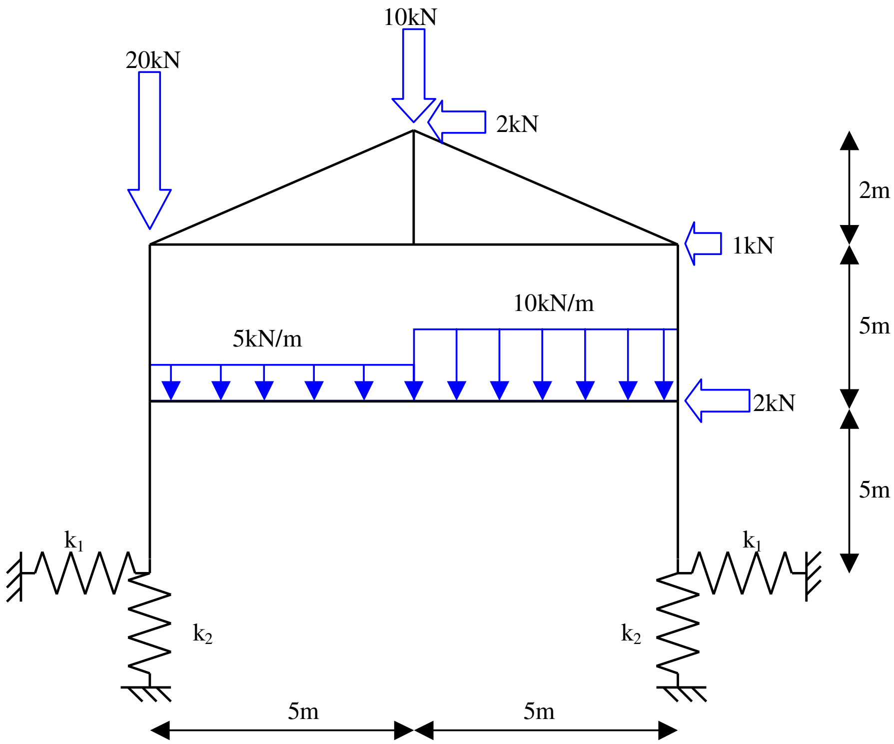
Dr inż. Piotr Srokosz

Metody Informatyczne w Budownictwie
Metoda Elementów Skończonych

ZADANIE NR 1

Wyznaczyć wektor sił i przemieszczeń węzłowych dla układu elementów przedstawionego na rysunku poniżej (rysunek nie jest w skali!).



Rysunek 1

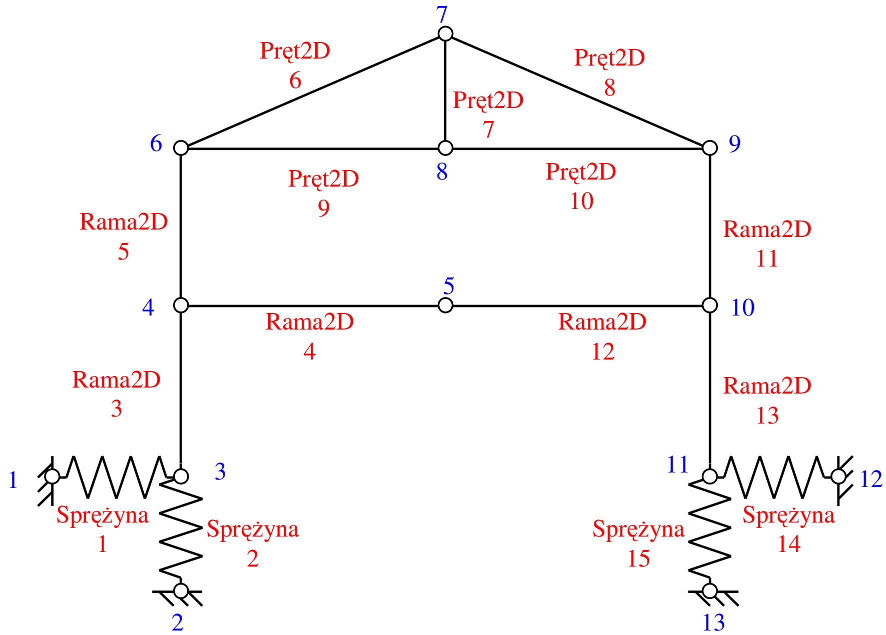
Proszę dobrać elementy dyskretyzujące układ mając do dyspozycji następujące parametry geometryczne i materiałowe:

- sztywność sprężyn: $k_1 = 1000$ kN/m, $k_2 = 500$ kN/m
- moduł sprężystości: $E = 8 \cdot 10^7$ kPa
- pole przekroju poprzecznego: $A = 0.01\text{m}^2$
- moment bezwładności: $I = 10^{-5}$ m^4

ROZWIĄZANIE

Krok 1 – dyskretyzacja zadania

Układ należy podzielić na elementy i węzły. Można to zrobić na kilka sposobów, przy czym należy pamiętać, że od dyskretyzacji będą uzależnione wyniki! Przykład dyskretyzacji przedstawia rysunek 2. Kolorem niebieskim zaznaczono numerację węzłów, a kolorem czerwonym – numerację i rodzaje elementów przypisanych poszczególnym fragmentom zdykretyzowanego układu.



