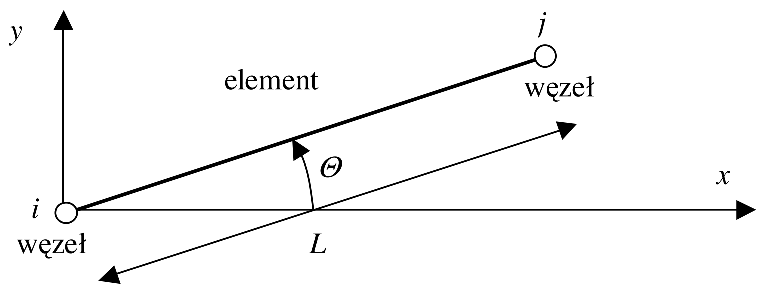
Metody komputerowe i obliczeniowe
Metoda Elementów Skończonych

Element dwuwymiarowy liniowy : rama 2D

Jest to element dwuwymiarowy o różnych współrzędnych lokalnych i globalnych węzłów – niezbędne są transformacje układów współrzędnych. Jego sztywność zdefiniowana jest pośrednio, za pomocą momentu bezwładności *I*, pola przekroju *A*, długości *L* oraz modułu Younga *E*. Transformacje wyrażone są za pomocą funkcji trygonometrycznych kąta nachylenia elementu w stosunku do osi x globalnego układu współrzędnych, mierzonego w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek zegara. Element ma dwa węzły definiujące jego końce. Każdy węzeł ma dwa stopnie swobody.



Jeśli każdy węzeł może przemieścić się w kierunku osi *x* i *y* oraz obrócić się (ma trzy stopnie swobody), to macierz sztywności elementu zdefiniowanego dwoma węzłami (a więc sześcioma stopniami swobody) zapisuje się jako macierz 6x6 (każdy wymiar macierzy to liczba stopni swobody całego elementu):

$$
K = \frac{E}{L}\begin{bmatrix}
Ac^2 + \frac{12I}{L^2}s^2 & \left(A - \frac{12I}{L^2}\right)cs & -\frac{6I}{L}s & -\left(Ac^2 + \frac{12I}{L^2}s^2\right) & -\left(A - \frac{12I}{L^2}\right)cs & -\frac{6I}{L}s \\
\left(A - \frac{12I}{L^2}\right)cs & As^2 + \frac{12I}{L^2}c^2 & \frac{6I}{L}c & \left(A - \frac{12I}{L^2}\right)cs & -\left(As^2 + \frac{12I}{L^2}c^2\right) & \frac{6I}{L}c \\
-\frac{6I}{L}s & \frac{6I}{L}c & 4I & \frac{6I}{L}s & -\frac{6I}{L}c & 2I \\
-\left(Ac^2 + \frac{12I}{L^2}s^2\right) & -\left(A - \frac{12I}{L^2}\right)cs & \frac{6I}{L}s & Ac^2 + \frac{12I}{L^2}s^2 & \left(A - \frac{12I}{L^2}\right)cs & \frac{6I}{L}s \\
-\left(A - \frac{12I}{L^2}\right)cs & -\left(As^2 + \frac{12I}{L^2}c^2\right) & -\frac{6I}{L}c & \left(A - \frac{12I}{L^2}\right)cs & As^2 + \frac{12I}{L^2}c^2 & -\frac{6I}{L}c \\
-\frac{6I}{L}s & \frac{6I}{L}c & 2I & \frac{6I}{L}s & -\frac{6I}{L}c & 4I
\end{bmatrix}
$$

gdzie:

$$c = \cos(\Theta),$$
$$s = \sin(\Theta).$$

Jeśli w całym układzie wielu połączonych ze sobą elementów wystąpi *n* węzłów, to macierz sztywności będzie miała wymiar $3n \times 3n$. W dalszym ciągu obowiązuje ogólny układ równań liniowych metody:

$$[K]\{u\} = \{f\}$$

gdzie: [K] – macierz sztywności, {u} – wektor przemieszczeń węzłów, {f} – wektor sił działających w węzłach. Jak w poprzednich lekcjach, jeśli znamy sztywność elementu oraz przemieszczenia węzłów – możemy wyliczyć działające siły, a jeśli znamy siły, to po rozwiązaniu układu równań możemy wyliczyć przemieszczenia. Siły w węzłach każdego elementu wyznacza się z następującego związku:

$$\{f\} = [\bar{k}][R]\{u\},$$

gdzie $\{u\}$ jest 6-elementowym wektorem kolumnowym, zawierającym przemieszczenia i rotacje węzłów definiujących dany element (w kolejności: u_{x1}, u_{y1}, ϕ_1, u_{x2}, u_{y2}, ϕ_2), a macierze $[\bar{k}]$ i $[R]$ zdefiniowane są następująco:

