Uniwersytet Warmińsko- Mazurski w Olsztynie
Zakład Mechaniki i Konstrukcji Budowlanych

ELEMENTY RACHUNKU WEKTOROWEGO

– Wykłady –

dr inż. Robert Szmit

Zalecana literatura

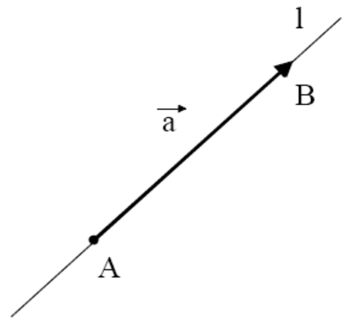
1. **Kwiatkowski J.: „Statyka ogólna”.** Warszawa : Wydaw. Politechniki Warszawskiej, 1971.
2. **Kwiatkowski J.: „Mechanika techniczna”.** Warszawa: Wydaw. Politechniki Warszawskiej, 1976.
3. **Nagórski R., Szcześniak W.: „Zbiór zadań z mechaniki ogólnej”.** Oficyna Politechniki Warszawskiej, 1993.
4. **Wiśniakowski P.: „Mechanika teoretyczna”.** Oficyna Politechniki Warszawskiej, 2001
5. **Misiak J.: „Mechanika ogólna. t.1 Statyka i kinematyka”,** WNT, 2006.
6. **Leyko J.: „Mechanika ogólna**. T. 1. Statyka i kinematyka, T. 2. Dynamika”, Warszawa, PWN 1996.
7. **Osiński Z., „Mechanika ogólna**. Część I i II”, Warszawa, PWN 1987.

1. PODSTAWOWE POJĘCIA

Skalarem – nazywamy wielkość fizyczną, która jest całkowicie charakteryzowana jedną liczbą (np. temperatura, ciśnienie, masa, pole, energia…).

Wektorem – nazywamy odcinek, na którym wyróżniono początek i koniec. $\overrightarrow{AB}$, $\vec{a}$

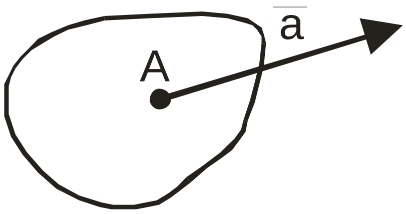
- ***Cechy wektora:***
  - a) długość (wartość bezwzględna, moduł); $|\vec{a}|$, $|\overrightarrow{AB}|$
  - b) kierunek, tj. prosta na której wektor leży;
  - c) zwrot;
  - d) punkt przyłożenia.



W zależności od potrzeb wektory klasyfikujemy w 3-ech grupach:

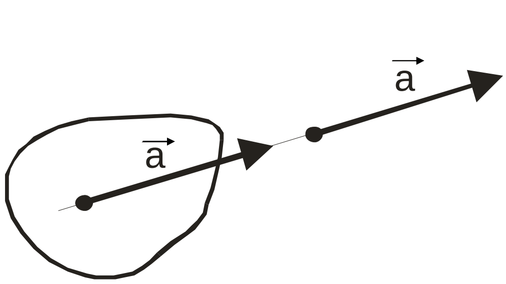
1. Wektor uczepiony

– czyli związany z konkretnym punktem (posiada cechy a, b, c, d);



2. Wektor ślizgający się

– związany z określoną prostą w przestrzeni, lecz bez konkretnego punktu zaczepienia; (posiada cechy a, b, c).



3. Wektor swobodny

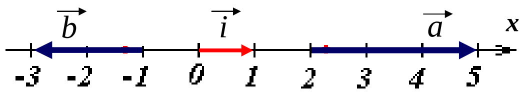
- wektor taki posiada określony kierunek, zwrot, natomiast nie posiada konkretnego punktu zaczepienia. Pozostaje stale równoległy do określonej prostej w przestrzeni;

(posiada cechy a, b, c).

Często ma zastosowanie w rozważaniach teoretycznych.

2. WEKTOR I OŚ

Osią - nazywamy prostą na której został ustalony zwrot, punkt ***O*** zwany zerowym oraz ustalono odcinek jednostkowy.



