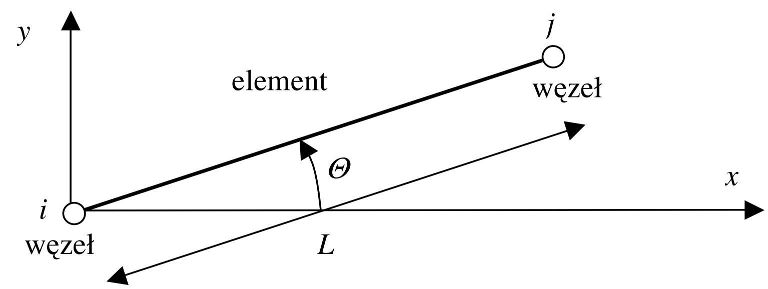
Metody komputerowe i obliczeniowe
Metoda Elementów Skończonych

Element dwuwymiarowy liniowy : pręt 2D

Jest to element dwuwymiarowy o różnych współrzędnych lokalnych i globalnych węzłów – niezbędne są transformacje układów współrzędnych. Jego sztywność zdefiniowana jest pośrednio, za pomocą pola przekroju *A*, długości *L* oraz modułu Younga *E*. Transformacje wyrażone są za pomocą funkcji trygonometrycznych kąta nachylenia elementu w stosunku do osi x globalnego układu współrzędnych, mierzonego w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek zegara. Element ma dwa węzły definiujące jego końce. Każdy węzeł ma dwa stopnie swobody.



Jeśli każdy węzeł może przemieścić się w kierunku osi *x* i *y* (ma dwa stopnie swobody), to macierz sztywności elementu zdefiniowanego dwoma węzłami (a więc czterema stopniami swobody) zapisuje się jako macierz 4x4 (każdy wymiar macierzy to liczba stopni swobody całego elementu):

$$K = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} cc & cs & -cc & -cs \\ cs & ss & -cs & -ss \\ -cc & -cs & cc & cs \\ -cs & -ss & cs & ss \end{bmatrix},$$

gdzie:

$$c = \cos(\Theta),$$
$$s = \sin(\Theta).$$

Jeśli w całym układzie wielu połączonych ze sobą elementów wystąpi *n* węzłów, to macierz sztywności będzie miała wymiar $2n\times 2n$. W dalszym ciągu obowiązuje ogólny układ równań liniowych metody:

$$[K]\{u\} = \{f\}$$

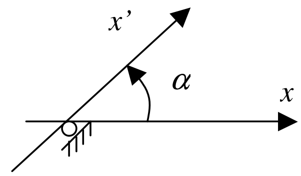
gdzie: [K] – macierz sztywności, {u} – wektor przemieszczeń węzłów, {f} – wektor sił działających w węzłach. Jak w poprzednich lekcjach, jeśli znamy sztywność elementu oraz przemieszczenia węzłów – możemy wyliczyć działające siły, a jeśli znamy siły, to po rozwiązaniu układu równań możemy wyliczyć przemieszczenia. Siły w elementach wyznacza się z następującego związku:

$$f = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} -c & -s & c & s \end{bmatrix}\{u\},$$

gdzie {u} jest 4-elementowym wektorem kolumnowym, zawierającym przemieszczenia węzłów definiujących dany element. Wartość naprężenia w elemencie wyznaczana jest przez stosunek siły *f* do pola przekroju poprzecznego *A*. Jeśli w schemacie statycznym wystąpi konieczność uwzględnienia nachylonej podpory, to globalna macierz sztywności musi zostać zmodyfikowana w następujący sposób:

$$K = TKT^{T},$$

gdzie T jest macierzą transformacji o wymiarach takich, jak K (patrz niżej: funkcja `NachylonaPodporaElementPretowy2D`).