Rysunek 2

Krok 2 – utworzenie macierzy sztywności dla każdego elementu

Mamy 4 elementy sprężynowe, 6 elementów typu rama2D oraz 5 elementów typu pręt2D. Cztery macierze sztywności sprężyn: k1, k2, k14 i k15 utworzymy komendami:

```
>>k1=SztywnoscElementSprezynowy(1000)
>>k2=SztywnoscElementSprezynowy(500)
>>k14=SztywnoscElementSprezynowy(1000)
>>k15=SztywnoscElementSprezynowy(500)
```

Sześć macierzy sztywności ram2D: k3, k4, k5, k11, k12 i k13 wymaga zdefiniowania ich charakterystyk geometryczno-materiałowych, tj:

```
>>E=8E7;
>>A=0.01;
>>I=1E-5;
>>L3=5;
>>theta3=90;
>>L4=5;
>>theta4=0;
>>L5=5;
>>theta5=90;
>>L11=5;
>>theta11=270;
>>L12=5;
>>theta12=0;
>>L13=5;
>>theta13=270;
```

po czym można przystąpić do utworzenia macierzy elementów komendami:

```
>>k3=SztywnoscElementRamowy2D(E,A,I,L3,theta3)
>>k4=SztywnoscElementRamowy2D(E,A,I,L4,theta4)
>>k5=SztywnoscElementRamowy2D(E,A,I,L5,theta5)
>>k11=SztywnoscElementRamowy2D(E,A,I,L11,theta11)
>>k12=SztywnoscElementRamowy2D(E,A,I,L12,theta12)
>>k13=SztywnoscElementRamowy2D(E,A,I,L13,theta13)
```

ostatnie pięć macierzy elementowych dla prętów2D: k6, k7, k8, k9 i k10 powstanie w wyniku wykonania czynności związanych z:
- deklaracją charakterystyk geometrycznych elementów:

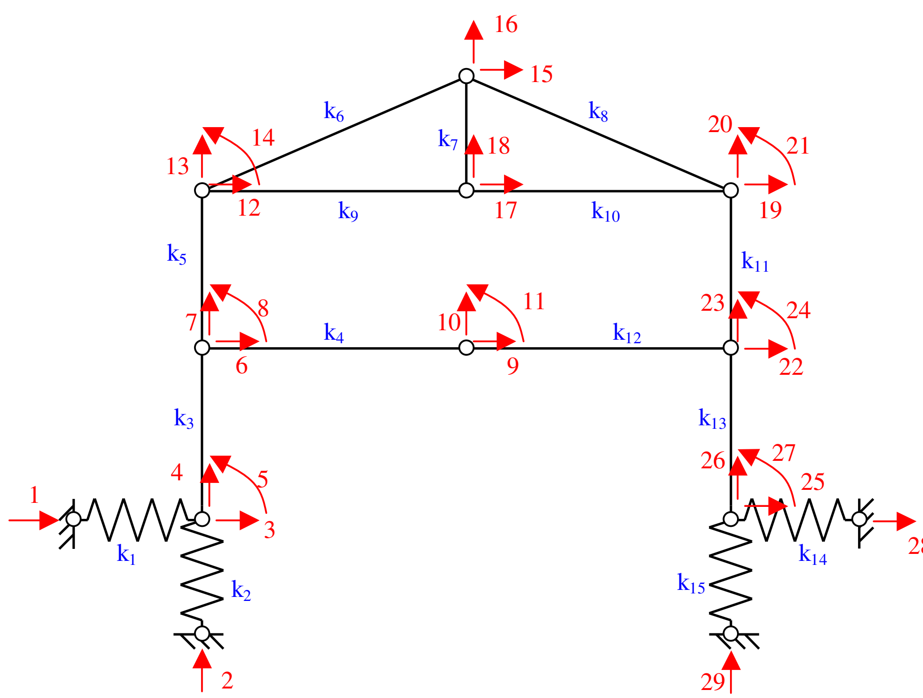
```
>>[L6 theta6]=DlugoscKatElementPretowy2D(0,10,5,12);
>>L7=2;
>>theta7=270;
>>[L8 theta8]=DlugoscKatElementPretowy2D(5,12,10,10);
>>L9=5;
>>theta9=0;
>>L10=5;
>>theta10=0;
```

