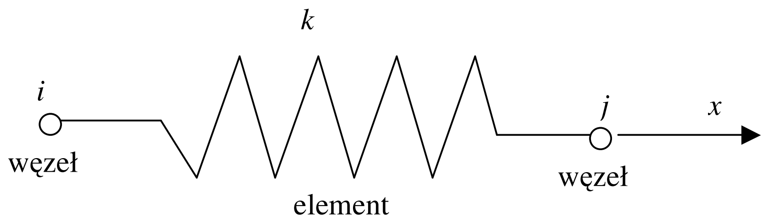
Metody komputerowe i obliczeniowe
Metoda Elementów Skończonych

Element jednowymiarowy i jednoparametrowy : „sprężyna”

Jest to najprostszy element: współrzędne lokalne i globalne jego węzłów są takie same – nie potrzeba żadnych transformacji układów współrzędnych, żeby łatwiej operować geometrią analizowanego systemu. Element ma dwa węzły definiujące jego końce.



Jeśli sztywność „sprężyny” opisuje stała k, a każdy węzeł może przemieścić się tylko w kierunku osi x (ma jeden stopień swobody), to macierz sztywności elementu zdefiniowanego dwoma węzłami (a więc dwoma stopniami swobody) zapisuje się jako macierz 2x2 (każdy wymiar macierzy to liczba stopni swobody całego elementu):

$$K = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix},$$

jeśli w całym układzie wielu połączonych ze sobą sprężyn wystąpi n węzłów, to macierz sztywności będzie miała wymiar $n{\times}n$.
Z fizyki pamiętamy, że ugięcie sprężyny jest proporcjonalne do siły, jaka na nią działa, zatem:

$$F = k*u,$$

gdzie : F – siła, k – stała sprężystości sprężyny, u – przemieszczenie (ugięcie), zapisujemy to macierzowo:

$$[K]\{u\} = \{f\}$$

gdzie: [K] – macierz sztywności, {u} – wektor przemieszczeń węzłów, {f} – wektor sił działających w węzłach. Jeśli znamy sztywność sprężyny oraz przemieszczenia węzłów – możemy wyliczyć działające siły, a jeśli znamy siły, to po rozwiązaniu równania możemy wyliczyć przemieszczenia.
Funkcje realizujące obliczenia MES na elementach sprężynowych w Matlabie (należy je przepisać w osobnych plikach M-File, nadając im nazwy takie, jakie mają zawarte w nich funkcje):

poniższą funkcję zapisujemy w pliku: `SztywnoscElementSprezynowy.m`

```
function y = SztywnoscElementSprezynowy(k)
%funkcja tworzy macierz sztywnosci dla pojedynczego elementu sprezynowego
%wymiar wyniku : 2x2
y = [k -k; -k k];
```

---

poniższą funkcję zapisujemy w pliku: `ZlozSztywnoscSprezyn.m`

```
function y = ZlozSztywnoscSprezyn(K,k,i,j)
%funkcja sklada w jedna macierz sztywnosci K wszystkie sprezyny
%w zadaniu laczac wszystkie sztywnosci pojedynczych elementow k
%zdefiniowanych wezlami i j
%UWAGA! Funkcja moze byc wywolana po wczesniejszym uruchomieniu
%funkcji SztywnoscElementSprezynowy!

%skladanie
K(i,i) = K(i,i) + k(1,1);
K(i,j) = K(i,j) + k(1,2);
K(j,i) = K(j,i) + k(2,1);
K(j,j) = K(j,j) + k(2,2);

%i wynik zwracany przez funkcje
y = K;
```

---

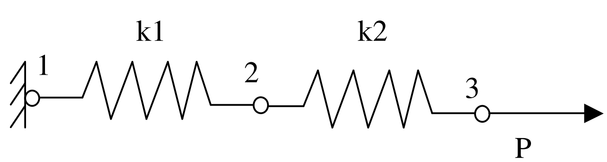
poniższą funkcję zapisujemy w pliku: `SilyElementSprezynowy.m`

```
function y = SilyElementSprezynowy(k,u)
%funkcja wylicza sily wezlowe na podstawie znanych przemieszczen u i
%sztywnosci k
y = k * u;
```

Przykład nr 1.

