



UNIVERSITY OF WARMIA AND MAZURY IN OLSZTYN
The Faculty of Technical Sciences
POLAND, 10-957 Olsztyn, M. Oczapowskiego 11
tel.: (48)(89) 5-23-32-40, fax: (48)(89) 5-23-32-55
URL: <http://www.uwm.edu.pl/edu/sobieski/> (in Polish)



Obliczeniowa Dynamika Płynów

Computational Fluid Dynamics – CFD

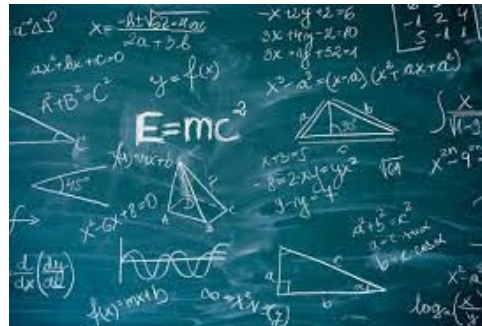
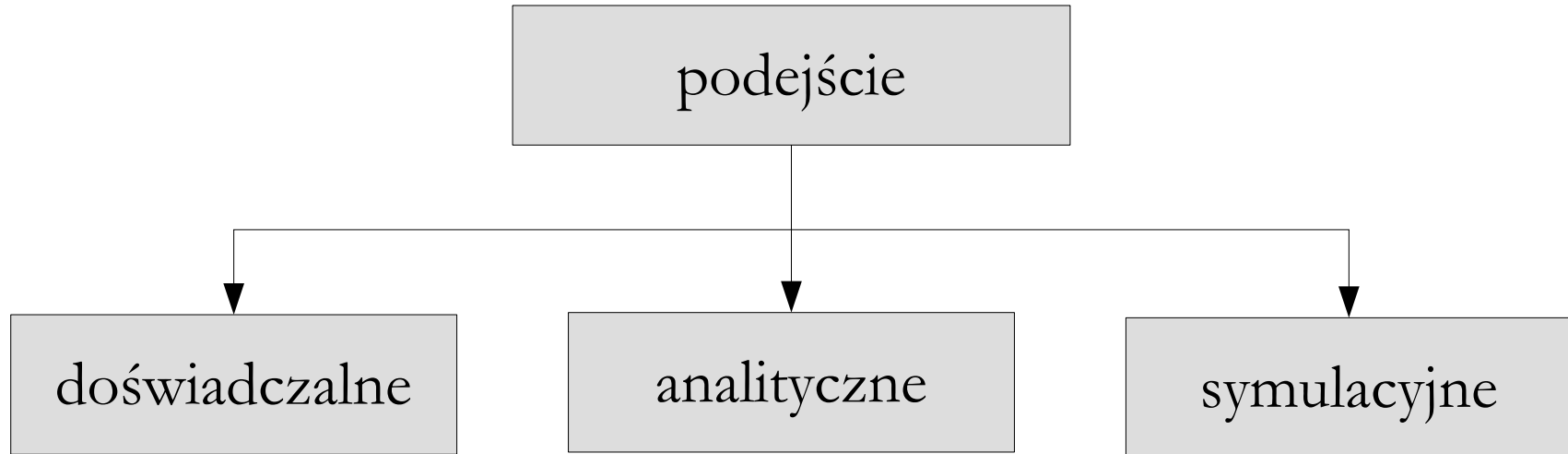
Wprowadzenie do modelowania numerycznego
(wersja skrócona)

wersja: 5 lutego 2026

Wojciech Sobieski

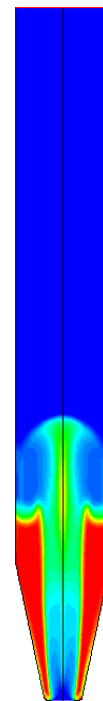
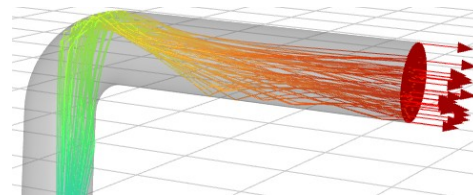
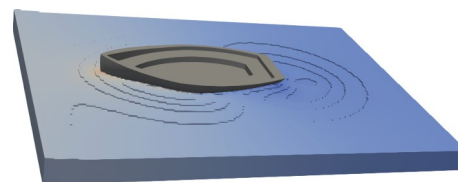
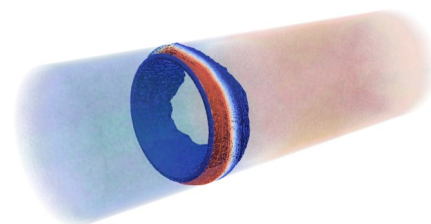
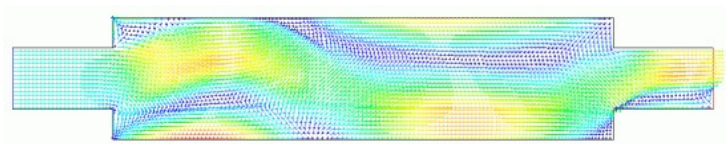
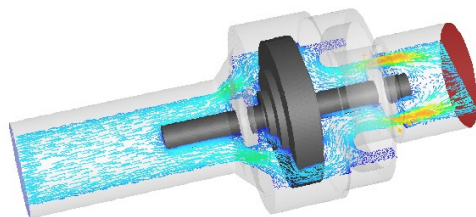
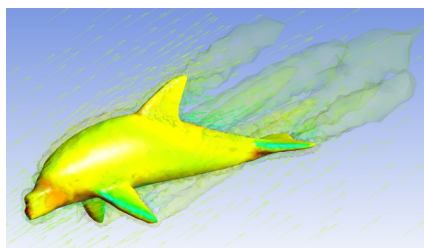
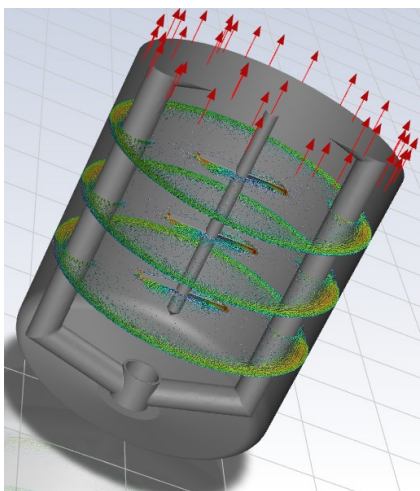
Olsztyn, 2003-2026