- budową sztywności elementów:

```
>>k6=SztywnoscElementPretowy2D(E,A,L6,theta6)
>>k7=SztywnoscElementPretowy2D(E,A,L7,theta7)
>>k8=SztywnoscElementPretowy2D(E,A,L8,theta8)
>>k9=SztywnoscElementPretowy2D(E,A,L9,theta9)
>>k10=SztywnoscElementPretowy2D(E,A,L10,theta10)
```

Krok 3 – składanie macierzy sztywności elementów w jedną globalną macierz dla całego układu

Aby poprawnie poskładać macierze elementów k_i (i=1,2,3,...,15) w jedną globalną macierz sztywności K, należy ustalić liczbę wszystkich stopni swobody w naszym zdyskretyzowanym układzie. Numerację stopni swobody przedstawia rysunek 3. Należy pamiętać o generalnej zasadzie, że jeśli w węźle łączą się różne elementy, to muszą być w nim dopasowane stopniami swobody.



Rysunek 3

Ponieważ w układzie mamy 29 stopni swobody, globalna macierz sztywności będzie miała wymiar 29x29. Macierz K należy przed składaniem wyzerować, co wykonujemy komendą:

```
>>K=zeros(29,29)
```

Ponieważ mamy 15 elementów, to funkcje składania sztywności należy wywołać aż 15 razy, uważając na liczbę oraz numery stopni swobody składanego elementu. Mamy do dyspozycji trzy funkcje składania sztywności: `ZlozSztywnosc1S` dla elementów z 1 stopniem swobody w węźle (sprężyna), `ZlozSztywnosc2S` dla elementów z 2 stopniami swobody w węźle (pręt2D) i `ZlozSztywnosc3S` dla elementów z 3 stopniami swobody w węźle (rama2D). Każdą z tych funkcji należy wywołać tyle razy, ile danych elementów jest w układzie podając jako parametry globalną macierz K (która jest wynikiem), macierz elementu k_i (i=1,2,3,...,15) i **numery stopni swobody** definiujące dany element (<u>najpierw w węźle o niższym numerze, a potem w węźle o wyższym numerze</u>):

- najpierw 4 sprężyny (proszę porównać z rysunkiem nr 3)

```
>>K=ZlozSztywnosc1S(K,k1,1,3)
>>K=ZlozSztywnosc1S(K,k2,2,4)
>>K=ZlozSztywnosc1S(K,k14,25,28)
>>K=ZlozSztywnosc1S(K,k15,26,29)
```

- potem 6 ram

```
>>K=ZlozSztywnosc3S(K,k3,3,4,5,6,7,8)
>>K=ZlozSztywnosc3S(K,k4,6,7,8,9,10,11)
>>K=ZlozSztywnosc3S(K,k5,6,7,8,12,13,14)
>>K=ZlozSztywnosc3S(K,k11,19,20,21,22,23,24)
>>K=ZlozSztywnosc3S(K,k12,9,10,11,22,23,24)
>>K=ZlozSztywnosc3S(K,k13,22,23,24,25,26,27)
```

- i na końcu 5 prętów

```
>>K=ZlozSztywnosc2S(K,k6,12,13,15,16)
>>K=ZlozSztywnosc2S(K,k7,15,16,17,18)
>>K=ZlozSztywnosc2S(K,k8,15,16,19,20)
>>K=ZlozSztywnosc2S(K,k9,12,13,17,18)
>>K=ZlozSztywnosc2S(K,k10,17,18,19,20)
```

Na odpowiednich miejscach w macierzy K pojawią się sumowane sztywności poszczególnych elementów.