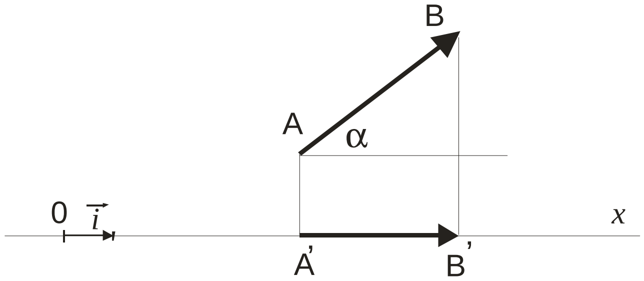
Wersorem osi *x* - nazywamy wektor współliniowy z tą osią, posiadający długość jednostkową i zwrot zgodny z dodatnim zwrotem osi.

Liczby 3, -2, … itd. nazywamy *miarami wektora względem osi.*

Miarą wektora $\vec{a}$ względem osi $\boldsymbol{x}$ nazywamy liczbę wyrażającą długość wektora wyrażoną w przyjętych jednostkach, przy czym liczba ta jest dodatnia kiedy zwrot wektora jest zgodny ze zwrotem osi, a ujemna kiedy zwrot wektora jest przeciwny do zwrotu osi.

$$\vec{a} = 3 \cdot \vec{i} \qquad \vec{b} = -2 \cdot \vec{i}$$

Analityczny zapis wektora jak z powyższych zapisów wynika otrzymujemy mnożąc miarę wektora względem osi przez wersor tej osi.



$\overrightarrow{A'B'} = rz_x \overrightarrow{AB}$ - wektor $\overrightarrow{A'B'}$ jest rzutem wektora $\overrightarrow{AB}$ na oś x.

Jeśli długość wektora $\overrightarrow{AB}$ wynosi $|\overrightarrow{AB}|$, to **miara rzutu wektora** względem osi $\boldsymbol{x}$ będzie iloczynem $\overrightarrow{AB} \cdot \cos\alpha$.

$$mrz_x \overrightarrow{AB} = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \cos\alpha$$

$$\overrightarrow{A'B'} = mrz_x \overrightarrow{AB} \cdot \vec{i}$$

$$\overrightarrow{A'B'} = rz_x \overrightarrow{AB} = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \cos\alpha \cdot \vec{i}$$

albo

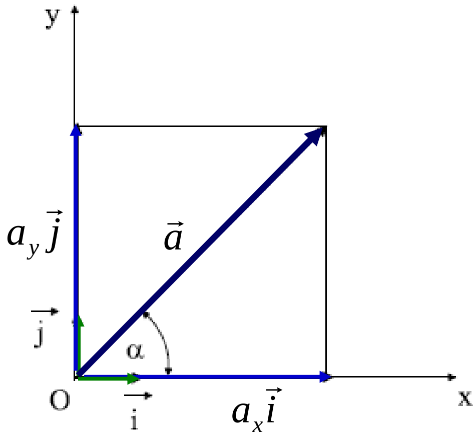
Krótsze oznaczenia miary rzutu na oś:

$mrz_x \overrightarrow{AB} = AB_x$ - na oś $\boldsymbol{x}$

$mrz_y \overrightarrow{AB} = AB_y$ - na oś $\boldsymbol{y}$

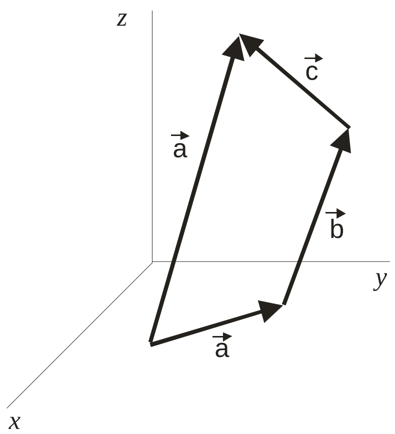
$mrz_z \overrightarrow{AB} = AB_z$ - na oś $\boldsymbol{z}$

$$rz_x\vec{a} = a_x \cdot \vec{i}$$
$$rz_y\vec{a} = a_y \cdot \vec{j}$$
$$rz_z\vec{a} = a_z \cdot \vec{k}$$