Kluczowe pytania – jakie podejście badawcze?



Mechanika Numeryczna

Mechanika numeryczna – dział mechaniki zajmujący się rozwojem technik symulacyjnych (głównie modeli matematycznych i algorytmów), umożliwiających przewidywanie zachowania się różnych układów przepływowych bez konieczności budowania stanowisk badawczych i wykonywania kosztownych eksperymentów.



Uwaga 1

Uwaga 1. Równania opisujące zachowanie materii stały się tak złożone, że ich ręczne rozwiązanie nie jest już możliwe. Odpowiedzią na ten problem okazały się metody numeryczne.



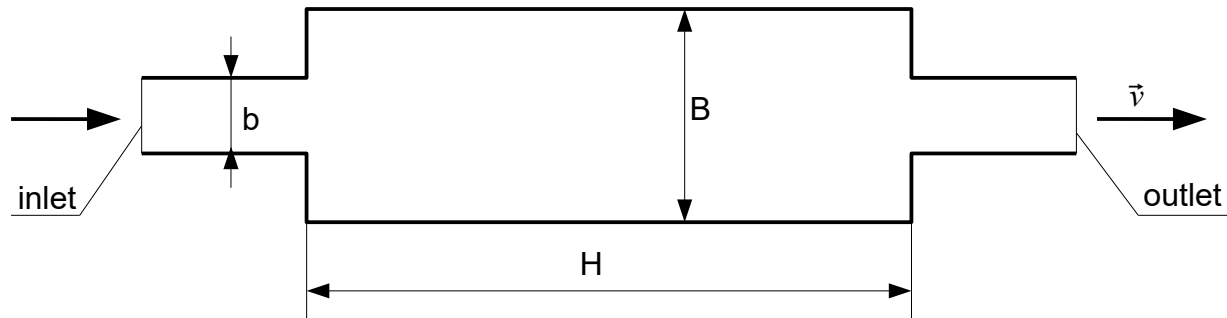
Kluczowe pytania – jaki opis matematyczny?

Podejście Eulera – opisuje pole przepływu w punkcie przestrzeni.

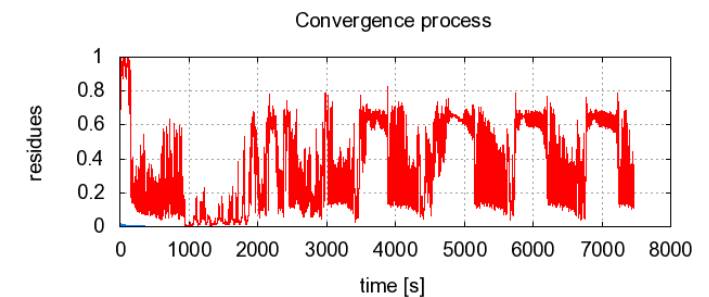
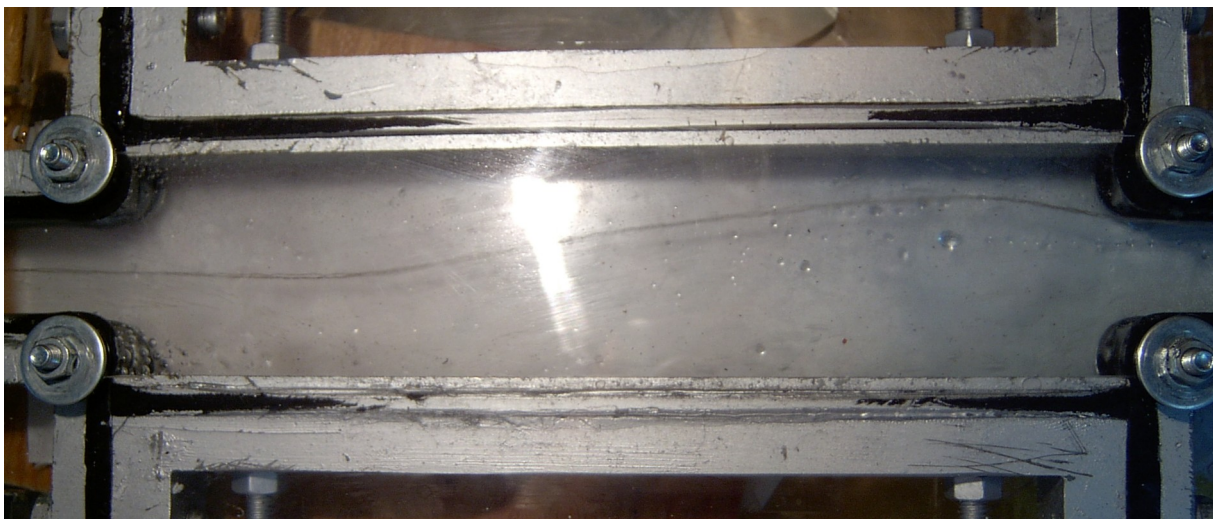
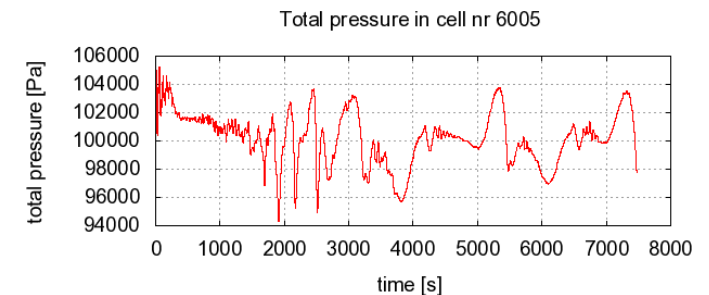
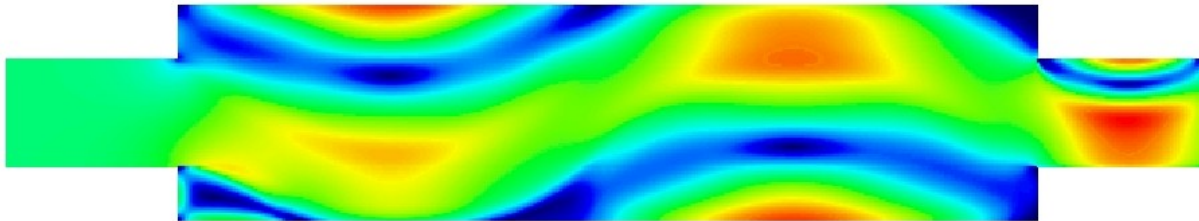
Podejście Lagrange’a – śledzi pojedynczą cząstkę płynu lub element masy w czasie.