Funkcje realizujące obliczenia MES na elementach prętowych 2D w Matlabie (należy je przepisać w osobnych plikach M-File, nadając im nazwy takie, jakie mają zawarte w nich funkcje):

poniższą funkcję zapisujemy w pliku: `DlugoscKatElementPretowy2D.m`

```
function [L Th]= DlugoscKatElementPretowy2D(x1,y1,x2,y2)
%funkcja wyznacza dlugosc L i kat nachylenia elementu pretowego 2D na podstawie
%wspolrzednych jego wezlow (kat w stopniach)
L = sqrt((x2-x1)*(x2-x1) + (y2-y1)*(y2-y1));
Th = atan((y2-y1)/(x2-x1))*180/pi;
if Th<0
    Th = 180 + Th;
end
```

----

poniższą funkcję zapisujemy w pliku: `SztywnoscElementPretowy2D.m`

```
function y = SztywnoscElementPretowy2D(E,A,L,theta)
%funkcja tworzy macierz sztywnosci dla pojedynczego elementu pretowego 2D
%kat theta podajemy w stopniach
%wymiar wyniku : 4x4
x = theta*pi/180;
c = cos(x);
s = sin(x);
y = E*A/L*[c*c c*s -c*c -c*s; c*s s*s -c*s -s*s;
          -c*c -c*s c*c c*s; -c*s -s*s c*s s*s];
```

----

poniższą funkcję zapisujemy w pliku: `ZlozSztywnoscPretow2D.m`

```
function y = ZlozSztywnoscPretow2D(K,k,i,j)
%funkcja sklada w jedna macierz sztywnosci K wszystkie prety 2D
%w zadaniu laczac wszystkie sztywnosci pojedynczych elementow k
%zdefiniowanych wezlami i j
%UWAGA! Funkcja moze byc wywolana po wczesniejszym uruchomieniu
%funkcji SztywnoscElementPretowy2D!

%skladanie
K(2*i-1,2*i-1) = K(2*i-1,2*i-1) + k(1,1);
K(2*i-1,2*i) = K(2*i-1,2*i) + k(1,2);
K(2*i-1,2*j-1) = K(2*i-1,2*j-1) + k(1,3);
K(2*i-1,2*j) = K(2*i-1,2*j) + k(1,4);
K(2*i,2*i-1) = K(2*i,2*i-1) + k(2,1);
K(2*i,2*i) = K(2*i,2*i) + k(2,2);
K(2*i,2*j-1) = K(2*i,2*j-1) + k(2,3);
K(2*i,2*j) = K(2*i,2*j) + k(2,4);
```

```
K(2*j-1,2*i-1) = K(2*j-1,2*i-1) + k(3,1);
K(2*j-1,2*i) = K(2*j-1,2*i) + k(3,2);
K(2*j-1,2*j-1) = K(2*j-1,2*j-1) + k(3,3);
K(2*j-1,2*j) = K(2*j-1,2*j) + k(3,4);
K(2*j,2*i-1) = K(2*j,2*i-1) + k(4,1);
K(2*j,2*i) = K(2*j,2*i) + k(4,2);
K(2*j,2*j-1) = K(2*j,2*j-1) + k(4,3);
K(2*j,2*j) = K(2*j,2*j) + k(4,4);

%i wynik zwracany przez funkcje
y = K;
```
---

poniższą funkcję zapisujemy w pliku: `SilyElementPretowy2D.m`

```
function y = SilyElementPretowy2D(E,A,L,theta,u)
%funkcja wylicza sily wezlowe na podstawie znanych przemieszczen u,
%geometrii pręta oraz E
x = theta*pi/180;
c = cos(x);
s = sin(x);
y = E*A/L*[-c -s c s]*u;
```

---

poniższą funkcję zapisujemy w pliku: `NaprezeniaElementPretowy2D.m`

```
function y = NaprezeniaElementPretowy2D(E,L,theta,u)
%funkcja wylicza naprezenia dla danego elementu na podstawie znanych
przemieszczen u, geometrii elementu i E
x = theta*pi/180;
c = cos(x);
s = sin(x);
y = E/L*[-c -s c s]*u;
```
---