3. DODAWANIE WEKTORÓW

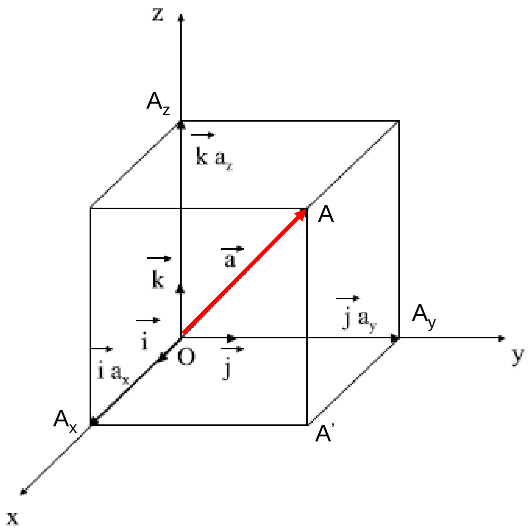
Załóżmy, że mamy wybrany w przestrzeni pewien *kartezjański (prostokątny) układ współrzędnych Oxyz*, tj. układ trzech wzajemnie prostopadłych osi *Ox*, *Oy* i *Oz*.



$$\vec{w} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$

Sumą wektorów $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}...$ nazywamy wektor o początku w początku pierwszego wektora i końcu w końcu ostatniego wektora po uporządkowaniu ich w ten sposób, że początek następnego wektora pokrywa się z końcem poprzedniego.

3.1. Analityczny zapis wektora swobodnego



$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_x} + \overrightarrow{OA_y} + \overrightarrow{OA_z}$$

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - wersory osi $\boldsymbol{x, y, z}$.

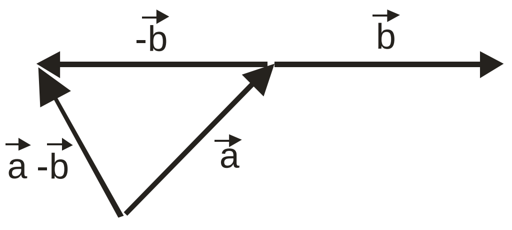
Niech liczby a_x , a_y , a_z oznaczają miary rzutów wektora $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ na osie ***x, y, z***.

$$\boxed{\overrightarrow{OA} = \vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}}$$

4. ODEJMOWANIE WEKTORÓW

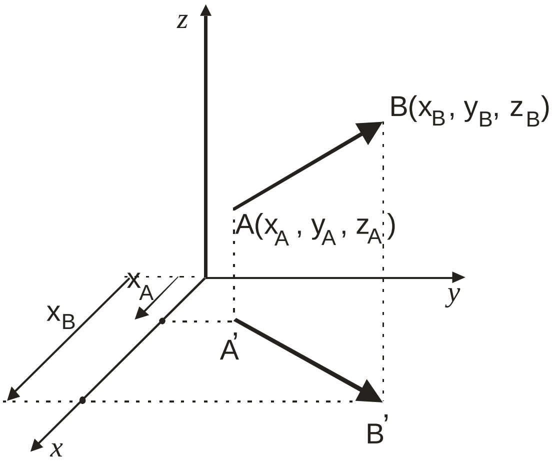
Wektorem przeciwnym do wektora $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ nazywamy wektor $-\vec{a} = -a_x\vec{i} - a_y\vec{j} - a_z\vec{k}$

Różnicą wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nazywamy sumę wektorów $\vec{a}$ i wektora przeciwnego do wektora $\vec{b}$, tj. $-\vec{b}$.



$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$

4.1. Analityczny zapis wektora uczepionego



$AB_x = x_B - x_A$
$AB_y = y_B - y_A$
$AB_z = z_B - z_A$

Analityczny zapis wektora o danych współrzędnych jego początku i końca wyraża się wzorem:

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\cdot\vec{i} + (y_B - y_A)\cdot\vec{j} + (z_B - z_A)\cdot\vec{k}$$

5. MNOŻENIE SKALARNE WEKTORÓW

Iloczyn skalarny dwóch wektorów jest skalarem i wyraża się wzorem:

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\vec{a},\vec{b})} \qquad (1^*)$$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ wtedy, gdy wektor $\vec{a}\perp\vec{b}$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = mrz_{\vec{a}}\vec{b}\cdot|\vec{a}| \quad\Rightarrow\quad mrz_{\vec{a}}\vec{b} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = mrz_{\vec{b}}\vec{a}\cdot|\vec{b}| \quad\Rightarrow\quad mrz_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}$$

Jeżeli wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ dane są w zapisie analitycznym