Przykład symulacji w ujęciu Eulera

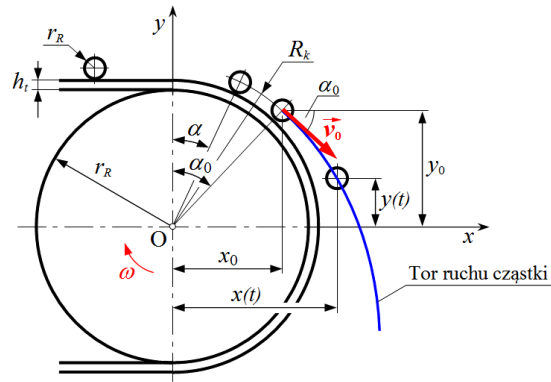


Modelowanie bifurkacji
Hopfa w kanale z
rozszerzeniem [Wojciech
Sobieski, Multi Flower 2D].

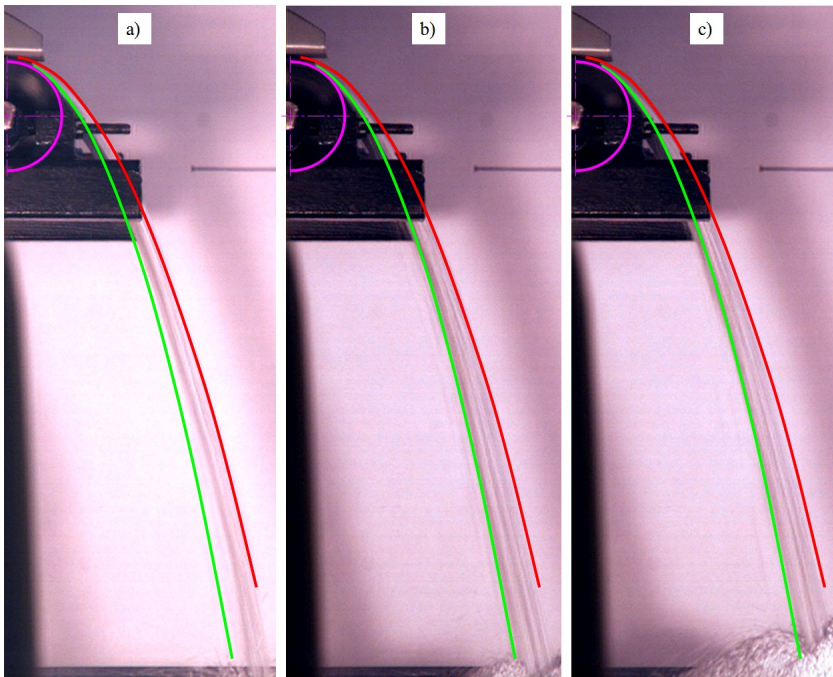
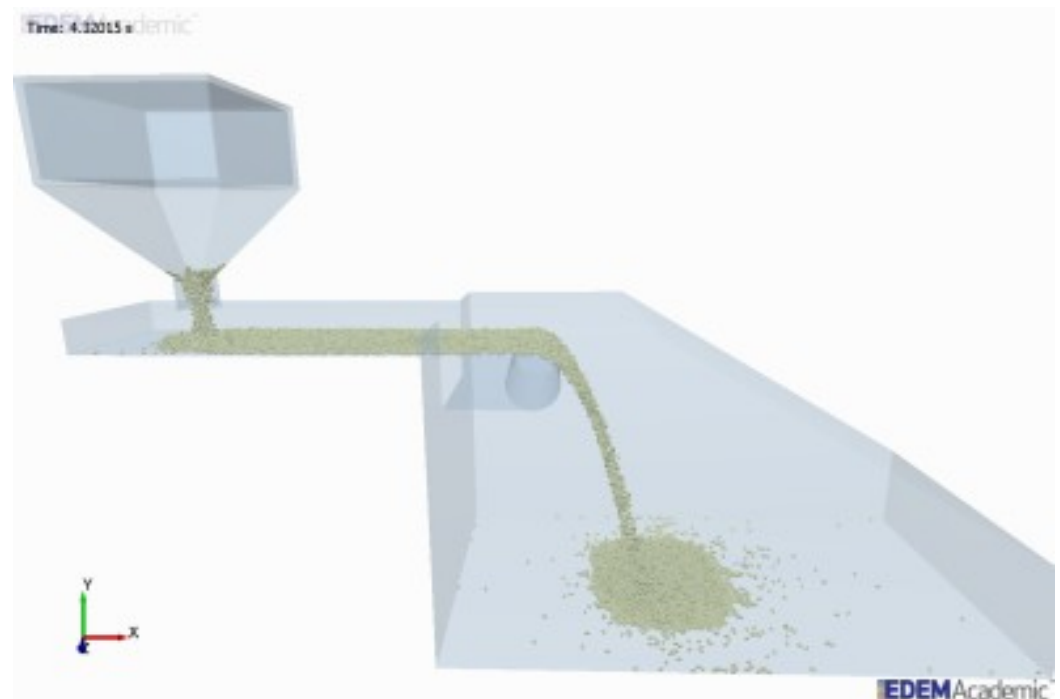