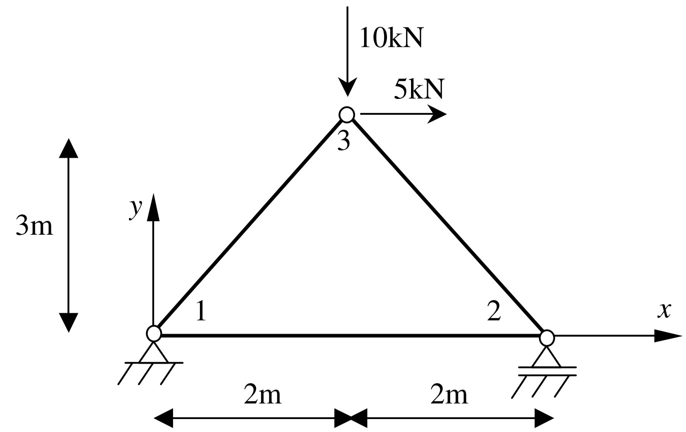
poniższą funkcję zapisujemy w pliku: `NachylonaPodporaElementPretowy2D.m`

```
function y = NachylonaPodporaElementPretowy2D(T,alpha,i)
%funkcja wyznacza macierz transformacji na podstawie kąta nachylenia podpory
%alpha i numeru węzła (kat w stopniach)
x = alpha*pi/180;
T(2*i-1,2*i-1) = cos(x);
T(2*i-1,2*i) = sin(x);
T(2*i,2*i-1) = -sin(x);
T(2*i,2*i) = cos(x);
y = T;
```

Przykład nr 1.

Dla podanego układu elementów wykonanych z materiału o znanym module E = 210GPa, polu przekroju A = 0.0001m^2 i siłach obciążających przedstawionych na rysunku, wyznaczyć poniższe niewiadome:

1. macierz sztywności układu
2. przemieszczenia węzłów nr 2 i 3
3. reakcje w węzłach nr 1 i 2
4. siłę i naprężenie w każdym elemencie



Rozwiązanie:

Krok 1 – dyskretyzacja zadania
Zadanie jest już podzielone na elementy i węzły :
- element nr 1 zdefiniowany jest węzłami nr i=1 i j=2
- element nr 2 zdefiniowany jest węzłami nr i=1 i j=3
- element nr 3 zdefiniowany jest węzłami nr i=2 i j=3

W węzłach nr 1 i 2 są podpory: podpora przegubowo-nieprzesuwna (1) i przegubowo-przesuwna (2).

Krok 2 – utworzenie macierzy sztywności dla każdego elementu
Wprowadzamy zmienne globalne, które przechowują dane materiałowe i geometryczne naszego zadania: współrzędne węzłów x1, y1, x2, y2, x3, y3, E, A, L1, theta1, wyznaczamy: L2, L3, theta2 i theta3 (theta: kąty nachylenia elementów do poziomu, zorientowane względem dodatniego zwrotu osi x) (UWAGA! W celu poprawienia przejrzystości wyświetlanych wyników: `>>format short`)

```
>>x1=0
>>y1=0
>>x2=4
>>y2=0
>>x3=2
>>y3=3
>>E=210e6
>>A=0.0001
>>L1=4
>>theta1=0
>>[L2 theta2]=DlugoscKatElementPretowy2D(x1,y1,x3,y3)
>>[L3 theta3]=DlugoscKatElementPretowy2D(x2,y2,x3,y3)
```

Mamy trzy elementy, zatem tworzymy trzy macierze sztywności : k1, k2 i k3 komendami:

```
>>k1=SztywnoscElementPretowy2D(E,A,L1,theta1)
>>k2=SztywnoscElementPretowy2D(E,A,L2,theta2)
>>k3=SztywnoscElementPretowy2D(E,A,L3,theta3)
```

Krok 3 – składanie macierzy sztywności elementów w jedną globalną macierz dla całego układu
Ponieważ w układzie mamy 3 węzły, więc globalna macierz sztywności będzie miała wymiar 6x6. Macierz K należy przed składaniem wyzerować, co wykonujemy komendą:

```
>>K=zeros(6,6)
```

Ponieważ mamy trzy elementy, to funkcję `ZlozSztywnoscPretow2D` trzeba wywołać trzy razy – niezależnie dla każdego elementu, podając jako parametry globalną macierz K (która jest wynikiem), macierz elementu k (k1, k2, a potem k3) i numery węzłów definiujące dany element (najpierw 1 i 2, potem 1 i 3 i na końcu 2 i 3):

```
>>K=ZlozSztywnoscPretow2D(K,k1,1,2)
>>K=ZlozSztywnoscPretow2D(K,k2,1,3)
>>K=ZlozSztywnoscPretow2D(K,k3,2,3)
```

Na odpowiednich miejscach w macierzy K pojawią się sumowane sztywności poszczególnych elementów (PROSZĘ KONTROLOWAĆ ZMIANIAJĄCE SIĘ WARTOŚCI!).