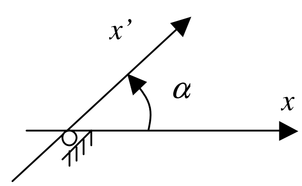
$$[\bar{k}] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

$$[R] = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Jeśli w schemacie statycznym wystąpi konieczność uwzględnienia nachylonej podpory, to globalna macierz sztywności musi zostać zmodyfikowana w następujący sposób:

$$K = TKT^T,$$

gdzie T jest macierzą transformacji o wymiarach takich, jak K (patrz niżej: funkcja `NachylonaPodporaElementRamowy2D`).



Funkcje realizujące obliczenia MES na elementach ramowych 2D w Matlabie (należy je przepisać w osobnych plikach M-File, nadając im nazwy takie, jakie mają zawarte w nich funkcje):

poniższą funkcję zapisujemy w pliku: `DlugoscKatElementRamowy2D.m`

```
function [L, Th]= DlugoscKatElementRamowy2D(x1,y1,x2,y2)
%funkcja wyznacza dlugosc L i kat nachylenia elementu ramowego 2D na podstawie
%wspolrzednych jego wezlow (kat w stopniach)
L = sqrt((x2-x1)*(x2-x1) + (y2-y1)*(y2-y1));
Th = atan((y2-y1)/(x2-x1))*180/pi;
```

```
if Th<0
    Th = 180 + Th;
end
```
---

poniższą funkcję zapisujemy w pliku: `SztywnoscElementRamowy2D.m`

```
function y = SztywnoscElementRamowy2D(E,A,I,L,theta)
%funkcja tworzy macierz sztywnosci dla pojedynczego elementu ramowego 2D
%kat theta podajemy w stopniach
%wymiar wyniku : 6x6
x = theta*pi/180;
c = cos(x);
s = sin(x);
w1 = A*c*c + 12*I*s*s / ( L*L );
w2 = A*s*s + 12*I*c*c / ( L*L );
w3 = ( A - 12*I / ( L*L )) * c*s;
w4 = 6*I*s/L;
w5 = 6*I*c/L;
y = E/L*[w1 w3 -w4 -w1 -w3 -w4; w3 w2 w5 -w3 -w2 w5; -w4 w5 4*I w4 -w5 2*I;
    -w1 -w3 w4 w1 w3 w4; -w3 -w2 -w5 w3 w2 -w5; -w4 w5 2*I w4 -w5 4*I];
```