Śledzenie zmian parametrów
w wybranej komórce.

Przykład symulacji w ujęciu Lagrange'a



Modelowanie transportu granulatu Metodą Elementów Dyskretnych [Joanna Wiącek, EDEM].



Analiza trajektorii ruchu cząstek [Waldemar Dudda].

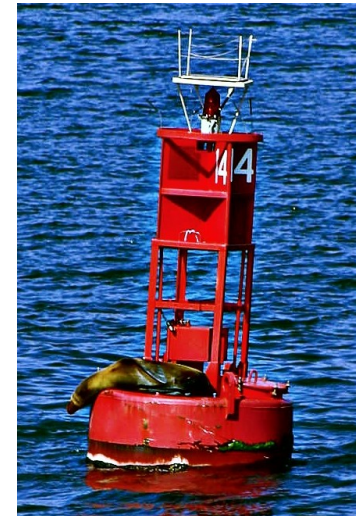
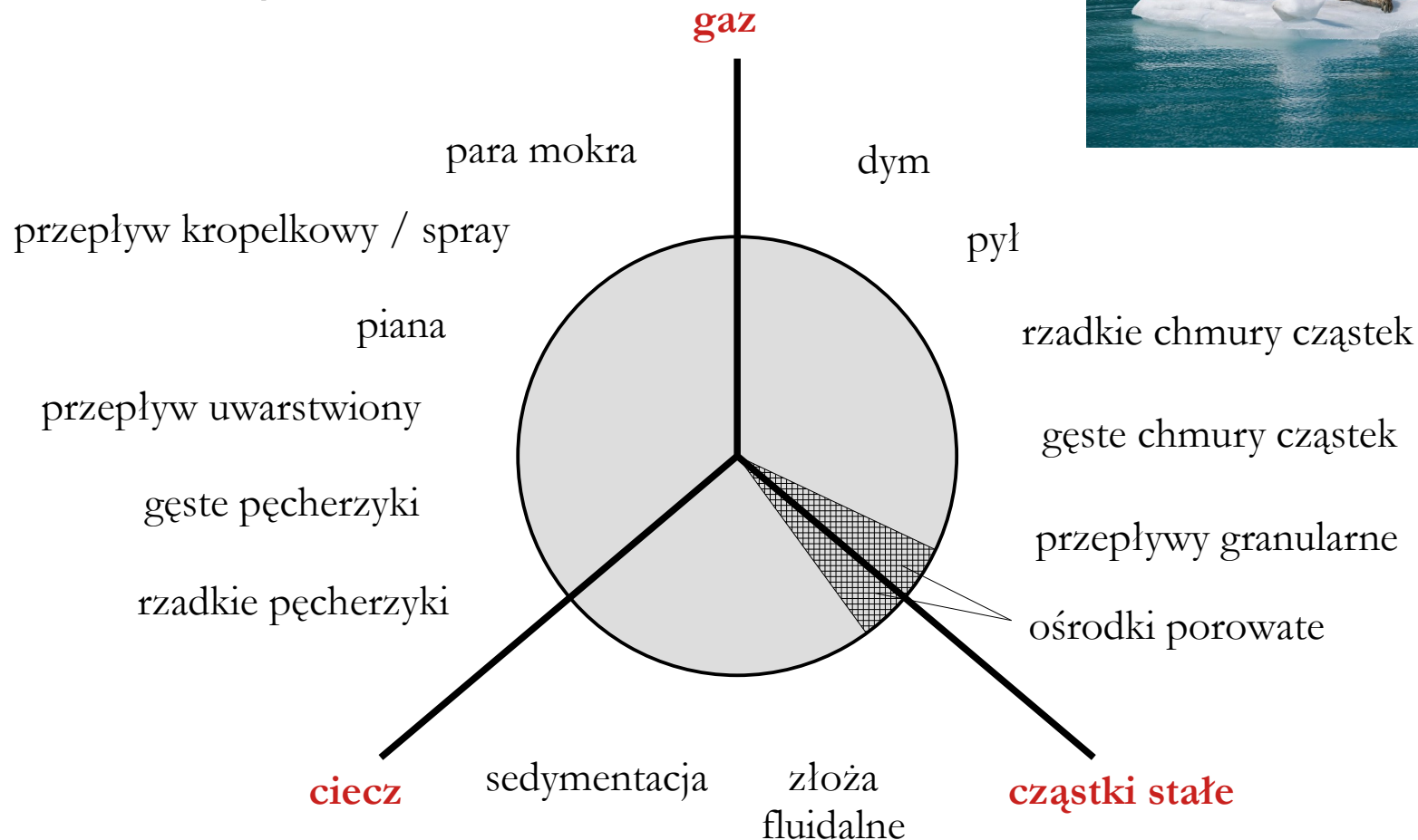
Uwaga 2

Uwaga 2. Wybór rodzaju opisu matematycznego, takiego jak podejście Eulera lub Lagrange'a, stanowi podstawowy element strategii modelowania. Ze względu na fundamentalne różnice między tymi metodami, zmiana decyzji w tym zakresie zwykle wymaga rozpoczęcia prac od podstaw.