Krok 4 – uwzględnienie warunków brzegowych

Stworzona macierz sztywności ma postać:

$$K = 10^3 \begin{bmatrix} 7.0421 & 2.6882 & -5.2500 & 0 & -1.7921 & -2.6882 \\ 2.6882 & 4.0322 & 0 & 0 & -2.6882 & -4.0322 \\ -2.2500 & 0 & 7.0421 & -2.6882 & -1.7921 & 2.6882 \\ 0 & 0 & -2.6882 & 4.0322 & 2.6882 & -4.0322 \\ -1.7921 & -2.6882 & -1.7921 & 2.6882 & 3.5842 & 0 \\ -2.6882 & -4.0322 & 2.6882 & -4.0322 & 0 & 8.0645 \end{bmatrix}$$

a układ równań [K]{u}={f} można rozpisać w postać:

$$K * \begin{Bmatrix} u1x \\ u1y \\ u2x \\ u2y \\ u3x \\ u3y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f1x \\ f1y \\ f2x \\ f2y \\ f3x \\ f3y \end{Bmatrix}$$

Warunkami brzegowymi w naszym zadaniu są:

- przemieszczenie węzła nr 1 jest niemożliwe – podpora: u1x = 0 i u1y = 0
- w węźle nr 2 niemożliwe jest przemieszczenie w kierunku y, ale możliwe jest przemieszczenie w kierunku x, zatem: u2y = 0
- w węźle nr 3 jest obciążenie działające zarówno w kierunku x jak i y: f3x = 5, f3y = -10.

Po uwzględnieniu powyższych wiadomych, układ równań przyjmuje postać:

$$10^3 \begin{bmatrix} 7.0421 & 2.6882 & -5.2500 & 0 & -1.7921 & -2.6882 \\ 2.6882 & 4.0322 & 0 & 0 & -2.6882 & -4.0322 \\ -2.2500 & 0 & 7.0421 & -2.6882 & -1.7921 & 2.6882 \\ 0 & 0 & -2.6882 & 4.0322 & 2.6882 & -4.0322 \\ -1.7921 & -2.6882 & -1.7921 & 2.6882 & 3.5842 & 0 \\ -2.6882 & -4.0322 & 2.6882 & -4.0322 & 0 & 8.0645 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ u2x \\ 0 \\ u3x \\ u3y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f1x \\ f1y \\ 0 \\ f2y \\ 5 \\ -10 \end{Bmatrix}$$

nie znamy zatem przemieszczenia u2x, u3x i u3y oraz reakcji f1x, f1y i f2y (podpory).

Krok 5 – rozwiązanie równań
Przyglądając się układowi równań zauważymy, że można go rozwiązać „po kawałku”, wykreślając wiersze i kolumny odpowiadające zerowym przemieszczeniom węzłów:

$$10^3\begin{bmatrix} 7.0421 & 2.6882 & -5.2500 & 0 & -1.7921 & -2.6882 \\ 2.6882 & 4.0322 & 0 & 0 & -2.6882 & -4.0322 \\ -2.2500 & 0 & 7.0421 & -2.6882 & -1.7921 & 2.6882 \\ 0 & 0 & -2.6882 & 4.0322 & 2.6882 & -4.0322 \\ -1.7921 & -2.6882 & -1.7921 & 2.6882 & 3.5842 & 0 \\ -2.6882 & -4.0322 & 2.6882 & -4.0322 & 0 & 8.0645 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ u2x \\ 0 \\ u3x \\ u3y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f1x \\ f1y \\ 0 \\ f2y \\ 5 \\ -10 \end{Bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$10^3\begin{bmatrix} 7.0421 & -1.7921 & 2.6882 \\ -1.7921 & 3.5842 & 0 \\ 2.6882 & 0 & 8.0645 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} u2x \\ u3x \\ u3y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 5 \\ -10 \end{Bmatrix}$$

w Matlabie realizujemy to poleceniami:
- przepisanie wyrazów z 3, 5 i 6 wiersza i 3, 5 i 6 kolumny z K do k:

```
>>k=[K(3,3) K(3,5:6) ; K(5:6,3) K(5:6,5:6)]
```

- stworzenie wektora wyrazów wolnych (prawej strony równania) ze znanymi siłami f2x=0kN oraz f3x=5 i f3y=-10:

```
>>f=[0 ; 5 ; -10]
```

- wyznaczenie nieznanych przemieszczeń eliminacją Gaussa:

```
>>u=k\f
```

W wyniku otrzymujemy: u2x = 0.0011m, u3x = 0.0020m, u3y = -0.0016m.