---

poniższą funkcję zapisujemy w pliku: `ZlozSztywnoscRam2D.m`

```
function y = ZlozSztywnoscRam2D(K,k,i,j)
%funkcja sklada w jedna macierz sztywnosci K wszystkie elementy ramowe 2D
%w zadaniu laczac wszystkie sztywnosci pojedynczych elementow
%UWAGA! Funkcja moze byc wywolana po wczesniejszym uruchomieniu
%funkcji SztywnoscElementRamowy2D!

%skladanie (36 składników macierzy każdego elementu)
K(3*i-2,3*i-2) = K(3*i-2,3*i-2) + k(1,1);
K(3*i-2,3*i-1) = K(3*i-2,3*i-1) + k(1,2);
K(3*i-2,3*i) = K(3*i-2,3*i) + k(1,3);
K(3*i-2,3*j-2) = K(3*i-2,3*j-2) + k(1,4);
K(3*i-2,3*j-1) = K(3*i-2,3*j-1) + k(1,5);
K(3*i-2,3*j) = K(3*i-2,3*j) + k(1,6);
K(3*i-1,3*i-2) = K(3*i-1,3*i-2) + k(2,1);
K(3*i-1,3*i-1) = K(3*i-1,3*i-1) + k(2,2);
K(3*i-1,3*i) = K(3*i-1,3*i) + k(2,3);
K(3*i-1,3*j-2) = K(3*i-1,3*j-2) + k(2,4);
K(3*i-1,3*j-1) = K(3*i-1,3*j-1) + k(2,5);
K(3*i-1,3*j) = K(3*i-1,3*j) + k(2,6);
K(3*i,3*i-2) = K(3*i,3*i-2) + k(3,1);
K(3*i,3*i-1) = K(3*i,3*i-1) + k(3,2);
K(3*i,3*i) = K(3*i,3*i) + k(3,3);
K(3*i,3*j-2) = K(3*i,3*j-2) + k(3,4);
K(3*i,3*j-1) = K(3*i,3*j-1) + k(3,5);
K(3*i,3*j) = K(3*i,3*j) + k(3,6);
K(3*j-2,3*i-2) = K(3*j-2,3*i-2) + k(4,1);
K(3*j-2,3*i-1) = K(3*j-2,3*i-1) + k(4,2);
K(3*j-2,3*i) = K(3*j-2,3*i) + k(4,3);
K(3*j-2,3*j-2) = K(3*j-2,3*j-2) + k(4,4);
K(3*j-2,3*j-1) = K(3*j-2,3*j-1) + k(4,5);
K(3*j-2,3*j) = K(3*j-2,3*j) + k(4,6);
K(3*j-1,3*i-2) = K(3*j-1,3*i-2) + k(5,1);
K(3*j-1,3*i-1) = K(3*j-1,3*i-1) + k(5,2);
K(3*j-1,3*i) = K(3*j-1,3*i) + k(5,3);
K(3*j-1,3*j-2) = K(3*j-1,3*j-2) + k(5,4);
K(3*j-1,3*j-1) = K(3*j-1,3*j-1) + k(5,5);
```

```
K(3*j-1,3*j) = K(3*j-1,3*j) + k(5,6);
K(3*j,3*i-2) = K(3*j,3*i-2) + k(6,1);
K(3*j,3*i-1) = K(3*j,3*i-1)+ k(6,2);
K(3*j,3*i) = K(3*j,3*i) + k(6,3);
K(3*j,3*j-2) = K(3*j,3*j-2) + k(6,4);
K(3*j,3*j-1) = K(3*j,3*j-1) + k(6,5);
K(3*j,3*j) = K(3*j,3*j) + k(6,6);

%i wynik zwracany przez funkcje
y = K;
```

---

poniższą funkcję zapisujemy w pliku: `SilyElementRamowy2D.m`

```
function y = SilyElementRamowy2D(E,A,I,L,theta,u)
%funkcja wylicza sily wezlowe na podstawie znanych przemieszczen u,
%geometrii elementu oraz E
x = theta*pi/180;
c = cos(x);
s = sin(x);
w1 = E*A/L;
w2 = 12*E*I/(L*L*L);
w3 = 6*E*I/(L*L);
w4 = 4*E*I/L;
w5 = 2*E*I/L;
kk = [w1 0 0 -w1 0 0; 0 w2 w3 0 -w2 w3; 0 w3 w4 0 -w3 w5; -w1 0 0 w1 0 0;
    0 -w2 -w3 0 w2 -w3; 0 w3 w5 0 -w3 w4];
R = [c s 0 0 0 0; -s c 0 0 0 0; 0 0 1 0 0 0; 0 0 0 c s 0; 0 0 0 -s c 0;
    0 0 0 0 0 1];
y = kk*R*u;
```

---

poniższą funkcję zapisujemy w pliku: `WykresNRama2D.m`

```
function y = WykresNRama2D(f,L)
%funkcja rysuje wykres sił normalnych
%(pierwszy i czwarty składnik wektora {f})
x = [0; L];
z = [-f(1); f(4)];
hold on;
title('Wykres sil normalnych');
plot(x,z);
y1 = [0; 0];
plot(x,y1,'k');
```

---

poniższą funkcję zapisujemy w pliku: `WykresTRama2D.m`

```
function y = WykresTRama2D(f,L)
%funkcja rysuje wykres sił tnacych
%(drugi i piaty składnik wektora {f})
x = [0; L];
z = [f(2); -f(5)];
hold on;
title('Wykres sil tnacych');
plot(x,z);
y1 = [0; 0];
plot(x,y1,'k');
```

---

poniższą funkcję zapisujemy w pliku: `WykresMRama2D.m`

```
----------------------------------------------------------------------------------------------------------
function y = WykresMRama2D(f,L)
%funkcja rysuje wykres momentów zginajacych
%(trzeci i szosty składnik wektora {f})
x = [0; L];
z = [-f(3); f(6)];
hold on;
title('Wykres momentow zginajacych');
plot(x,z);
y1 = [0; 0];
plot(x,y1,'k');
----------------------------------------------------------------------------------------------------------
```