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$
$$\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$$

to wykazać można, że iloczyn skalarny wyraża się wzorem:

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x\cdot b_x + a_y\cdot b_y + a_z\cdot b_z} \qquad (2^*)$$

5.1. Kąt między wektorami

Ze wzoru (1*) wynika, że

$$\cos(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{a_x\cdot b_x + a_y\cdot b_y + a_z\cdot b_z}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$$

gdzie:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \quad ; \quad |\vec{b}| = \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}$$

6. ILOCZYN WEKTOROWY DWÓCH WEKTORÓW

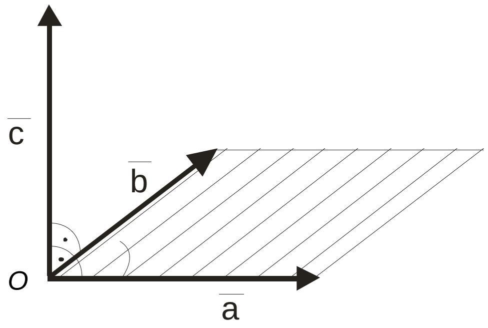
Iloczynem wektorowym wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nazywamy taki wektor $\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b}$, który:

1) ma długość równą iloczynowi długości obu wektorów i sinusa kąta między nimi zawartego

$$|\vec{c}| = |\vec{a}\times\vec{b}| = \vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\sin(\vec{a},\vec{b})$$

2) jest prostopadły do obu wektorów: $\vec{c}\perp\vec{a}$ i $\vec{c}\perp\vec{b}$

3) zwrot wektora wyznacza ruch postępowy śruby prawoskrętnej przy obrocie o najmniejszy kąt od wektora $\vec{a}$ do wektora $\vec{b}$ (obrót ten jest prawy).



$$|\vec{c}| = polu\ zakreskowanemu$$

$$\vec{b} \times \vec{a} \neq \vec{a} \times \vec{b}$$

$$\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$$

- wynika to z niezmienności 1) i 2) cechy definicyjnej wektora $\vec{c}$

Iloczyn wektorowy dwóch wektorów równoległych jest równy zero – wynika to z pierwszej cechy definicyjnej.

Wykazać można, że jeżeli wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ zapisane są analitycznie:

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$

$$\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$$

to analitycznie:

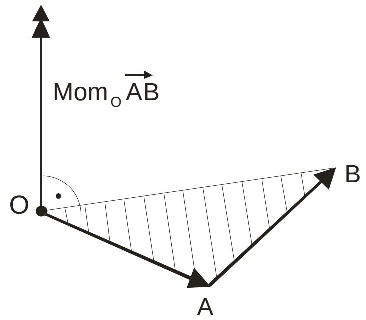
$$\vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

albo:

$$\vec{c} = \underbrace{(a_y b_z - b_y a_z)}_{c_x} \cdot \vec{i} - \underbrace{(a_x b_z - b_x a_z)}_{c_y} \cdot \vec{j} + \underbrace{(a_x b_y - b_x a_y)}_{c_x} \cdot \vec{k} =$$

$$= c_x \cdot \vec{i} + c_y \cdot \vec{j} + c_z \cdot \vec{k}$$

7. MOMENT WEKTORA WZGLĘDEM PUNKTU



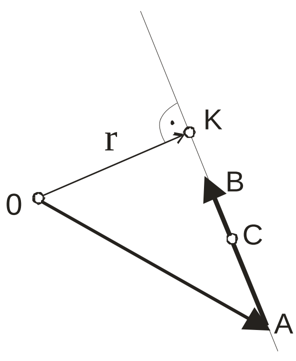
Moment wektora $\overrightarrow{AB}$ względem punktu ***O*** równa się iloczynowi wektorowemu $\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{AB}$

$$\boxed{Mom_O \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{AB}}$$

Momentem wektora $\overrightarrow{AB}$ względem punktu O nazywamy iloczyn wektorowy wektora o początku w punkcie O i końcu w początku danego wektora i tego wektora.