Kluczowe pytania – jakie medium?

Medium/media:



Pytanie powiązane – jaki zastosować opis matematyczny: **Eulera** czy **Lagrange’a**?

Uwaga 3

Uwaga 3. Kluczem do wyboru strategii modelowania jest precyzyjne zdefiniowanie ośrodka (np. liczby i rodzaju faz, właściwości mechanicznych i cieplnych faz), rodzaju analizy (stan ustalony lub przejściowy), fizyki zjawisk (np. model ciała, wymiana ciepła, ruch laminarny czy turbulentny płynu) i celu badania.



Kluczowe pytania – jaka metoda?

- **Metody siatkowe:**
 - Metoda Różnic Skończonych (Finite Difference Method)
 - Metoda Elementów Skończonych (Finite Element Method)
 - Metoda Objętości Skończonych (Finite Volume Method)
 - Metoda Zanurzonego Brzegu (Immersed Boundary Method)
 - Metoda Gazu Sieciowego Boltzmanna (Lattice Boltzmann Method)
 - ...
- **Metody bezsiatkowe:**
 - Metoda Elementów Dyskretnych (Discrete Element Method)
 - Metoda Cząstek Wygładzonych (Smoothed Particle Hydrodynamics)
 - Metoda Elementów Brzegowych (Boundary Element Method)
 - Metoda Rozwiązań Fundamentalnych (Method of Fundamental Solutions)
 - ...
- **Metody hybrydowe:**
 - Metoda Cząstek w Siatce (Particle/Fluid in Cell Model)
 - ...



Metody numeryczne w mechanice

Dynamika Ośrodków Ciągłych (skala makro)

Metoda Różnic Skończonych

(R. Courant, K.O. Friedrichs and H. Lewy, 1928)

Metoda Elementów Skończonych

(M.J. Turner, R.W. Clough, H.C.,
Martin, L.J. Topp, 1956)

Metoda Objętości Skończonych

(niezależnie: P. W. McDonald, 1971;
Mac-Cormack and Paullay, 1972)

Dynamika Statystyczna (skala mezo)

Metoda Gazu Sieciowego Boltzmanna

(P.L. Bhatnagar, E.P. Gross, M. Krook, 1954)

Dynamika Molekularna (skala mikro)



Dynamika Cząstek (?) (skala makro)

Metoda Cząstek Wygładzonych

(niezależnie: R.A. Gingold, J.J. Monaghan, 1977;
L.B. Lucy, 1977)

Metoda Elementów Dyskretnych

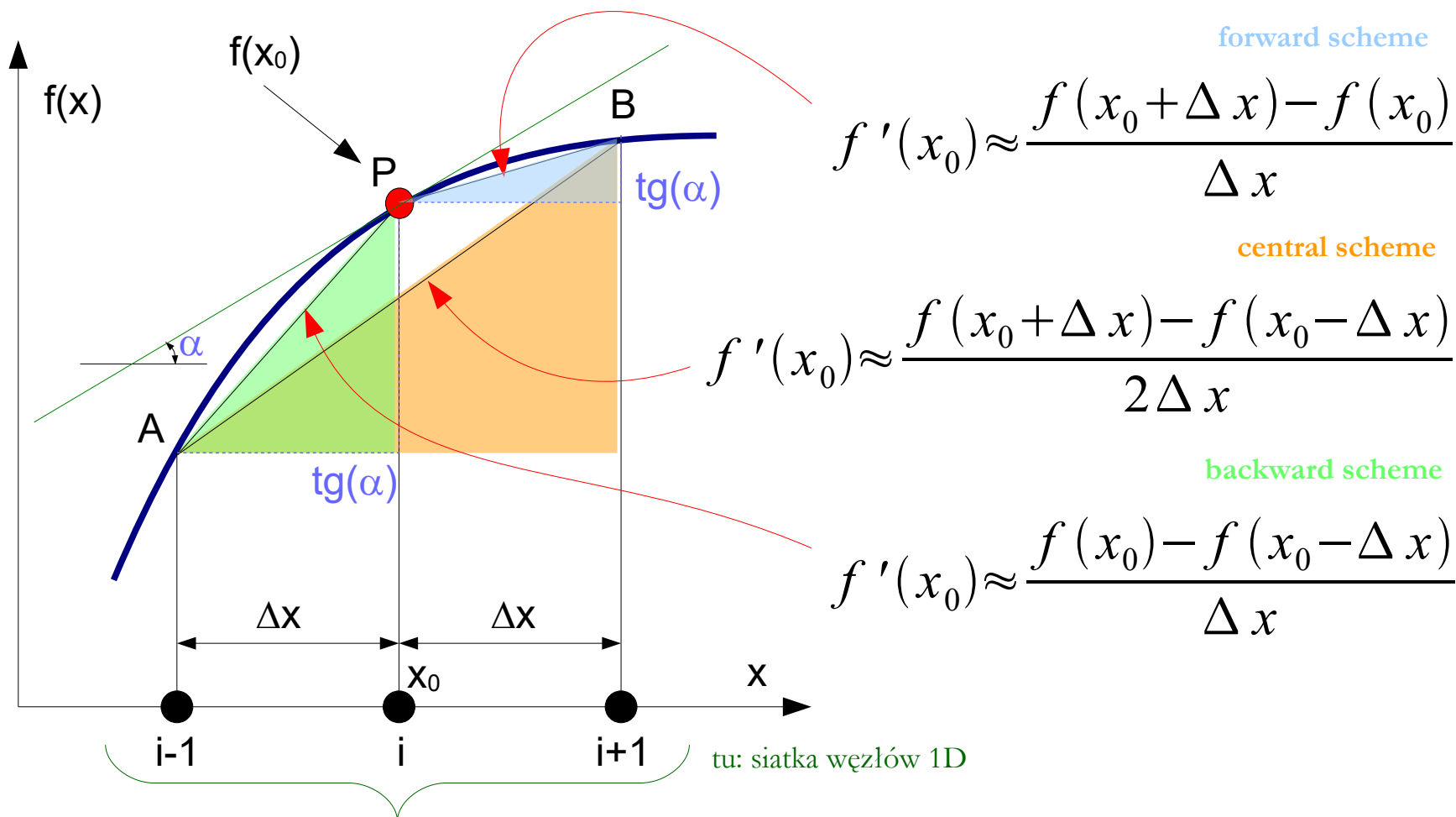
(P.A. Cundall, O.D. Strack, 1979)