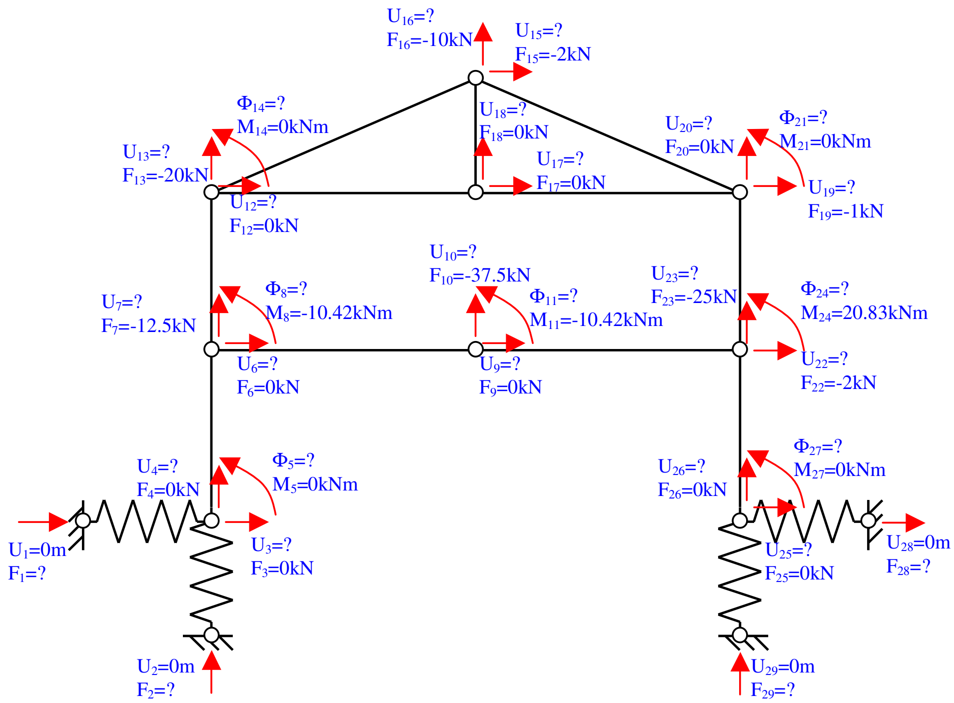
Krok 4 – uwzględnienie warunków brzegowych

Warunkami brzegowymi w naszym zadaniu są:

- znane przemieszczenia węzłów nr 1, 2, 12 i 13 – podpory unieruchamiają następujące stopnie swobody: 1, 2, 28 i 29, tj. U1 = U2 = U28 = U29 = 0 (stosujemy wielkie litery U, F, Φ i M, bo pracujemy na stopniach swobody!)
- znane obciążenia w pozostałych stopniach swobody (zobacz rysunek 4 i 5):

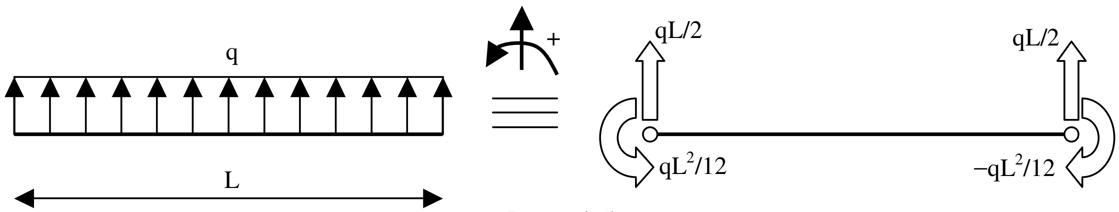
$$\begin{cases} F_3 = 0\text{kN} \\ F_4 = 0\text{kN} \\ F_5 = M_5 = 0\text{kNm} \\ F_6 = 0\text{kN} \\ F_7 = q_1 \cdot L/2 = -5 \cdot 5/2 = -12.5\text{kN} \\ F_8 = M_8 = q_1 \cdot L^2/12 = -5 \cdot 5^2/12 = -10.42\text{kNm} \\ F_9 = 0\text{kN} \end{cases}$$

$$
\begin{cases}
F_{10} = q_1 \cdot L/2 + q_2 \cdot L/2 = -5 \cdot 5/2 - 10 \cdot 5/2 = -37.5\text{kN} \\
F_{11} = -q_1 \cdot L^2/12 + q_2 \cdot L^2/12 = --5 \cdot 5^2/12 - 10 \cdot 5^2/12 = -10.42\text{kNm} \\
F_{12} = 0\text{kN} \\
F_{13} = -20\text{kN} \\
F_{14} = M_{14} = 0\text{kNm} \\
F_{15} = -2\text{kN} \\
F_{16} = -10\text{kN} \\
F_{17} = 0\text{kN} \\
F_{18} = 0\text{kN} \\
F_{19} = -1\text{kN} \\
F_{20} = 0\text{kN} \\
F_{21} = M_{21} = 0\text{kNm} \\
F_{22} = -2\text{kN} \\
F_{23} = q_2 \cdot L/2 = -10 \cdot 5/2 = -25\text{kN} \\
F_{24} = M_{23} = -q_2 \cdot L^2/12 = --10 \cdot 5^2/12 = 20.83\text{kNm} \\
F_{25} = 0\text{kN} \\
F_{26} = 0\text{kN} \\
F_{27} = M_{27} = 0\text{kNm}
\end{cases}
$$



Rysunek 4

Ponieważ obciążenie równomiernie rozłożone q musi zostać zamienione na ekwiwalentne obciążenia węzłowe F i M, stosujemy dobrze znany schemat obliczeń, przedstawiony na rysunku 5 (proszę zwrócić uwagę na konwencję znaków przy wartościach momentów i sił skupionych!).