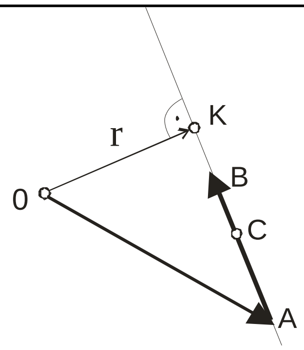
Moment wektora względem punktu posiada pewną interesującą własność, którą można zapisać w następujące twierdzenie:

Moment wektora względem punktu nie zmieni się, jeżeli zamiast punktu ***A*** będącego końcem wektora $\overrightarrow{OA}$ weźmiemy jakikolwiek inny punkt ***C*** leżący na prostej wyznaczonej przez wektor $\overrightarrow{AB}$.



$$Mom_O \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OC} \times \overrightarrow{AB}$$

Dowód:



$$Mom_O \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CA}$$

czyli:

$$Mom_O \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CA}) \times \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OC} \times \overrightarrow{AB} + \underbrace{\overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{AB}}_{\substack{\textit{równa się } 0 \\ \textit{ponieważ } \overrightarrow{CA} \parallel \overrightarrow{AB}}} = \overrightarrow{OC} \times \overrightarrow{AB}$$

Wobec dowolności wyboru punktu ***C*** może nim być punkt ***K***, gdzie wektor $\overrightarrow{OK} \perp \overrightarrow{AB}$

Wtedy

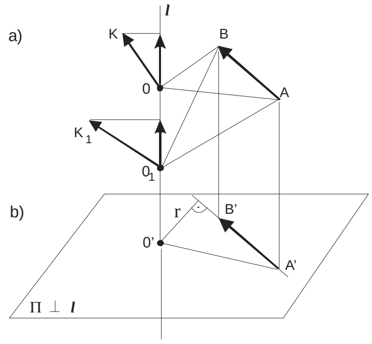
$$\left| Mom_O \overrightarrow{AB} \right| = \left| \overrightarrow{OK} \times \overrightarrow{AB} \right| = \left| \overrightarrow{OK} \right| \cdot \left| \overrightarrow{AB} \right| \cdot \sin\frac{\pi}{2} = r \cdot \left| \overrightarrow{AB} \right|$$

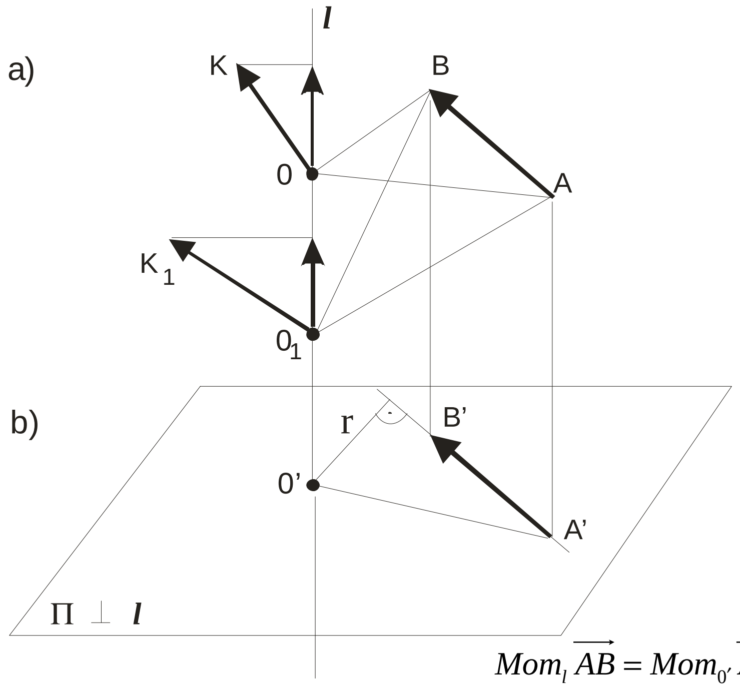
8. MOMENT WEKTORA WZGLĘDEM OSI

Definicja:

Momentem wektora względem osi nazywamy rzut na tę oś momentu wektora względem dowolnego punktu na niej leżącego

$$Mom_l \overrightarrow{AB} = rz_l (Mom_O \overrightarrow{AB})$$





$$Mom_l \overrightarrow{AB} = Mom_{0'} \overrightarrow{A'B'}$$

Zapis pokazany na rysunku w części *b)* jest jednym ze sposobów obliczania momentu wektora względem osi – czyli

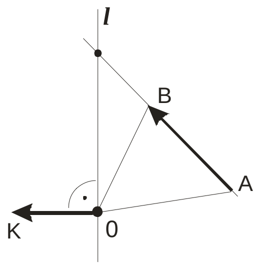
$$\left| Mom_l \overrightarrow{AB} \right| = r \cdot \left| \overrightarrow{A'B'} \right|$$

Wobec dowolności wyboru punktu O na osi $\boldsymbol{l}$ może zachodzić wątpliwość czy moment wektora $\overrightarrow{AB}$ względem osi $\boldsymbol{l}$ zdefiniowany jest w sposób jednoznaczny.

