zdefiniowany jest węzłami nr i=1 i j=2
- element nr 2 zdefiniowany jest węzłami nr i=2 i j=3
- element nr 3 zdefiniowany jest węzłami nr i=3 i j=4
- element nr 4 zdefiniowany jest węzłami nr i=4 i j=5
- element nr 5 zdefiniowany jest węzłami nr i=5 i j=6



Dyskretyzacja jest konieczna ze względu na zmienną sztywność wspornika. Można użyć większej liczby elementów, aby zwiekszyć dokładność obliczeń. Każdy z pięciu elementów ma stałą sztywność – stałe pole przekroju, które można wyliczyć interpolując liniowo wartości pośrednie pola A pomiędzy końcami wspornika:

$$A(x) = A1 + (A2-A1) / L * x$$
$$A(x) = 0.002 + (0.012 - 0.002) / 3 * x$$
$$A(x) = 0.002 + 0.01 / 3 * x$$

gdzie x jest odległością od lewego końca wspornika (w metrach).

Krok 2 – utworzenie macierzy sztywności dla każdego elementu

Tworzymy zmienne globalne. Dla każdego elementu wyliczamy jego pole przekroju dla x w środku rozpiętości danego elementu:

```
>>E=210e6
>>L=0.6
>>A1=0.002+0.01/3*0.3
>>A2=0.002+0.01/3*0.9
>>A3=0.002+0.01/3*1.5
>>A4=0.002+0.01/3*2.1
>>A5=0.002+0.01/3*2.7
```

Mamy pięć elementów, zatem tworzymy pięć macierzy sztywności : od k1 do k5 komendami:

```
>>k1=SztywnoscElementPretowy(E,A1,L)
>>k2=SztywnoscElementPretowy(E,A2,L)
>>k3=SztywnoscElementPretowy(E,A3,L)
>>k4=SztywnoscElementPretowy(E,A4,L)
>>k5=SztywnoscElementPretowy(E,A5,L)
```

Krok 3 – składanie macierzy sztywności elementów w jedną globalną macierz dla całego układu
Ponieważ w układzie mamy 6 węzłów, więc globalna macierz sztywności będzie miała wymiar 6x6. Macierz K należy przed składaniem wyzerować, co wykonujemy komendą:

```
>>K=zeros(6,6)
```

Ponieważ mamy pięć elementów, to funkcję `ZlozSztywnoscPretow` trzeba wywołać pięć razy – niezależnie dla każdego elementu, podając jako parametry globalną macierz K (która jest wynikiem), macierz elementu k (od k1 do k5) i numery węzłów definiujące dany element:

```
>>K=ZlozSztywnoscPretow(K,k1,1,2)
>>K=ZlozSztywnoscPretow(K,k2,2,3)
>>K=ZlozSztywnoscPretow(K,k3,3,4)
>>K=ZlozSztywnoscPretow(K,k4,4,5)
>>K=ZlozSztywnoscPretow(K,k5,5,6)
```

Na odpowiednich miejscach w macierzy K pojawią się sumowane sztywności poszczególnych elementów.

Krok 4 – uwzględnienie warunków brzegowych

Stworzona macierz sztywności ma postać:

$$K = 10^6 \begin{bmatrix} 1.05 & -1.05 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.05 & 2.80 & -1.75 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1.75 & 4.2 & -2.45 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2.45 & 5.6 & -3.15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3.15 & 7 & -3.85 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3.85 & 3.85 \end{bmatrix}$$

a układ równań [K]{u}={f} można rozpisać w postać:

$$10^6 \begin{bmatrix} 1.05 & -1.05 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.05 & 2.80 & -1.75 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1.75 & 4.2 & -2.45 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2.45 & 5.6 & -3.15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3.15 & 7 & -3.85 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3.85 & 3.85 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u1 \\ u2 \\ u3 \\ u4 \\ u5 \\ u6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f1 \\ f2 \\ f3 \\ f4 \\ f5 \\ f6 \end{Bmatrix}$$

Warunkami brzegowymi w naszym zadaniu są:

- przemieszczenie węzła nr 6 jest niemożliwe – podpora: u6 = 0,
- nie ma obciążeń w węzłach nr 2 do 5 : f2 = f3 = f4 = f5 = 0,
- w węźle nr 1 zaczepiona jest siła P: f1 = -18kN

Po uwzględnieniu powyższych wiadomych, układ równań przyjmuje postać:

$$10^6 \begin{bmatrix} 1.05 & -1.05 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.05 & 2.80 & -1.75 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1.75 & 4.2 & -2.45 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2.45 & 5.6 & -3.15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3.15 & 7 & -3.85 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3.85 & 3.85 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u1 \\ u2 \\ u3 \\ u4 \\ u5 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -18 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ f6 \end{Bmatrix}$$

nie znamy zatem przemieszczeń u1÷u5, a także reakcji f6 (podpora).

Krok 5 – rozwiązanie równań

Układ równań rozwiążemy „po kawałku”, wykreślając ostatni wiersz i kolumnę dla znanego przemieszczenia u6, zostawiając resztę dla nieznanych u1÷u5:

$$10^6\begin{bmatrix} 1.05 & -1.05 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.05 & 2.80 & -1.75 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1.75 & 4.2 & -2.45 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2.45 & 5.6 & -3.15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3.15 & 7 & -3.85 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3.85 & 3.85 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u1 \\ u2 \\ u3 \\ u4 \\ u5 \\ 0 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} -18 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ f6 \end{Bmatrix}$$

$$10^6\begin{bmatrix} 1.05 & -1.05 & 0 & 0 & 0 \\ -1.05 & 2.8 & -1.75 & 0 & 0 \\ 0 & -1.75 & 4.2 & -2.45 & 0 \\ 0 & 0 & -2.45 & 5.6 & -3.15 \\ 0 & 0 & 0 & -3.15 & 7 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u1 \\ u2 \\ u3 \\ u4 \\ u5 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} -18 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

w Matlabie realizujemy to poleceniami:
przepisanie wierszy 1-5 i kolumn 1-5 z K do k:

```
>>k=K(1:5,1:5)
```

stworzenie wektora f ze znanymi siłami f1 = -18, f2 ÷ f5=0kN:

```
>>f=[-18;0;0;0;0]
```

wyliczamy nieznane przemieszczenia poleceniem (eliminacja Gaussa):

```
>>u=k\f
```

i otrzymujemy w wyniku: 10^{-4}(-0.4517 –0.2802 –0.1774 –0.1039 –0.0468)m.

Krok 6 – obróbka wyników (postprocessing)

Mając wyliczone przemieszczenia wszystkich węzłów możemy odpowiedzieć na polecenie w zadaniu: przemieszczenie swobodnego końca wspornika wyniesie u1 = -0.4517E-4m.
<u>UWAGA! Wyliczenie sił i naprężeń proszę zrealizować samodzielnie.</u>

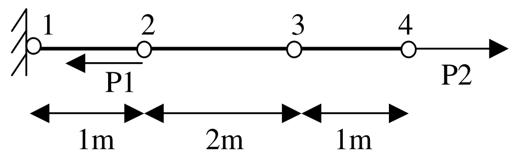
Zadania do samodzielnego rozwiązania:

<u>Zadanie nr 1.</u>

Dla układu jak na rysunku poniżej, mając: E=70GPa, A=0.005m^2 oraz P1=10kN i P2=15kN, wyznaczyć:

1. macierz sztywności układu
2. przemieszczenie węzłów nr 2,3 i 4

3. reakcje w węźle nr 1
4. siłę w każdym elemencie
5. naprężenia



<u>Zadanie nr 2.</u>

Rozwiązać przykład nr 2 dla 10 elementów zamiast 5. Porównać wyniki.

<u>Zadanie nr 3.</u>

Dla układu jak na rysunku poniżej, mając E=200GPa i A=0.01m^2 dla elementu prętowego, sztywność sprężyny: k=1000kN/m oraz siłę P=25kN, wyznaczyć:

1. macierz sztywności układu
2. przemieszczenie węzła nr 2
3. reakcję w węzłach nr 1 i 3
4. naprężenie w pręcie
5. siłę w sprężynie