Rysunek 5

Powyższy układ obciążeń wprowadzamy w postaci globalnego wektora F (ma 29 pozycji, tyle ile stopni swobody w układzie):
- zerowanie całego wektora (nie trzeba będzie wprowadzać zerowych obciążeń)

```
>>F=zeros(29,1);
```

- wprowadzamy siły skupione

```
>>F(13)=-20;
>>F(15)=-2;
>>F(16)=-10;
>>F(19)=-1;
>>F(22)=-2;
```

- wprowadzamy obciążenia ekwiwalentne (dobrym zwyczajem jest pozwolić programowi na wyliczenie wartości niż wklepywać zaokrąglone, a więc niedokładne, liczby)

```
>>F(7)=-5*5/2;
>>F(8)=-5*5*5/12;
>>F(10)=-5*5/2-10*5/2;
>>F(11)=5*5*5/12-10*5*5/12;
>>F(23)=-10*5/2;
>>F(24)=10*5*5/12;
```

Uwzględniając wiadome przemieszczenia, układ równań redukuje się z 29 do 25 równań. Wycinamy z macierzy K kolumny i wiersze odpowiadające unieruchomionym stopniom swobody, tj. 1,2,28 i 29 (kopiujemy zatem wiersze i kolumny „z wnętrza” macierzy K: od 3 do 27):

```
>>k=K(3:27,3:27);
```

to samo robimy z wektorem obciążeń (nie znamy przecież reakcji F1, F2, F28 i F29)

```
>>f=F(3:27);
```

Krok 5 – rozwiązanie równań

Wyliczamy nieznane przemieszczenia poleceniem (eliminacja Gaussa):

```
>>u=k\f
```

i otrzymujemy w wyniku przemieszczenia i rotacje dla stopni swobody od 3 do 27:

```
u =

   -0.0078
   -0.1213
    0.1268
   -0.4388
   -0.1217
    0.0050
   -0.4388
```

```
   -0.4901
   -0.0338
   -0.8230
   -0.1218
    0.1128
   -0.8295
   -0.1058
   -0.8230
   -0.1058
   -0.8229
   -0.0890
    0.0565
   -0.4388
   -0.0890
    0.1175
    0.0028
   -0.0887
    0.0737
```

(przemieszczenia są w [m] a rotacje w [rad]).

Krok 6 – obróbka wyników (postprocessing)

Mając przemieszczenia wszystkich węzłów, możemy obliczyć reakcje w podporach. Najpierw zbierzmy przemieszczenia w jeden wektor (dodajemy znane przemieszczenia do wyników):

```
>>U=[0;0;u;0;0]
```

a potem wyliczmy siły:

```
>>F=K*U
```

otrzymamy w wyniku komplet obciążeń węzłowych:

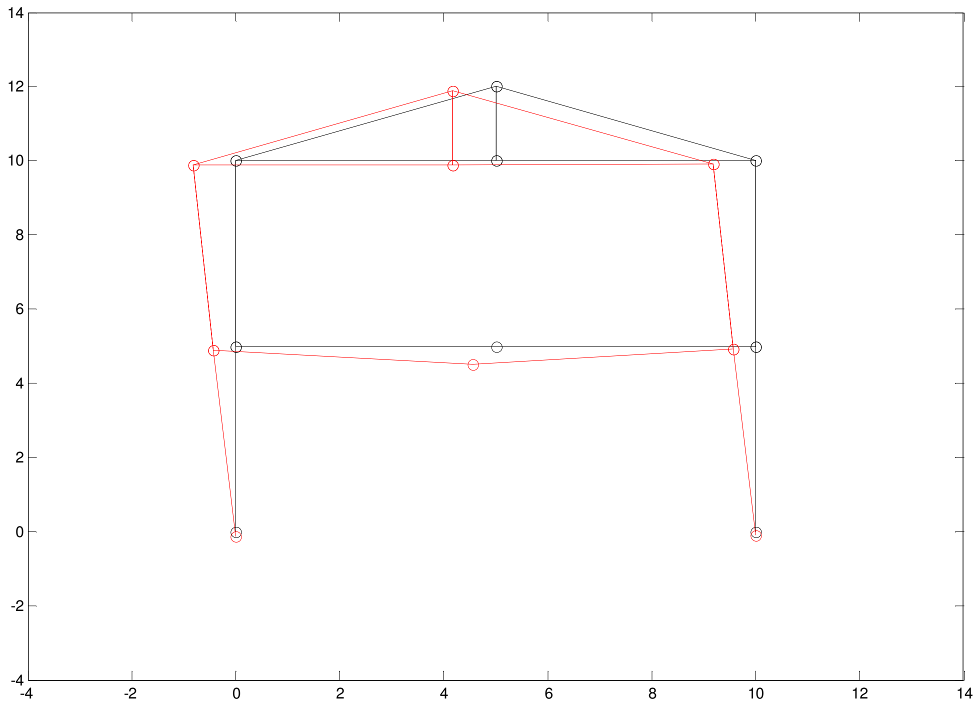
```
F =

    7.7986
   60.6500
   -0.0000
    0.0000
   -0.0000
   -0.0000
  -12.5000
  -10.4167
   -0.0000
  -37.5000
  -10.4167
   -0.0000
  -20.0000
    0.0000
   -2.0000
  -10.0000
   -0.0000
    0.0000
   -1.0000
   -0.0000
   -0.0000
   -2.0000
  -25.0000
   20.8333
    0.0000
```

```
 0.0000
-0.0000
-2.7986
44.3500
```