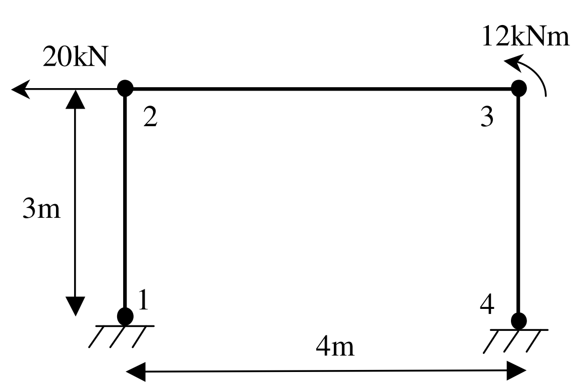
poniższą funkcję zapisujemy w pliku: `NachylonaPodporaElementRamowy2D.m`

```
----------------------------------------------------------------------------------------------------------
function y = NachylonaPodporaElementRamowy2D(T,alpha,i)
%funkcja wyznacza macierz transformacji na podstawie kąta nachylenia podpory
%alpha i numeru węzła (kat w stopniach)
x = alpha*pi/180;
T(3*i-2,3*i-2) = cos(x);
T(3*i-2,3*i-1) = sin(x);
T(3*i-2,3*i) = 0;
T(3*i-1,3*i-2) = -sin(x);
T(3*i-1,3*i-1) = cos(x);
T(3*i-1,3*i) = 0;
T(3*i,3*i-2) = 0;
T(3*i,3*i-1) = 0;
T(3*i,3*i) = 1;
%i wynik
y = T;
----------------------------------------------------------------------------------------------------------
```

Przykład nr 1.

Dla podanego układu elementów wykonanych z materiału o znanym module E = 210GPa, polu przekroju $A = 0.02m^2$ i momencie bezwładności $I = 5*10^{-5}m^4$, obciążonego jak na rysunku poniżej, wyznaczyć następujące niewiadome:

1. macierz sztywności układu
2. przemieszczenia i rotacje węzłów nr 2 i 3
3. reakcje w węzłach nr 1 i 4
4. siły wewnętrzne w każdym elemencie



Rozwiązanie:

Krok 1 – dyskretyzacja zadania

Zadanie jest już podzielone na elementy i węzły :
- element nr 1 zdefiniowany jest węzłami nr i=1 i j=2
- element nr 2 zdefiniowany jest węzłami nr i=2 i j=3
- element nr 3 zdefiniowany jest węzłami nr i=3 i j=4

W węzłach nr 1 i 4 są podpory: utwierdzenie.

Krok 2 – utworzenie macierzy sztywności dla każdego elementu

Wprowadzamy zmienne globalne, które przechowują dane materiałowe i geometryczne naszego zadania: współrzędne węzłów x1, y1, x2, y2, x3, y3, x4, y4, E, A, L1, theta1, L2, theta2, L3, theta3 (UWAGA! W celu poprawienia przejrzystości wyświetlanych wyników: `>>format short`)

```
>>x1=0
>>y1=0
>>x2=0
>>y2=3
>>x3=4
>>y3=3
>>x4=4
>>y4=0
>>E=210e6
>>A=0.02
>>I=5e-5;
>>L1=3
>>theta1=90
>>L2=4
>>theta2=0
>>L3=3
>>theta3=270
```

Mamy trzy elementy, zatem tworzymy trzy macierze sztywności : k1, k2 i k3 komendami:

```
>>k1=SztywnoscElementRamowy2D(E,A,I,L1,theta1)
>>k2=SztywnoscElementRamowy2D(E,A,I,L2,theta2)
>>k3=SztywnoscElementRamowy2D(E,A,I,L3,theta3)
```

Krok 3 – składanie macierzy sztywności elementów w jedną globalną macierz dla całego układu

Ponieważ w układzie mamy 4 węzły, więc globalna macierz sztywności będzie miała wymiar 12x12. Macierz K należy przed składaniem wyzerować, co wykonujemy komendą:

```
>>K=zeros(12,12)
```

Ponieważ mamy trzy elementy, to funkcję `ZlozSztywnoscRam2D` trzeba wywołać trzy razy – niezależnie dla każdego elementu, podając jako parametry globalną macierz K (która jest wynikiem), macierz elementu k (k1, k2, a potem k3) i numery węzłów definiujące dany element (najpierw 1 i 2, potem 2 i 3 i na końcu 3 i 4):

```
>>K=ZlozSztywnoscRam2D(K,k1,1,2)
>>K=ZlozSztywnoscRam2D(K,k2,2,3)
>>K=ZlozSztywnoscRam2D(K,k3,3,4)
```

Na odpowiednich miejscach w macierzy K pojawią się sumowane sztywności poszczególnych elementów (PROSZĘ KONTROLOWAĆ ZMIANIAJĄCE SIĘ WARTOŚCI!).