Krok 6 – obróbka wyników (postprocessing)
Mając przemieszczenia wszystkich węzłów, możemy obliczyć reakcje w podporach. Najpierw zbierzmy przemieszczenia w jeden wektor (dodajemy do wyników u1x=0 i u1y=0 i u2y=0):

```
>>U=[0 ; 0 ; u(1) ; 0 ; u(2:3)]
```

a potem wyliczmy siły:

```
>>F=K*U
```

otrzymamy: f1x = F(1) = -5; f1y = F(2) = 1.25 i f2y = F(4) = 8.75. Zatem składowa pozioma reakcji w podporze nr 1 wynosi -5kN i jest skierowana przeciwnie do zwrotu osi x (w lewo, znak ujemny), składowa pionowa w podporze nr 1 wynosi 1.25kN i jest skierowana do góry, natomiast reakcja w podporze 2 jest równa 8.75kN i jest skierowana w prawo.

Siły w elementach wyznaczymy dzięki funkcji `SilyElementPretowy2D(E,A,L,theta,u)`, której parametrami są: moduł sprężystości E, pole przekroju A, długości L1, L2 i L3, kąty nachylenia theta1, theta2 i theta3 oraz przemieszczenia węzłów definiujących dany element (czyli parami: u1x i u1y oraz u2x i u2y, potem u1x i u1y oraz u3x i u3y i na końcu u2x i u2y oraz u3x i u3y):
najpierw przygotujemy pary przemieszczeń dla każdego elementu:

```
>>u1=[U(1) ; U(2) ; U(3) ; U(4)]
>>u2=[U(1) ; U(2) ; U(5) ; U(6)]
>>u3=[U(3) ; U(4) ; U(5) ; U(6)]
```

a potem wyznaczymy siły:

```
>>f1=SilyElementPretowy2D(E,A,L1,theta1,u1)
>>f2=SilyElementPretowy2D(E,A,L2,theta2,u2)
>>f3=SilyElementPretowy2D(E,A,L3,theta3,u3)
```

Wyniki wskazują, że elementy nr 2 i 3 są ściskane siłami 1.5023kN i 10.5162kN, a element nr 1 rozciągany siłą 5.8333kN. Naprężenia w elementach wyznaczymy dzięki funkcji `NaprezeniaElementPretowy2D(E,L,theta,u)`, której parametrami są: moduł sprężystości E, długości L1, L2 i L3, kąty nachylenia theta1, theta2 i theta3 oraz przemieszczenia węzłów definiujących dany element:

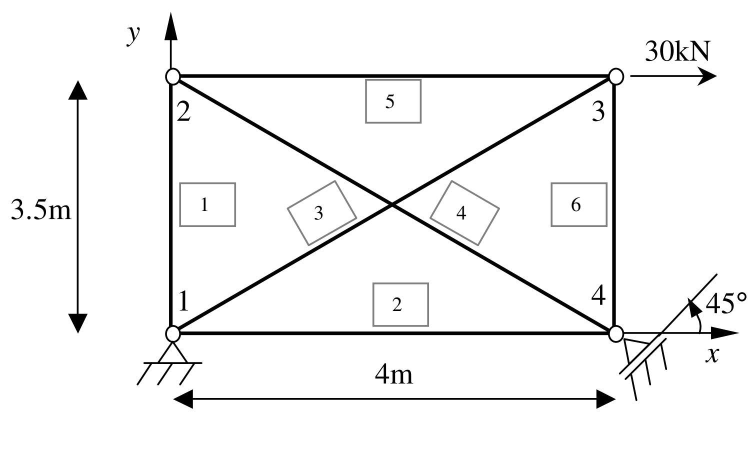
```
>>s1=NaprezeniaElementPretowy2D(E,L1,theta1,u1)
>>s2=NaprezeniaElementPretowy2D(E,L2,theta2,u2)
>>s3=NaprezeniaElementPretowy2D(E,L3,theta3,u3)
```

Uzyskane naprężenia dla elementów 1, 2 i 3: 5.8333E4 kPa, –1.5023E4kPa i –1.0516E5kPa.