(siły są w [kN] a momenty w [kNm]).

Zatem, reakcje wynoszą: F_1 = 7.7986kN; F_2 = 60.6500kN, F_{28} = -2.7986kN i F_{29} = 44.3500kN. Odkształcony układ został przedstawiony na rysunku 6.



Rysunek 6

ZADANIE NR 2

Zaproponować modyfikację układu konstrukcyjnego z zadania poprzedniego, dzięki której zmniejszeniu ulegną przemieszczenia poziome.

ROZWIĄZANIE

Jednym z najprostszych rozwiązań jest zablokowanie możliwości obrotu elementów nr 3 i 13 w węzłach nr 3 i 11 – zatem o ile możliwe będą ograniczone przemieszczenia poziome i pionowe w tych węzłach (sprężynki, czyli podatne podłoże gruntowe), o tyle połączenia nie będą miały przegubów.

Krok 1 – dyskretyzacja zadania

Układ może być podzielony na elementy i węzły tak jak w zadaniu poprzednim - zobacz rysunek 2 – łatwiejsze będzie porównanie uzyskanych wyników.

Krok 2 – utworzenie macierzy sztywności dla każdego elementu

Ponieważ pracujemy na tym samym zdyskretyzowanym układzie, komendy są identyczne jak w kroku nr 2 w zadaniu poprzednim. Jeśli zadanie to rozwiązujemy bezpośrednio po zadaniu 1, to w pamięci Matlaba są już zadeklarowane macierze sztywności wszystkich elementów i nie trzeba już ich drugi raz obliczać.

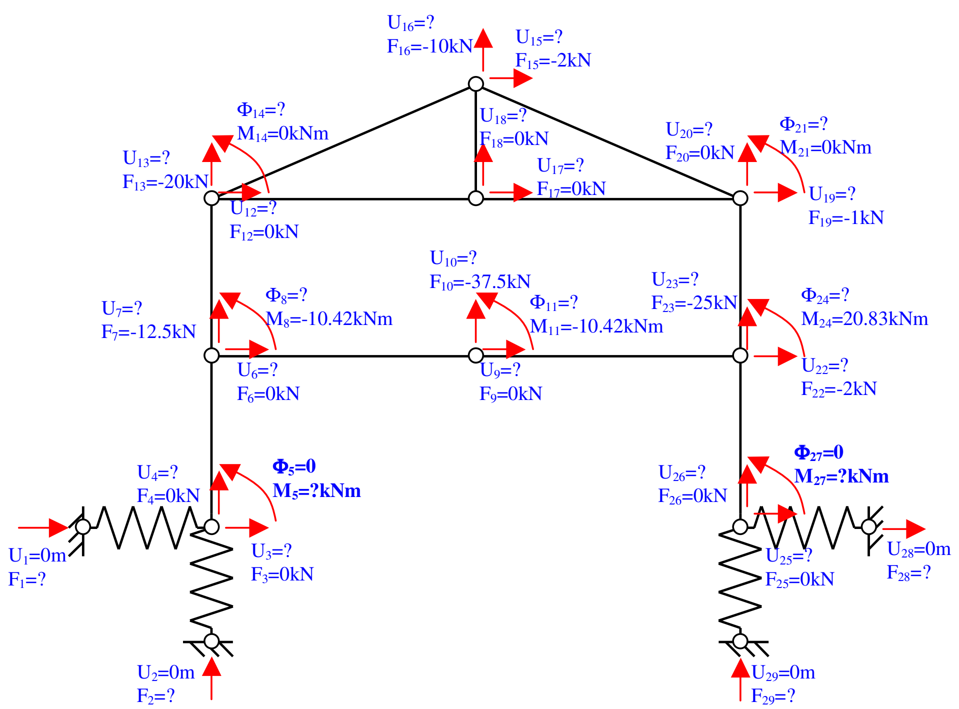
Krok 3 – składanie macierzy sztywności elementów w jedną globalną macierz dla całego układu

Komentarz jest taki sam jak w kroku 2.