Krok 4 – uwzględnienie warunków brzegowych

Układ równań [K]{u}={f} można rozpisać w postać:

$$K*\begin{Bmatrix} u1x \\ u1y \\ \phi 1 \\ u2x \\ u2y \\ \phi 2 \\ u3x \\ u3y \\ \phi 3 \\ u4x \\ u4y \\ \phi 4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F1x \\ F1y \\ M1 \\ F2x \\ F2y \\ M2 \\ F3x \\ F3y \\ M3 \\ F4x \\ F4y \\ M4 \end{Bmatrix}$$

Warunkami brzegowymi w naszym zadaniu są:

- przemieszczenia i rotacja węzła nr 1 są niemożliwe – podpora: u1x = 0, u1y = 0 i ϕ1 = 0
- przemieszczenia i rotacja węzła nr 4 są niemożliwe – podpora: u4x = 0, u4y = 0 i ϕ4 = 0
- w węźle nr 2 jest obciążenie działające w kierunku x : F2x = -20.
- w węźle nr 3 jest obciążenie momentem : M3 = 12.

Po uwzględnieniu powyższych wiadomych, układ równań przyjmuje postać:

$$K*\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ u2x \\ u2y \\ \phi 2 \\ u3x \\ u3y \\ \phi 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F1x \\ F1y \\ M1 \\ -20 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 12 \\ F4x \\ F4y \\ M4 \end{Bmatrix}$$

nie znamy zatem przemieszczeń i rotacji węzłów 2 i 3 oraz reakcji w węzłach 1 i 4 (podpory).

Krok 5 – rozwiązanie równań

Układ równań można rozwiązać „po kawałku”, wykreślając pierwsze trzy i ostatnie trzy wiersze i kolumny odpowiadające zerowym przemieszczeniom węzłów (zostaje „wnętrze” K: od 4. do 9. wiersza i od 4. do 9. kolumny). W Matlabie realizujemy to poleceniami:

- przepisanie wyrazów z K do k:

```
>>k=K(4:9,4:9)
```

- stworzenie wektora wyrazów wolnych (prawej strony równania) ze znanymi obciążeniami:

```
>>f=[-20 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0 ; 12]
```

- wyznaczenie nieznanych przemieszczeń eliminacją Gaussa:

```
>>u=k\f
```

W wyniku otrzymujemy: u2x = -0.0038m, u2y = -0.0000m, ϕ2 = 0.0008rad, u3x = -0.0038m, u3y = -0.0000m, ϕ3 = 0.0014rad

Krok 6 – obróbka wyników (postprocessing)

Mając przemieszczenia wszystkich węzłów, możemy obliczyć reakcje w podporach. Najpierw zbierzmy przemieszczenia w jeden wektor (dodajemy do wyników zerowe przemieszczenia i rotacje węzłów nr 1 i 4):

```
>>U=[0 ; 0 ; 0 ; u ; 0 ; 0 ; 0]
```

a potem wyliczmy siły:

```
>>F=K*U
```

otrzymamy reakcje: f1x = F(1) = 12.1897kN; f1y = F(2) = 8.5865kN, M1 = F(3) = -21.0253kNm, f4x = F(10) = 7.8103kN; f4y = F(11) = -8.5865kN, M4 = F(12) = -16.6286kNm.
Siły w elementach wyznaczymy dzięki funkcji `SilyElementRamowy2D(E,A,I,L,theta,u)`, której parametrami są: moduł sprężystości E, pole przekroju A, moment bezwładności I, długości L1, L2 i L3, kąty nachylenia theta1, theta2 i theta3 oraz przemieszczenia węzłów definiujących dany element (czyli parami trójek: u1x, u1y i ϕ1 oraz u2x, u2y i ϕ2, potem u2x, u2y i ϕ2 oraz u3x, u3y i ϕ3 i na końcu u3x, u3y i ϕ3 oraz u4x, u4y i ϕ4):
najpierw przygotujemy pary przemieszczeń i rotacji dla każdego elementu:

```
>>u1=[U(1) ; U(2) ; U(3) ; U(4) ; U(5) ; U(6)]
>>u2=[U(4) ; U(5) ; U(6) ; U(7) ; U(8) ; U(9)]
>>u3=[U(7) ; U(8) ; U(9) ; U(10) ; U(11) ; U(12)]
```

a potem wyznaczymy siły:

```
>>f1=SilyElementRamowy2D(E,A,I,L1,theta1,u1)
>>f2=SilyElementRamowy2D(E,A,I,L2,theta2,u2)
>>f3=SilyElementRamowy2D(E,A,I,L3,theta3,u3)
```