Przykład nr 2.

Dla danego układu kratowego prętów o polach przekroju $A=0.004m^2$ i module E=70GPa wyznaczyć:

1. macierz sztywności układu
2. przemieszczenia węzłów nr 2, 3 i 4
3. reakcje w węzłach nr 1 i 4
4. siłę i naprężenie w każdym elemencie



Rozwiązanie:

Krok 1 – dyskretyzacja zadania
Układ jest już zdyskretyzowany 6. elementami i 4. węzłami :

- element nr 1 zdefiniowany jest węzłami nr i=1 i j=2
- element nr 2 zdefiniowany jest węzłami nr i=1 i j=4
- element nr 3 zdefiniowany jest węzłami nr i=1 i j=3
- element nr 4 zdefiniowany jest węzłami nr i=2 i j=4
- element nr 5 zdefiniowany jest węzłami nr i=2 i j=3
- element nr 6 zdefiniowany jest węzłami nr i=3 i j=4

Krok 2 – utworzenie macierzy sztywności dla każdego elementu

Tworzymy zmienne globalne. Dla nachylonych elementów wyliczamy ich długości i kąty nachylenia:

```
>>x1=0
>>y1=0
>>x2=0
>>y2=3.5
>>x3=4
>>y3=3.5
>>x4=4
>>y4=0
>>E=70e6
>>A=0.004
>>L1=3.5
>>theta1=90
>>L2=4
>>theta2=0
>>[L3 theta3]=DlugoscKatElementPretowy2D(x1,y1,x3,y3)
>>[L4 theta4]=DlugoscKatElementPretowy2D(x2,y2,x4,y4)
>>L5=4
>>theta5=0
>>L6=3.5
>>theta6=270
```

(Proszę zwrócić uwagę na kierunki definicji elementów – kolejność węzłów! Od tych kierunków zależą wartości kątów theta, które powinny być zawsze dodatnie!). Mamy sześć elementów, zatem tworzymy sześć macierzy sztywności : od k1 do k6 komendami:

```
>>k1=SztywnoscElementPretowy2D(E,A,L1,theta1)
>>k2=SztywnoscElementPretowy2D(E,A,L2,theta2)
>>k3=SztywnoscElementPretowy2D(E,A,L3,theta3)
>>k4=SztywnoscElementPretowy2D(E,A,L4,theta4)
>>k5=SztywnoscElementPretowy2D(E,A,L5,theta5)
>>k6=SztywnoscElementPretowy2D(E,A,L6,theta6)
```

Krok 3 – składanie macierzy sztywności elementów w jedną globalną macierz dla całego układu

Ponieważ w układzie mamy 4 węzły, więc globalna macierz sztywności będzie miała wymiar 8x8. Macierz K należy przed składaniem wyzerować, co wykonujemy komendą:

```
>>K=zeros(8,8)
```

Ponieważ mamy sześć elementów, to funkcję `ZlozSztywnoscPretow2D` trzeba wywołać sześć razy – niezależnie dla każdego elementu, podając jako parametry globalną macierz K (która jest wynikiem), macierz elementu k (od k1 do k6) i numery węzłów definiujące dany element:

```
>>K=ZlozSztywnoscPretow2D(K,k1,1,2)
>>K=ZlozSztywnoscPretow2D(K,k2,1,4)
>>K=ZlozSztywnoscPretow2D(K,k3,1,3)
```

```
>>K=ZlozSztywnoscPretow2D(K,k4,2,4)
>>K=ZlozSztywnoscPretow2D(K,k5,2,3)
>>K=ZlozSztywnoscPretow2D(K,k6,3,4)
```

Na odpowiednich miejscach w macierzy K pojawią się sumowane sztywności poszczególnych elementów. (UWAGA! Proszę obserwować wartości K po każdej komendzie!)