metody siatkowe

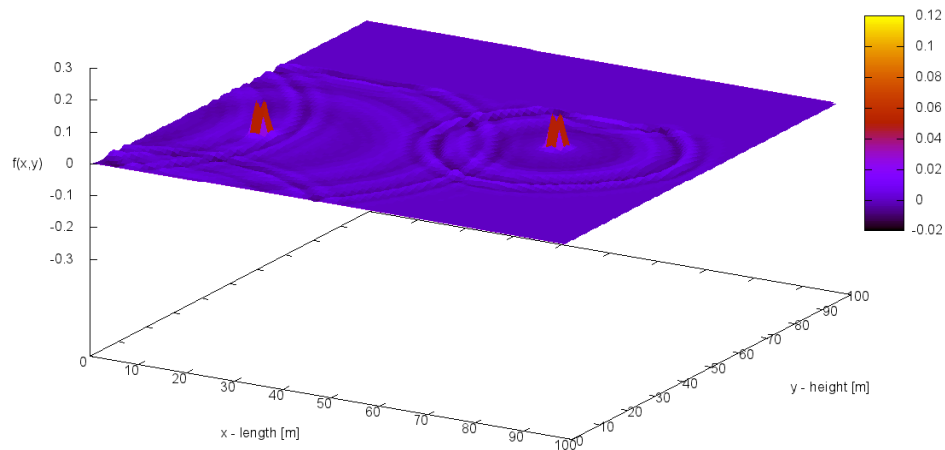
metody bezsiatkowe

Metoda Różnic Skończonych

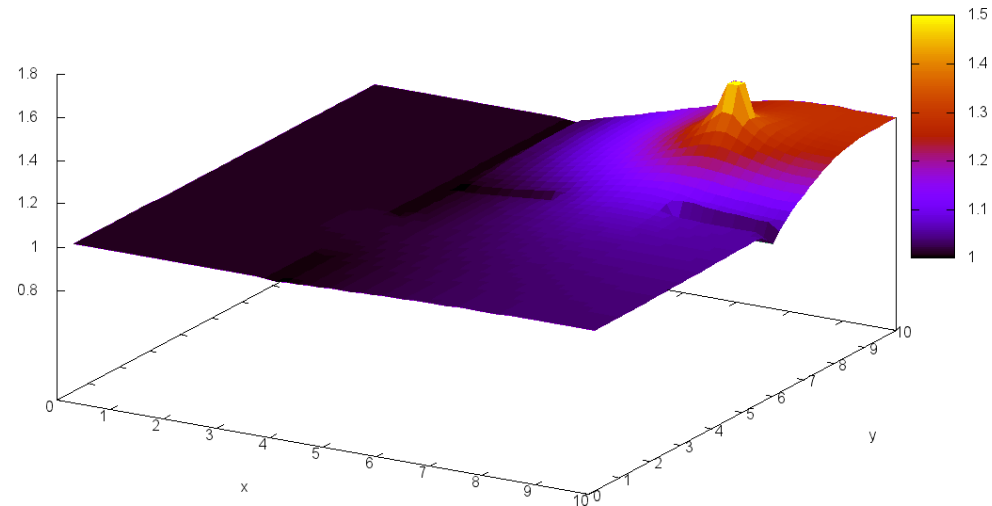
Metoda Różnic Skończonych – metoda Eulera, polegająca na przybliżeniu pochodnej funkcji poprzez skończone różnice, w oparciu o wcześniej zdefiniowaną przestrzenną siatkę dyskretną.