Dla podanego układu elementów o znanych sztywnościach k1 = 100kN/m i k2 = 200kN/m oraz sile obciążającej P = 15kN wyznaczyć:

1. macierz sztywności układu
2. przemieszczenia węzłów nr 2 i 3
3. reakcję w węźle 1
4. siłę w każdym elemencie (sprężynie)



Rozwiązanie:

Krok 1 – dyskretyzacja zadania
Zadanie jest już podzielone na elementy i węzły :
- element nr 1 zdefiniowany jest węzłami nr i=1 i j=2
- element nr 2 zdefiniowany jest węzłami nr i=2 i j=3
węzeł nr 2 jest wspólny dla obu elementów – elementy są połączone w węźle nr 2.

Krok 2 – utworzenie macierzy sztywności dla każdego elementu
Mamy dwa elementy, zatem tworzymy dwie macierze sztywności : k1 i k2 komendami:

```
>>k1=SztywnoscElementSprezynowy(100)
>>k2=SztywnoscElementSprezynowy(200)
```

Krok 3 – składanie macierzy sztywności elementów w jedną globalną macierz dla całego układu

Ponieważ w układzie mamy 3 węzły, więc globalna macierz sztywności będzie miała wymiar 3x3. Macierz K należy przed składaniem wyzerować, co wykonujemy komendą:

```
>>K=zeros(3,3)
```

Ponieważ mamy dwa elementy, to funkcję `ZlozSztywnoscSprezyn` trzeba wywołać dwa razy – niezależnie dla każdego elementu, podając jako parametry globalną macierz K (która jest wynikiem), macierz elementu k (k1, a potem k2) i numery węzłów definiujące dany element (najpierw 1 i 2, a potem 2 i 3):

```
>>K=ZlozSztywnoscSprezyn(K,k1,1,2)
>>K=ZlozSztywnoscSprezyn(K,k2,2,3)
```

Na odpowiednich miejscach w macierzy K pojawią się sumowane sztywności poszczególnych elementów.

Krok 4 – uwzględnienie warunków brzegowych

Stworzona macierz sztywności ma postać:

$$K = \begin{bmatrix} 100 & -100 & 0 \\ -100 & 300 & -200 \\ 0 & -200 & 200 \end{bmatrix}$$

a układ równań [K]{u}={f} można rozpisać w postać:

$$\begin{bmatrix} 100 & -100 & 0 \\ -100 & 300 & -200 \\ 0 & -200 & 200 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u1 \\ u2 \\ u3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f1 \\ f2 \\ f3 \end{Bmatrix}$$

Warunkami brzegowymi w naszym zadaniu są:

- przemieszczenie węzła nr 1 jest niemożliwe – podpora: u1 = 0
- nie ma obciążenia w węźle nr 2 – f2 = 0
- w węźle nr 3 zaczepiona jest siła P: f3 = 15kN (w prawo, zgodnie z dodatnim zwrotem osi x)

Po uwzględnieniu powyższych wiadomych, układ równań przyjmuje postać:

$$\begin{bmatrix} 100 & -100 & 0 \\ -100 & 300 & -200 \\ 0 & -200 & 200 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ u2 \\ u3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f1 \\ 0 \\ 15 \end{Bmatrix}$$

nie znamy zatem przemieszczeń u2 i u3, a także reakcji f1 (podpora).

Krok 5 – rozwiązanie równań

Przyglądając się układowi równań zauważymy, że można go rozwiązać „po kawałku”, wykreślając pierwszy wiersz i kolumnę dla znanego przemieszczenia, zostawiając resztę dla nieznanych u2 i u3:

$$\begin{bmatrix} 100 & -100 & 0 \\ -100 & \boxed{300} & -200 \\ 0 & -200 & 200 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ u2 \\ u3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f1 \\ 0 \\ 15 \end{Bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} 300 & -200 \\ -200 & 200 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u2 \\ u3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 15 \end{Bmatrix}$$

w Matlabie realizujemy to poleceniami:
przepisanie tylko 2 i 3 wiersza i kolumny z K do k:

```
>>k=K(2:3,2:3)
```

stworzenie wektora f ze znanymi siłami f2=0kN i f3=15kN:

```
>>f=[0;15]
```

wyliczamy nieznane przemieszczenia poleceniem (eliminacja Gaussa):

```
>>u=k\f
```

i otrzymujemy w wyniku: u2 = 0.150m oraz u3 = 0.225m.