Krok 4 – uwzględnienie warunków brzegowych
Stworzona macierz sztywności ma postać:

$$K=10^5\begin{bmatrix} 0.9984 & 0.2611 & -0.0000 & -0.0000 & -0.2984 & -0.2611 & -0.7000 & 0 \\ 0.2611 & 1.0284 & -0.0000 & -0.8000 & -0.2611 & -0.2284 & 0 & 0 \\ -0.0000 & -0.0000 & 0.9984 & -0.2611 & -0.7000 & 0 & -0.2984 & 0.2611 \\ -0.0000 & -0.8000 & -0.2611 & 1.0284 & 0 & 0 & 0.2611 & -0.2284 \\ -0.2984 & -0.2611 & -0.7000 & 0 & 0.9984 & 0.2611 & -0.0000 & -0.0000 \\ -0.2611 & -0.2284 & 0 & 0 & 0.2611 & 1.0284 & -0.0000 & -0.8000 \\ -0.7000 & 0 & -0.2984 & 0.2611 & -0.0000 & -0.0000 & 0.9984 & -0.2611 \\ 0 & 0 & 0.2611 & -0.2284 & -0.0000 & -0.8000 & -0.2611 & 1.0284 \end{bmatrix}$$

Ponieważ w układzie znajduje się nachylona podpora, powyższą macierz należy zmodyfikować. Budujemy macierz T: na początek tworzymy macierz jednostkową o wymiarach takich, jak macierz K:

```
>>T=eye(8,8)
```

potem wywołujemy funkcję `NachylonaPodporaElementPretowy2D`, której parametrami są: macierz T (zwracana w wyniku, po uaktualnieniu wartości), kąt nachylenia podpory alpha (w przykładzie 45°, zasada taka sama, jak przy kątach theta) oraz numer węzła, w którym znajduje się podpora (w tym przypadku i=4):

```
>>T=NachylonaPodporaElementPretowy2D(T,45,4)
```

W wyniku powinna pojawić się macierz z wartościami:

$$T=\begin{bmatrix} 1.0000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.7071 & 0.7071 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.7071 & 0.7071 \end{bmatrix}$$

Modyfikację K realizuje się komendą:

```
>>Knew=T*K*T'
```

Układ równań [K]{u}={f} można rozpisać w postać (prim przy oznaczeniach przemieszczeń i sił w węźle 4 oznacza nachylenie podpory):

$$\text{Knew} * \begin{Bmatrix} u1x \\ u1y \\ u2x \\ u2y \\ u3x \\ u3y \\ u'4x \\ u'4y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f1x \\ f1y \\ f2x \\ f2y \\ f3x \\ f3y \\ f'4x \\ f'4y \end{Bmatrix}$$

Warunkami brzegowymi w naszym zadaniu są:

- znane przemieszczenia węzłów nr 1 i 4: u1x = u1y = u'4y = 0,
- znane obciążenia w węzłach nr 2 do 4 : f2x = f2y = f'4x = 0, f3x = 30

Po uwzględnieniu powyższych wiadomych, układ równań przyjmuje postać:

$$\text{Knew} * \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ u2x \\ u2y \\ u3x \\ u3y \\ u'4x \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f1x \\ f1y \\ 0 \\ 0 \\ 30 \\ 0 \\ 0 \\ f'4y \end{Bmatrix}$$

nie znamy zatem 5. przemieszczeń, a także reakcji f1 i f4 (składowej y).

Krok 5 – rozwiązanie równań

Układ równań rozwiążemy „po kawałku", wykreślając 1, 2 i 8 wiersz i kolumnę w Knew (dla zerowych przemieszczeń), zostawiając resztę dla nieznanych u (wiersze i kolumny od numeru 3 do 7). Realizujemy to komendą:

```
>>k=Knew(3:7,3:7)
```

$$k=10^5 \begin{bmatrix} 0.9984 & -0.2611 & -0.7000 & 0 & -0.0264 \\ -0.2611 & 1.0284 & 0 & 0 & 0.0231 \\ -0.7000 & 0 & 0.9984 & 0.2611 & -0.0000 \\ 0 & 0 & 0.2611 & 1.0284 & -0.5657 \\ -0.0264 & 0.0231 & -0.0000 & -0.5657 & 0.7523 \end{bmatrix}$$

Tak jak w poprzednim przykładzie, wektor f ze znanymi siłami utworzymy komendą:

```
>>f=[0 ; 0 ; 30; 0 ; 0]
```

a następnie wyliczymy nieznane przemieszczenia poleceniem (eliminacja Gaussa):

```
>>u=k\f
```

Otrzymamy w wyniku: $10^{-3}(0.6053\ \ 0.1590\ \ 0.8129\ \ -0.3366\ \ -0.2367)$m.