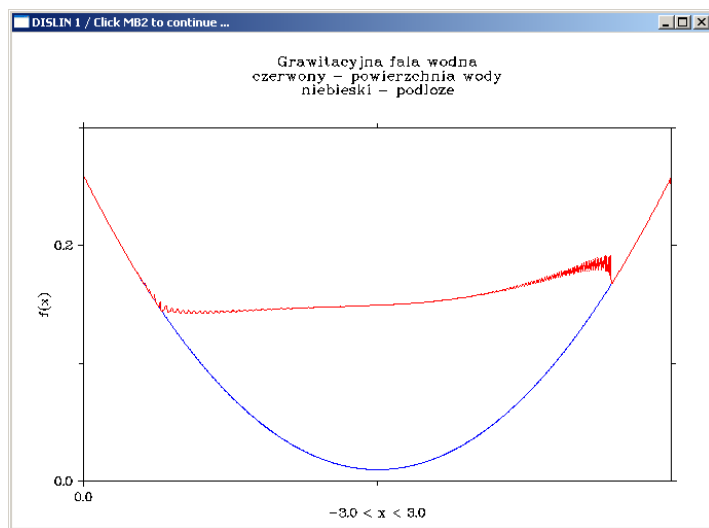
Metoda Różnic Skończonych



Przykład rozwiązania równania falowego
[Wojciech Sobieski, kod własny].



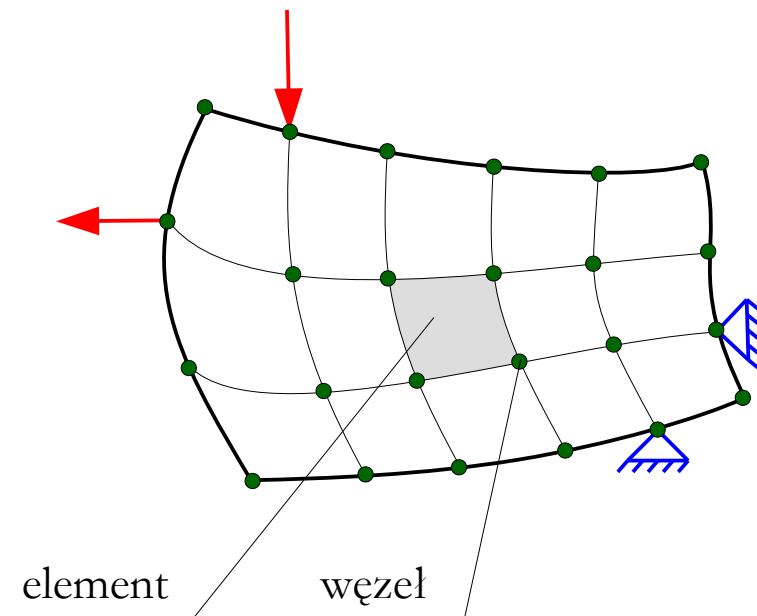
Przykład rozwiązania równania dyfuzji
[Wojciech Sobieski, kod własny].



Przykład rozwiązania równania płytkiej wody
[Wojciech Sobieski, kod własny].

Metoda Elementów Skończonych

Metoda Elementów Skończonych – metoda Eulera rozwiązywania układów równań różniczkowych, opierająca się na podziale domeny obliczeniowej na skończone elementy – dla których rozwiązanie jest przybliżane przez tzw. funkcje kształtu – i przeprowadzaniu faktycznych obliczeń tylko dla węzłów tego podziału.



$$M \cdot \ddot{x} + C \cdot \dot{x} + K \cdot x = F(t)$$

M - macierz bezwładności

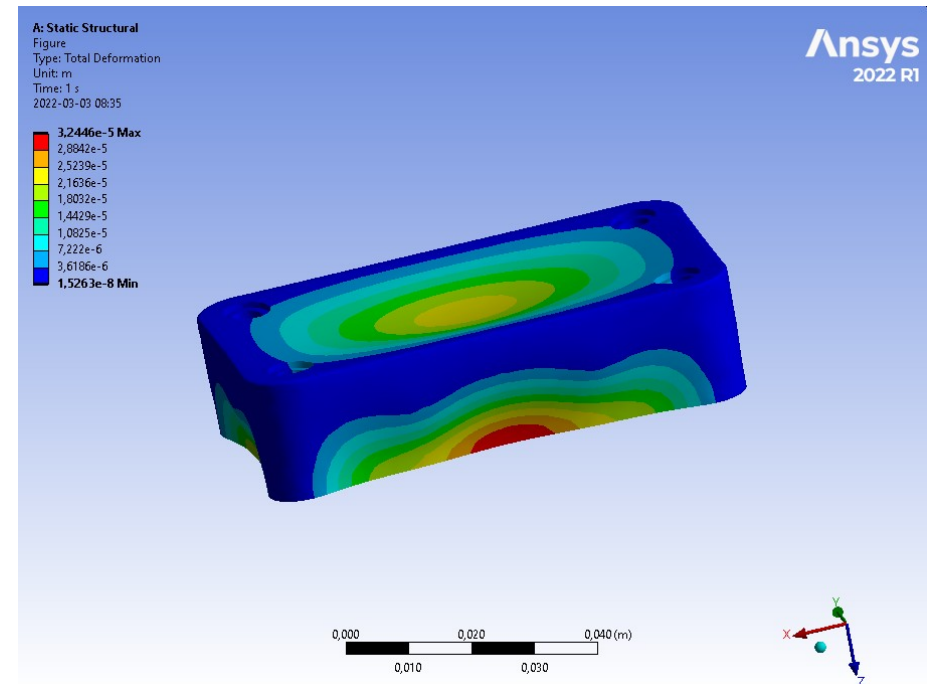
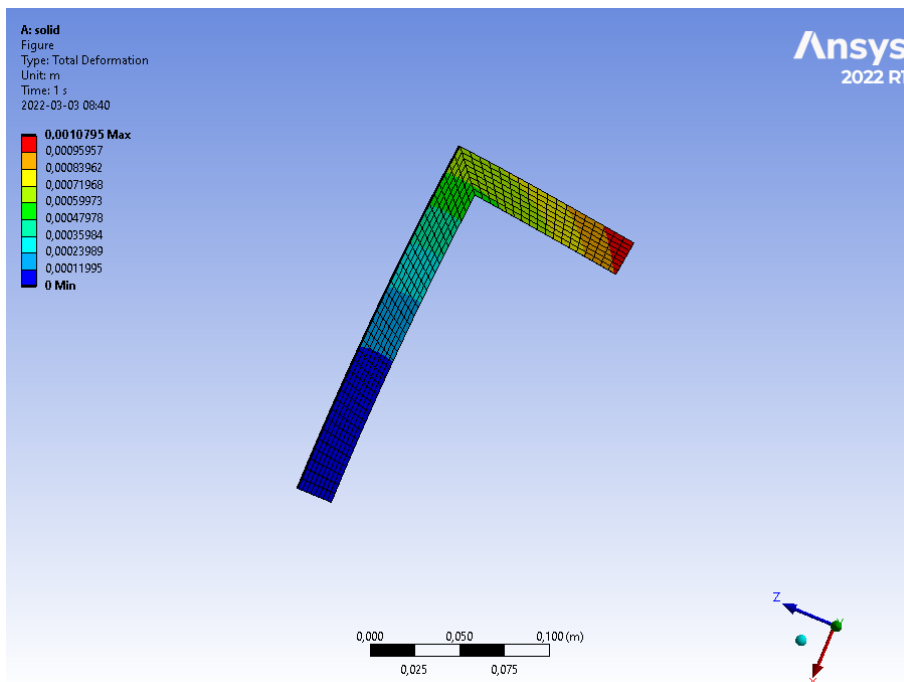
C - macierz tłumienia