Krok 4 – uwzględnienie warunków brzegowych

Warunkami brzegowymi w naszym zadaniu są:

- znane przemieszczenia węzłów nr 1, 2, 12 i 13 – podpory unieruchamiają następujące stopnie swobody: 1, 2, 28 i 29, tj. U1 = U2 = U28 = U29 = 0, a do tego dochodzą jeszcze blokady rotacji w węzłach nr 3 i 11, tj. stopnie swobody: U5 = Φ5 = U27 = Φ27 = 0 (zobacz rysunek 7, proszę zwrócić uwagę, że wygodniej jest operować tylko jednym wektorem U, niż dwoma U i Φ i dlatego rotacje w obliczeniach też zapiszemy jako U; ta sama uwaga dotyczy wektora obciążeń węzłowych F i M – stosujemy oznaczenie wspólne: F)
- znane obciążenia w pozostałych stopniach swobody – tak jak w zadaniu poprzednim (zobacz rysunek 7):



Rysunek 7

Powyższy układ obciążeń wprowadzamy w postaci globalnego wektora F (ma 29 pozycji, tyle ile stopni swobody w układzie):

- zerowanie całego wektora (zerujemy poprzednie wyniki)

```
>>F=zeros(29,1);
```

- wprowadzamy siły skupione

```
>>F(13)=-20;
```

```
>>F(15)=-2;
>>F(16)=-10;
>>F(19)=-1;
>>F(22)=-2;
```

- wprowadzamy obciążenia ekwiwalentne

```
>>F(7)=-5*5/2;
>>F(8)=-5*5*5/12;
>>F(10)=-5*5/2-10*5/2;
>>F(11)=5*5*5/12-10*5*5/12;
>>F(23)=-10*5/2;
>>F(24)=10*5*5/12;
```

Uwzględniając wiadome przemieszczenia i rotacje, układ równań redukuje się z 29 do 23 równań (4 znane przemieszczenia i 2 rotacje). Wycinamy z macierzy K kolumny i wiersze odpowiadające unieruchomionym stopniom swobody, tj. 1, 2, 5, 27, 28 i 29 (kopiujemy zatem wiersze i kolumny „z wnętrza" macierzy K: od 3 do 4 i od 6 do 26):

```
>>k=[K(3:4,3:4) K(3:4,6:26); K(6:26,3:4) K(6:26,6:26)];
```

to samo robimy z wektorem obciążeń (nie znamy przecież reakcji F1, F2, F5=M5, F26=M26, F27 i F28)

```
>>f=[F(3:4);F(6:26)];
```

Krok 5 – rozwiązanie równań

Wyliczamy nieznane przemieszczenia poleceniem (eliminacja Gaussa):

```
>>u=k\f
```

i otrzymujemy w wyniku przemieszczenia i rotacje dla stopni swobody od 3 do 4 i od 6 do 26:

```
u =

   -0.0114
   -0.1165
   -0.1236
   -0.1169
   -0.0147
   -0.1236
   -0.4749
   -0.0224
   -0.3789
   -0.1171
    0.0840
   -0.3835
   -0.1058
   -0.3789
   -0.1058
   -0.3788
   -0.0938
    0.0338
   -0.1237
   -0.0938
    0.0856
    0.0064
   -0.0935
```

(przemieszczenia są w [m] a rotacje w [rad]).