Wątpliwość tę usuwa następujące twierdzenie:

$$Mom_l \overrightarrow{AB} = rz_l \overrightarrow{OK_i} = const = Mom_l \overrightarrow{AB}$$

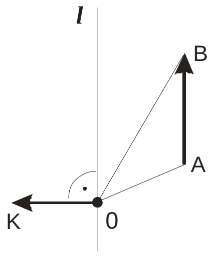
Dowód: patrz J.Kwiatkowski „Statyka ogólna”.



$\overrightarrow{AB}$ i $\boldsymbol{l}$ mają punkt wspólny

$\overrightarrow{OK} \perp l \perp \Pi$

$rz_l \overrightarrow{OK} = 0$



$\overrightarrow{AB} \parallel l$

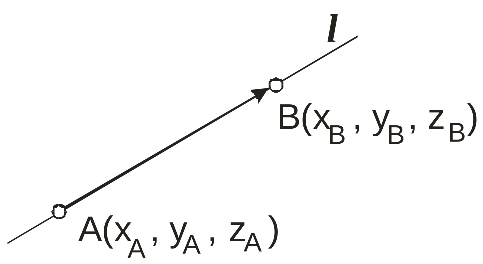
$\overrightarrow{OK} \perp l \quad \rightarrow \quad rz_l \overrightarrow{OK} = 0$

Powyższe dwa rysunki są skrótowym przedstawieniem faktu, że moment wektora względem osi jest równy zeru w dwóch przypadkach:

1. **wektor i oś są równoległe,**
2. **wektor i oś mają punkt wspólny.**

Przy obliczaniu momentu wektora $\overrightarrow{CD}$ względem osi wyznaczonej przez wektor $\overrightarrow{AB}$ postępujemy następująco:

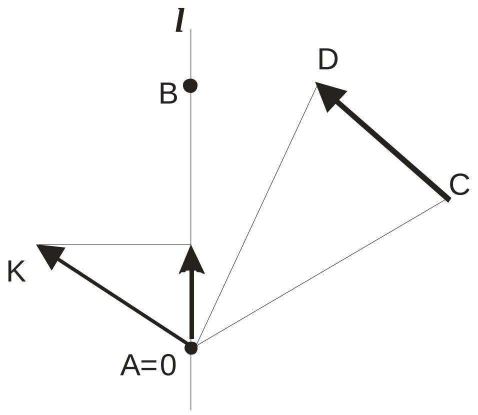
1. Oś $\boldsymbol{l}$ zapisujemy analitycznie



$$\boxed{\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\cdot \vec{i} + (y_B - y_A)\cdot \vec{j} + (z_B - z_A)\cdot \vec{k}}$$

2. Moment wektora $\overrightarrow{CD}$ względem prostej $\overrightarrow{AB}$ równa się rzutowi momentu wektora $\overrightarrow{CD}$ względem punktu A, który jest początkiem wektora $\overrightarrow{AB}$.

$$\boxed{Mom_{\overrightarrow{AB}}\overrightarrow{CD} = rz_{\overrightarrow{AB}}(Mom_A\overrightarrow{CD}) = rz_{\overrightarrow{AB}}(\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{CD}) = rz_{\overrightarrow{AB}}\overrightarrow{OK}}$$



3. Dokonujemy rzutowania wektora $\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{CD}$ na wektor $\overrightarrow{AB}$.

4. Dokonujemy zapisu analitycznego momentu wektora $\overrightarrow{CD}$ względem osi:

$$\boxed{Mom_{\overrightarrow{AB}}\overrightarrow{CD} = mrz_{\overrightarrow{AB}}(Mom_A\overrightarrow{CD}) = mrz_{\overrightarrow{AB}}\overrightarrow{OK}\cdot\overrightarrow{AB_0}}$$

gdzie:

$$\overrightarrow{AB_0} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}$$

- wersor osi wyznaczonej przez wektor $\overrightarrow{AB}$