Krok 6 – obróbka wyników (postprocessing)
Mając przemieszczenia wszystkich węzłów, możemy obliczyć reakcję w podporze. Najpierw zbierzmy przemieszczenia w jeden wektor (dodajemy u1=0 do wyników):

```
>>U=[0;u]
```

a potem wyliczmy siły:

```
>>F=K*U
```

otrzymamy: F1 = -15.0; F2 = 0.0 i F3 = 15.0. Zatem reakcja w podporze wynosi 15kN i jest skierowana przeciwnie do zwrotu osi x (w lewo, znak ujemny).
Siły w elementach wyznaczymy dzięki funkcji `SilyElementSprezynowy(k,u)`, której parametrami są: macierz sztywności elementu (k1 i k2) oraz przemieszczenia węzłów definiujących dany element (czyli u1 i u2, a potem u2 i u3):
najpierw przygotujemy pary przemieszczeń dla każdego elementu:

```
>>u1=[U(1);U(2)]
>>u2=[U(2);U(3)]
```

a potem wyznaczymy siły:

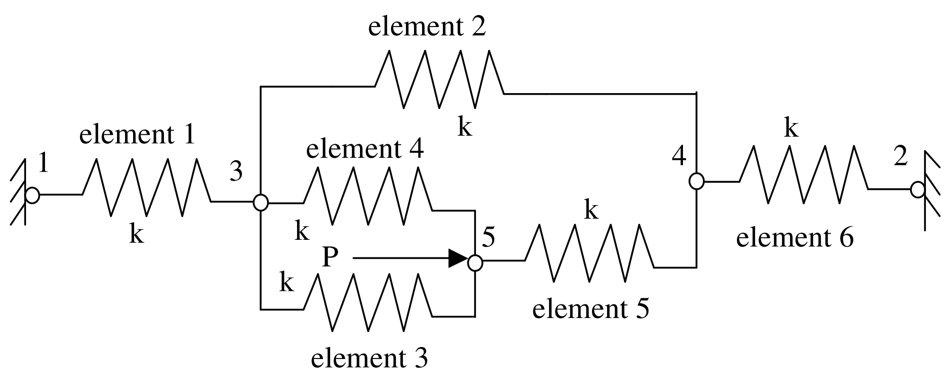
```
>>f1=SilyElementSprezynowy(k1,u1)
>>f2=SilyElementSprezynowy(k2,u2)
```

Wyniki wskazują, że oba elementy są rozciągane zrównoważonymi siłami 15kN.

Przykład nr 2.

Dla podanego układu elementów o jednakowych sztywnościach k = 120kN/m oraz sile obciążającej P = 20kN wyznaczyć:

1. macierz sztywności układu
2. przemieszczenia węzłów nr 3, 4 i 5
3. reakcje w węzłach 1 i 2
4. siłę w każdym elemencie (sprężynie)



Rozwiązanie:

Krok 1 – dyskretyzacja zadania
Zadanie jest już podzielone na elementy i węzły :
- element nr 1 zdefiniowany jest węzłami nr i=1 i j=3
- element nr 2 zdefiniowany jest węzłami nr i=3 i j=4
- element nr 3 zdefiniowany jest węzłami nr i=3 i j=5
- element nr 4 zdefiniowany jest węzłami nr i=3 i j=5
- element nr 5 zdefiniowany jest węzłami nr i=5 i j=4
- element nr 6 zdefiniowany jest węzłami nr i=4 i j=2