Krok 6 – obróbka wyników (postprocessing)
Mając przemieszczenia wszystkich węzłów, możemy obliczyć reakcje w podporach. Najpierw zbierzmy przemieszczenia w jeden wektor (dodajemy znane przemieszczenia do wyników – zera na pozycjach 1, 2, 5, 27, 28 i 29):

```
>>U=[0;0;u(1:2);0;u(3:23);0;0;0]
```

a potem wyliczmy siły:

```
>>F=K*U
```

otrzymamy w wyniku komplet obciążeń węzłowych:

```
F =

   11.4431
   58.2663
   -0.0000
    0.0000
  -26.2490
   -0.0000
  -12.5000
  -10.4167
    0.0000
  -37.5000
  -10.4167
    0.0000
  -20.0000
   -0.0000
   -2.0000
  -10.0000
    0.0000
    0.0000
   -1.0000
    0.0000
   -0.0000
   -2.0000
  -25.0000
   20.8333
    0.0000
   -0.0000
    2.4125
   -6.4431
   46.7337
```

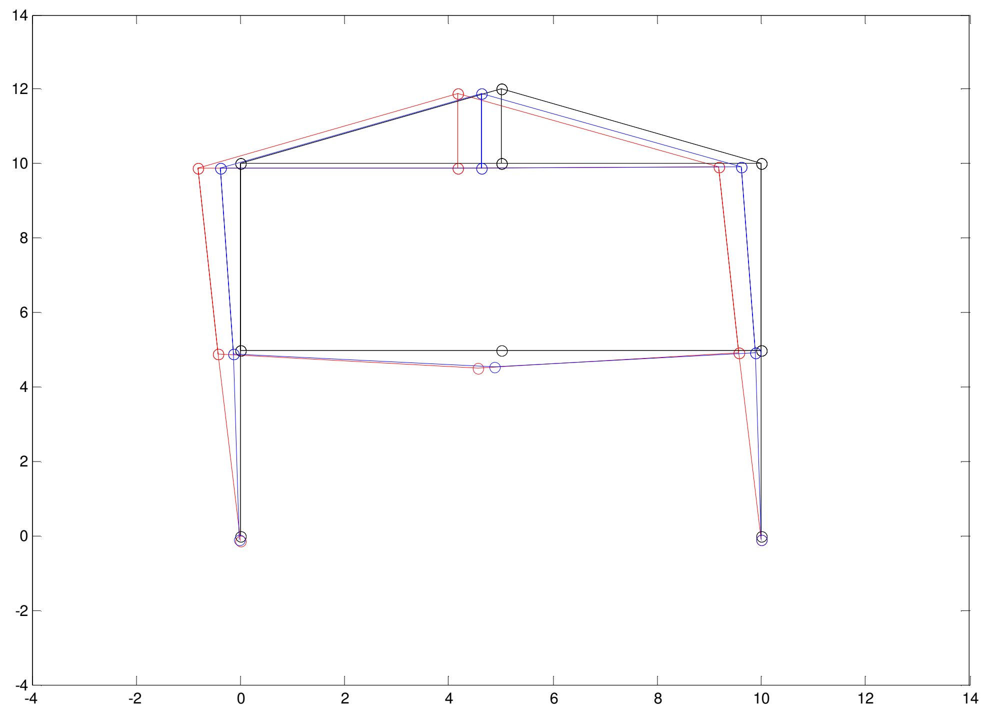
(siły są w [kN] a momenty w [kNm]).

Zatem, reakcje wynoszą: F_1 = 11.4431kN; F_2 = 58.2663kN, $F_5 = M_5$ = -26.2490kNm, $F_{27} = M_{27}$ = 2.4125kNm, F_{28} = -6.4431kN i F_{29} = 46.7337kN.
Głównym celem modyfikacji zadania, było zmniejszenie przemieszczeń poziomych układu, które zestawiono w tabeli poniżej, zaznaczając je kolorem czerwonym.

Stopień Swobody	**Zadanie 1**	**Zadanie2**
1	0	0
2	0	0
3	**-0.0078**	**-0.0114**
4	-0.1213	-0.1165

5	0.1268	0
6	-0.4388	-0.1236
7	-0.1217	-0.1169
8	0.0050	-0.0147
9	-0.4388	-0.1236
10	-0.4901	-0.4749
11	-0.0338	-0.0224
12	-0.8230	-0.3789
13	-0.1218	-0.1171
14	0.1128	0.0840
15	-0.8295	-0.3835
16	-0.1058	-0.1058
17	-0.8230	-0.3789
18	-0.1058	-0.1058
19	-0.8229	-0.3788
20	-0.0890	-0.0938
21	0.0565	0.0338
22	-0.4388	-0.1237
23	-0.0890	-0.0938
24	0.1175	0.0856
25	**0.0028**	**0.0064**
26	-0.0887	-0.0935
27	0.0737	0
28	0	0
29	0	0

Z wyjątkiem dwóch stopni swobody, zaznaczonych w tabeli powyżej pogrubioną czcionką, wszystkie przemieszczenia poziome są ponad dwukrotnie mniejsze po modyfikacji układu. Porównanie odkształconych układów przedstawiono na rysunku 8 (kolorem niebieskim zaznaczono wyniki z zadania nr 2).



Rysunek 8

KONIEC