Wyniki najlepiej przedstawić w postaci graficznej. Realizujemy to komendami:
Dla elementu nr 1 (po każdej komendzie sprawdzamy wykres, po czym zamykamy go)

```
>>WykresNRama2D(f1,L1)
>>WykresTRama2D(f1,L1)
>>WykresMRama2D(f1,L1)
```

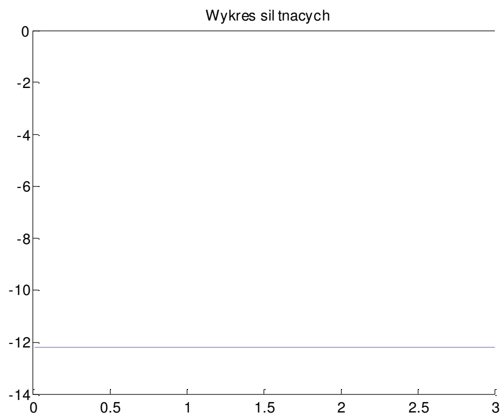
dla elementu nr 2

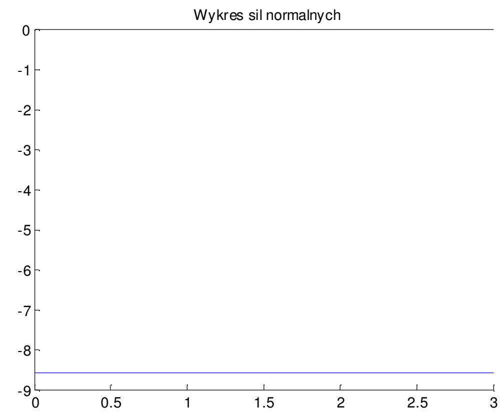
```
>>WykresNRama2D(f2,L2)
>>WykresTRama2D(f2,L2)
>>WykresMRama2D(f2,L2)
```

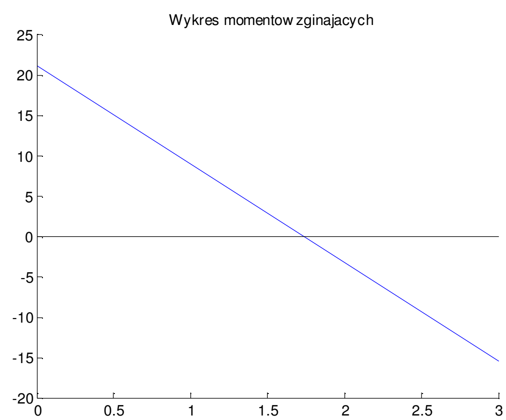
i dla elementu nr 3

```
>>WykresNRama2D(f3,L3)
>>WykresTRama2D(f3,L3)
>>WykresMRama2D(f3,L3)
```

Rysunki poniżej przedstawiają siły wewnętrzne dla elementu nr 1. **Proszę przerysować do zeszytu wszystkie wykresy, składając poszczególne przebiegi T, N i M we wszystkich elementach w wykresy dla całego układu.**



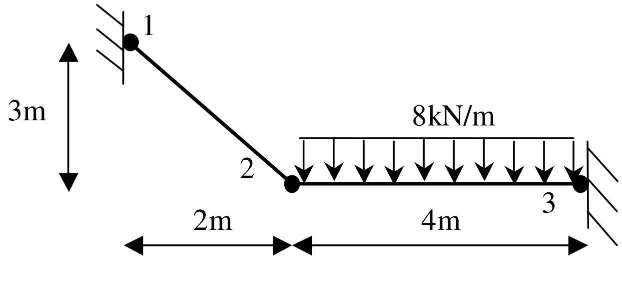




Przykład nr 2.