Krok 2 – utworzenie macierzy sztywności dla każdego elementu
Mamy sześć elementów, zatem tworzymy sześć macierzy sztywności : od k1 do k6 komendami:

```
>>k1=SztywnoscElementSprezynowy(120)
>>k2=SztywnoscElementSprezynowy(120)
>>k3=SztywnoscElementSprezynowy(120)
>>k4=SztywnoscElementSprezynowy(120)
>>k5=SztywnoscElementSprezynowy(120)
>>k6=SztywnoscElementSprezynowy(120)
```

Krok 3 – składanie macierzy sztywności elementów w jedną globalną macierz dla całego układu
Ponieważ w układzie mamy 5 węzłów, więc globalna macierz sztywności będzie miała wymiar 5x5. Macierz K należy przed składaniem wyzerować, co wykonujemy komendą:

```
>>K=zeros(5,5)
```

Ponieważ mamy sześć elementów, to funkcję `ZlozSztywnoscSprezyn` trzeba wywołać sześć razy – niezależnie dla każdego elementu, podając jako parametry globalną macierz K (która jest wynikiem), macierz elementu k (od k1 do k6) i numery węzłów definiujące dany element:

```
>>K=ZlozSztywnoscSprezyn(K,k1,1,3)
>>K=ZlozSztywnoscSprezyn(K,k2,3,4)
>>K=ZlozSztywnoscSprezyn(K,k3,3,5)
>>K=ZlozSztywnoscSprezyn(K,k4,3,5)
>>K=ZlozSztywnoscSprezyn(K,k5,5,4)
>>K=ZlozSztywnoscSprezyn(K,k6,4,2)
```

Na odpowiednich miejscach w macierzy K pojawią się sumowane sztywności poszczególnych elementów.

Krok 4 – uwzględnienie warunków brzegowych
Stworzona macierz sztywności ma postać:

$$K = \begin{bmatrix} 120 & 0 & -120 & 0 & 0 \\ 0 & 120 & 0 & -120 & 0 \\ -120 & 0 & 480 & -120 & -240 \\ 0 & -120 & -120 & 360 & -120 \\ 0 & 0 & -240 & -120 & 360 \end{bmatrix}$$

a układ równań [K]{u}={f} można rozpisać w postać:

$$\begin{bmatrix} 120 & 0 & -120 & 0 & 0 \\ 0 & 120 & 0 & -120 & 0 \\ -120 & 0 & 480 & -120 & -240 \\ 0 & -120 & -120 & 360 & -120 \\ 0 & 0 & -240 & -120 & 360 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u1 \\ u2 \\ u3 \\ u4 \\ u5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f1 \\ f2 \\ f3 \\ f4 \\ f5 \end{Bmatrix}$$

Warunkami brzegowymi w naszym zadaniu są:

- przemieszczenia węzłów nr 1 i 2 są niemożliwe – podpory: u1 = 0, u2 = 0,
- nie ma obciążeń w węzłach nr 3 i 4 : f3 = 0, f4 = 0,
- w węźle nr 5 zaczepiona jest siła P: f5 = 20kN (w prawo, zgodnie z dodatnim zwrotem osi x)

Po uwzględnieniu powyższych wiadomych, układ równań przyjmuje postać:

$$\begin{bmatrix} 120 & 0 & -120 & 0 & 0 \\ 0 & 120 & 0 & -120 & 0 \\ -120 & 0 & 480 & -120 & -240 \\ 0 & -120 & -120 & 360 & -120 \\ 0 & 0 & -240 & -120 & 360 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ u3 \\ u4 \\ u5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f1 \\ f2 \\ 0 \\ 0 \\ 20 \end{Bmatrix}$$

nie znamy zatem przemieszczeń u3, u4 i u5, a także reakcji f1 i f2 (podpory).