Krok 6 – obróbka wyników (postprocessing)

Mając przemieszczenia wszystkich węzłów, możemy obliczyć reakcje w podporach. Najpierw zbierzmy przemieszczenia w jeden wektor (dodajemy do wyników poprzednio pominięte zerowe wartości u):

```
>>U=[0 ; 0 ; u ; 0]
```

a potem wyliczmy siły:

```
>>F=Knew*U
```

otrzymamy: f1x = F(1) = -3.75; f1y = F(2) = -26.25 i f4y = F(8) = 37.1231. Ostatnia siła jest nachyloną reakcją podpory 4 (składowa pokrywająca się z osią podpory).

Siły w elementach wyznaczymy dzięki funkcji `SilyElementPretowy2D(E,A,L,theta,u)`, ale najpierw przygotujemy pary przemieszczeń dla każdego elementu:

```
>>u1=[U(1) ; U(2) ; U(3) ; U(4)]
>>u2=[U(1) ; U(2) ; U(7) ; U(8)]
>>u3=[U(1) ; U(2) ; U(5) ; U(6)]
>>u4=[U(3) ; U(4) ; U(7) ; U(8)]
>>u5=[U(3) ; U(4) ; U(5) ; U(6)]
>>u6=[U(5) ; U(6) ; U(7) ; U(8)]
```

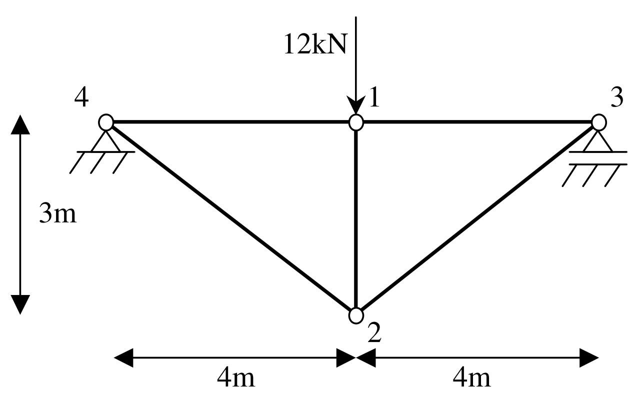
UWAGA! Wyliczenie sił i naprężeń proszę zrealizować samodzielnie.

Zadania do samodzielnego rozwiązania:

Zadanie nr 1.

Dla układu jak na rysunku poniżej, mając dane: E=200GPa, A=0.0015m^2 wyznaczyć:

1. macierz sztywności układu
2. przemieszczenia węzłów nr 1-3
3. reakcje w węzłach nr 3 i 4
4. siły i naprężenia w każdym elemencie

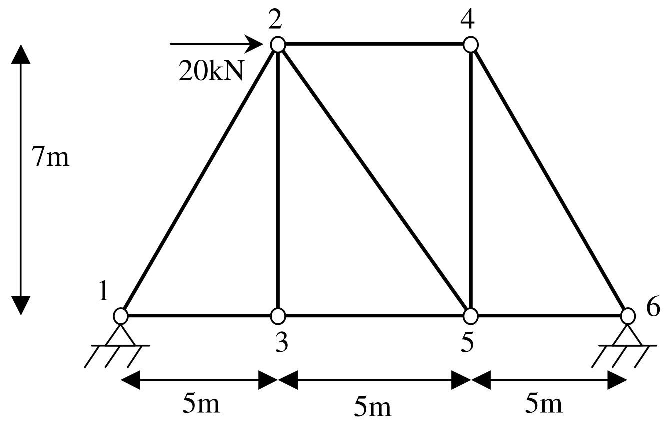


Zadanie nr 2.

Dla układu jak na rysunku poniżej, mając dane: E=210GPa, A=0.005m^2 wyznaczyć:

1. macierz sztywności układu
2. przemieszczenia węzłów nr 2-5

3. reakcje w węzłach nr 1 i 6
4. siły i naprężenia w każdym elemencie



Zadanie nr 3.

Dla układu jak na rysunku poniżej, mając: E=70GPa i A=0.01m^2 dla elementu prętowego, sztywność sprężyny k=3000kN/m, wyznaczyć:

1. macierz sztywności układu
2. przemieszczenie węzłów nr 4 i 5
3. reakcję w węzłach nr 1-3
4. siły i naprężenia w prętach
5. siłę w sprężynie