Dla danego układu elementów o A=0.04m^2, E=200GPa i I = 10^{-6}m^4 wyznaczyć:

1. macierz sztywności układu
2. przemieszczenia i rotację węzła nr 2
3. reakcje w węzłach nr 1 i 3
4. siły wewnętrzne w każdym elemencie



Rozwiązanie:

Krok 1 – dyskretyzacja zadania
Układ jest już zdyskretyzowany 2. elementami i 3. węzłami :
- element nr 1 zdefiniowany jest węzłami nr i=1 i j=2
- element nr 2 zdefiniowany jest węzłami nr i=2 i j=3

Krok 2 – utworzenie macierzy sztywności dla każdego elementu

Tworzymy zmienne globalne. Dla nachylonych elementów wyliczamy ich długości i kąty nachylenia:

```
>>x1=0
>>y1=3
>>x2=2
>>y2=0
>>x3=6
>>y3=0
>>E=200e6
>>A=0.04
>>[L1, theta1]=DlugoscKatElementRamowy2D(x1,y1,x2,y2)
>>L2=4
>>theta2=0
```

Mamy dwa elementy, zatem tworzymy dwie macierze sztywności : k1 i k2 komendami:

```
>>k1=SztywnoscElementRamowy2D(E,A,I,L1,theta1)
>>k2=SztywnoscElementRamowy2D(E,A,I,L2,theta2)
```

Krok 3 – składanie macierzy sztywności elementów w jedną globalną macierz dla całego układu
Ponieważ w układzie mamy 3 węzły, więc globalna macierz sztywności będzie miała wymiar 9x9. Macierz K należy przed składaniem wyzerować, co wykonujemy komendą:

```
>>K=zeros(9,9)
```

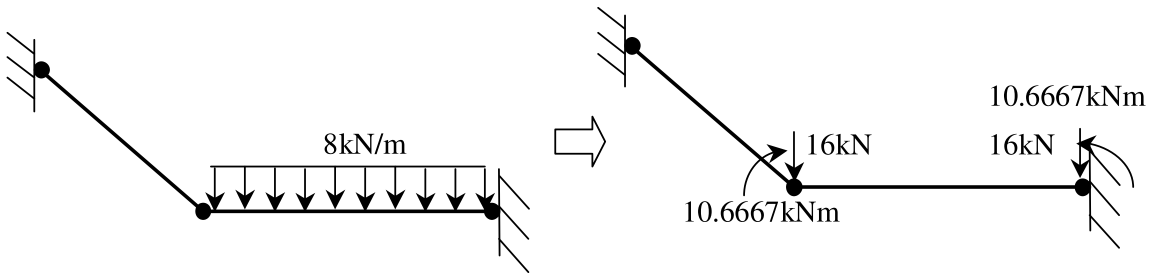
Ponieważ mamy dwa elementy, to funkcję `ZlozSztywnoscRam2D` trzeba wywołać dwa razy – niezależnie dla każdego elementu, podając jako parametry globalną macierz K (która jest wynikiem), macierz elementu k i numery węzłów definiujące dany element:

```
>>K=ZlozSztywnoscRam2D(K,k1,1,2)
>>K=ZlozSztywnoscRam2D(K,k2,2,3)
```

Na odpowiednich miejscach w macierzy K pojawią się sumowane sztywności poszczególnych elementów. (UWAGA! Proszę obserwować wartości K po każdej komendzie!)

Krok 4 – uwzględnienie warunków brzegowych
W węzłach nr 1 i 3 są podpory – utwierdzenia, zatem: $u1x = u1y = \phi 1 = u3x = u3y = \phi 3 = 0$
Ponieważ w układzie znajduje się obciążenie równomiernie rozłożone, należy je zamienić na równoważne obciążenie węzłowe wg formuły:

$$\{p\}=\begin{Bmatrix} 0 \\ -\dfrac{qL}{2} \\ -\dfrac{qL^2}{12} \\ 0 \\ -\dfrac{qL}{2} \\ \dfrac{qL^2}{12} \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ -16kN \\ -10.6667kNm \\ 0 \\ -16kN \\ 10.6667kNm \end{Bmatrix}$$



Zatem obciążenie w węźle nr 2 wyniesie: F2x = 0, F2y = -16kN, M2 = -10.6667kNm.
Układ równań [K]{u}={f} można rozpisać w postać:

$$K*\begin{Bmatrix} u1x \\ u1y \\ \phi 1 \\ u2x \\ u2y \\ \phi 2 \\ u3x \\ u3y \\ \phi 3 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} F1x \\ F1y \\ M1 \\ F2x \\ F2y \\ M2 \\ F3x \\ F3y \\ M3 \end{Bmatrix}$$

Po uwzględnieniu powyższych wiadomych, układ równań przyjmuje postać:

$$K*\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ u2x \\ u2y \\ \phi 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} F1x \\ F1y \\ M1 \\ 0 \\ -16 \\ -10.6667 \\ F3x \\ F3y \\ M3 \end{Bmatrix}$$

nie znamy zatem 3. wartości wektora {u} i 6. wartości składowych reakcji.