Krok 5 – rozwiązanie równań

Analogicznie do poprzedniego przykładu, układ równań rozwiążemy „po kawałku”, wykreślając dwa pierwsze wiersze i kolumny dla znanych przemieszczeń u1 i u2, zostawiając resztę dla nieznanych u3, u4 i u5:

$$\begin{bmatrix} 120 & 0 & -120 & 0 & 0 \\ 0 & 120 & 0 & -120 & 0 \\ -120 & 0 & 480 & -120 & -240 \\ 0 & -120 & -120 & 360 & -120 \\ 0 & 0 & -240 & -120 & 360 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ u3 \\ u4 \\ u5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f1 \\ f2 \\ 0 \\ 0 \\ 20 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 480 & -120 & -240 \\ -120 & 360 & -120 \\ 240 & -120 & 360 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u3 \\ u4 \\ u5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 20 \end{Bmatrix}$$

w Matlabie realizujemy to poleceniami:
przepisanie tylko 3, 4 i 5 wiersza i kolumny z K do k:

```
>>k=K(3:5,3:5)
```

stworzenie wektora f ze znanymi siłami f3=0kN, f4 = 0kN i f5=20kN:

```
>>f=[0;0;20]
```

wyliczamy nieznane przemieszczenia poleceniem (eliminacja Gaussa):

```
>>u=k\f
```

i otrzymujemy w wyniku: u3 = 0.0897m, u4 = 0.0769m oraz u5 = 0.1410m.

Krok 6 – obróbka wyników (postprocessing)

Mając przemieszczenia wszystkich węzłów, możemy obliczyć reakcje w podporach. Najpierw zbierzmy przemieszczenia w jeden wektor (dodajemy u1=0 i u2=0 do wyników):

```
>>U=[0;0;u]
```

a potem wyliczmy siły:

```
>>F=K*U
```

otrzymamy: F1 = -10.77; F2 = -9.23; F3 = 0.0; F4 = 0.0 i F5 = 20.00. Zatem reakcja w podporze lewej (węzeł 1) wynosi 10.77kN i jest skierowana przeciwnie do zwrotu osi x (w lewo, znak ujemny), a w podporze prawej (węzeł 2) jest równa 9.23kN i też jest skierowana w lewo (znak ujemny).

Siły w elementach wyznaczymy analogicznie do poprzedniego przykładu dzięki funkcji `SilyElementSprezynowy(k,u)`, której parametrami są: macierz sztywności elementu (od k1 do k6) oraz przemieszczenia węzłów definiujących poszczególne elementy (w parach):
pary przemieszczeń dla każdego elementu:

```
>>u1=[U(1);U(3)]
>>u2=[U(3);U(4)]
>>u3=[U(3);U(5)]
>>u4=[U(3);U(5)]
>>u5=[U(5);U(4)]
>>u6=[U(4);U(2)]
```

a potem wyznaczymy siły:

```
>>f1=SilyElementSprezynowy(k1,u1)
>>f2=SilyElementSprezynowy(k2,u2)
>>f3=SilyElementSprezynowy(k3,u3)
>>f4=SilyElementSprezynowy(k4,u4)
>>f5=SilyElementSprezynowy(k5,u5)
>>f6=SilyElementSprezynowy(k6,u6)
```

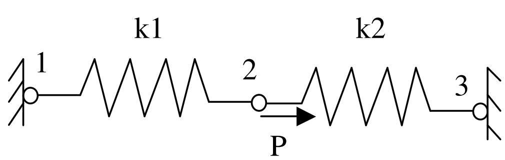
Który element przenosi największe obciążenie, a który najmniejsze?

Zadania do samodzielnego rozwiązania:

Zadanie nr 1.

Dla układu jak na rysunku poniżej, mając sztywności sprężyn: k1=200kN/m i k2=250kN/m oraz siłę P=10kN, wyznaczyć:

1. macierz sztywności układu
2. przemieszczenie węzła nr 2
3. reakcje w węzłach 1 i 3
4. siłę w każdym elemencie (sprężynie)



Zadanie nr 2.

Dla układu jak na rysunku poniżej, mając jednakowe sztywności sprężyn: k=170kN/m oraz siłę P=25kN, wyznaczyć:

1. macierz sztywności układu
2. przemieszczenie węzłów nr 2, 3 i 4
3. reakcję w węźle 1
4. siłę w każdym elemencie (sprężynie)