Krok 5 – rozwiązanie równań
Układ równań rozwiążemy „po kawałku”, wykreślając wiersze i kolumny o numerach 1-3 i 7-9 w K (dla zerowych wartości {u}), zostawiając resztę dla nieznanych składowych {u}. Realizujemy to komendą:

```
>>k=K(4:6,4:6)
```

Tak jak w poprzednim przykładzie, wektor f ze znanymi siłami utworzymy komendą:

```
>>f=[0 ; -16 ; -10.6667]
```

a następnie wyliczymy nieznane przemieszczenia poleceniem (eliminacja Gaussa):

```
>>u=k\f
```

Otrzymamy w wyniku: u2x = -0.0000m, u2y = -0.0000m, ϕ2 = -0.0253rad

Krok 6 – obróbka wyników (postprocessing)
Mając przemieszczenia wszystkich węzłów, możemy obliczyć reakcje w podporach. Najpierw zbierzmy przemieszczenia w jeden wektor (dodajemy do wyników poprzednio pominięte zerowe wartości u):

```
>>U=[0 ; 0 ; 0 ; u ; 0 ; 0 ; 0]
```

a potem wyliczmy siły:

```
>>F=K*U
```

Składowe wektora {u} przypadające na każdy element wyznaczymy komendami:

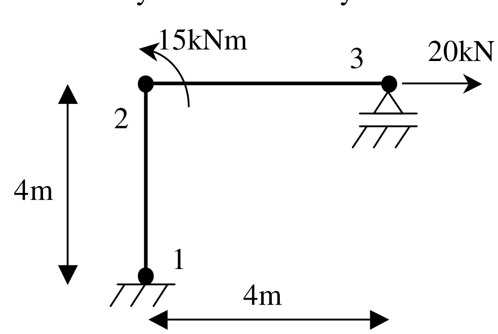
```
>>u1=[U(1) ; U(2) ; U(3) ; U(4) ; U(5) ; U(6)]
>>u2=[U(4) ; U(5) ; U(6) ; U(7) ; U(8) ; U(9)]
```

<u>UWAGA! Wyliczenie sił wewnętrznych i opracowanie wykresów proszę zrealizować samodzielnie.</u>

Zadania do samodzielnego rozwiązania:

<u>Zadanie nr 1.</u>

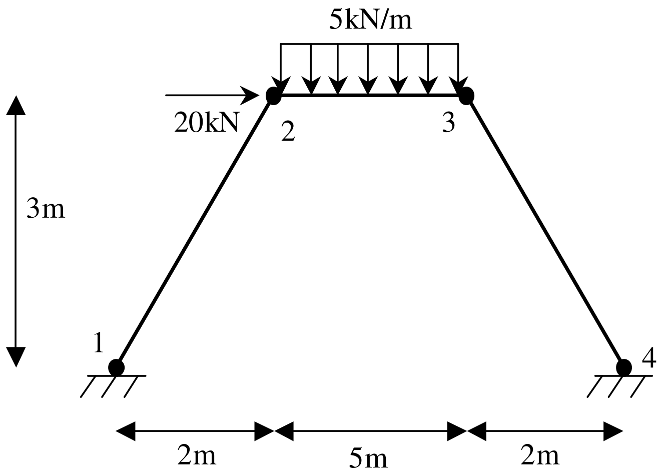
Dla układu jak na rysunku poniżej, mając dane: E=210GPa, A=0.04m^2, I=4*10^{-6}m^4 wyznaczyć:
1. macierz sztywności układu
2. przemieszczenia i rotację węzłów nr 2 i 3
3. reakcje w węzłach nr 1 i 3
4. siły wewnętrzne wraz z ich wykresami w każdym elemencie



Zadanie nr 2.

Dla układu jak na rysunku poniżej, mając dane: E=210GPa, A=0.01m^2, I=9*10^{-5}m^4 wyznaczyć:

1. macierz sztywności układu
2. przemieszczenia i rotacje węzłów nr 2 i 3
3. reakcje w węzłach nr 1 i 4
4. siły wewnętrzne i ich wykresy w każdym elemencie



Zadanie nr 3.

Dla układu jak na rysunku poniżej, mając: E=70GPa, A=0.01m^2, I=9*10^{-5}m^4 oraz k = 5000kN/m dla elementu sprężynowego, wyznaczyć:

1. macierz sztywności układu
2. przemieszczenia węzłów nr 2 i 4
3. reakcje w węzłach nr 1-3
4. siły wewnętrzne