K - macierz sztywności

$F(t)$ - wektor sił uogólnionych

Metoda Elementów Skończonych

Liniowa analiza mechaniczna obudowy obciążonej ciśnieniem zewnętrznym (materiały szkoleniowe firmy SymKom, luty 2022).



Liniowa analiza belki o profilu kwadratowym przelotowym obciążonej siłą punktową (materiały szkoleniowe firmy SymKom, luty 2022).

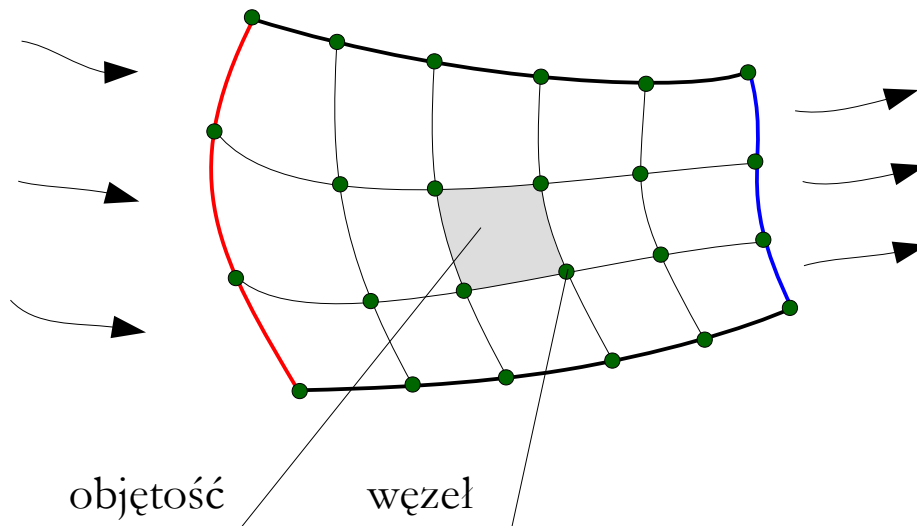
Metoda Objętości Skończonych

Metoda Objętości Skończonych – metoda Eulera polegająca na wykonywaniu bilansów powierzchniowych i objętościowych dowolnych ekstensywnych wielkości fizycznych, w oparciu o wcześniej zdefiniowaną przestrzenną siatkę dyskretną.

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \bar{v}) + \text{div}(\rho(\bar{v} \bar{v} + p \vec{I})) = \text{div}(\vec{\tau}^l - \rho \overline{v' v'}) + \vec{s}_p$$

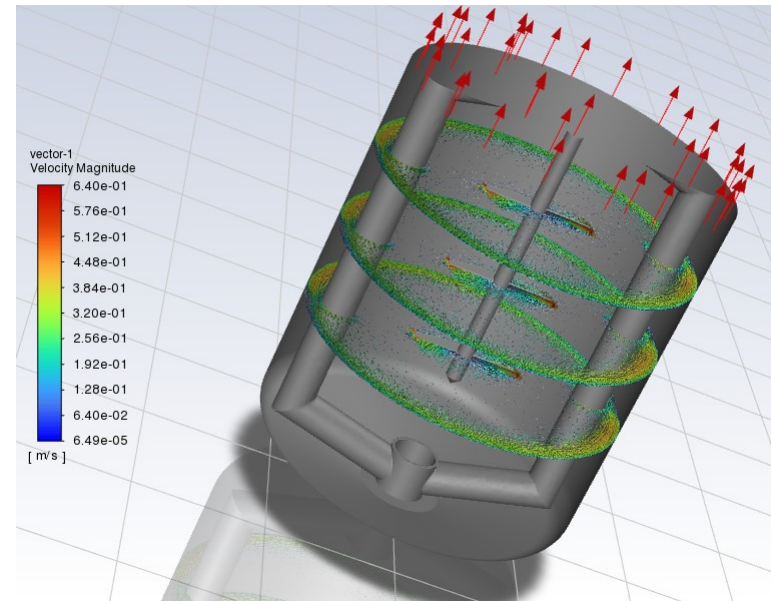
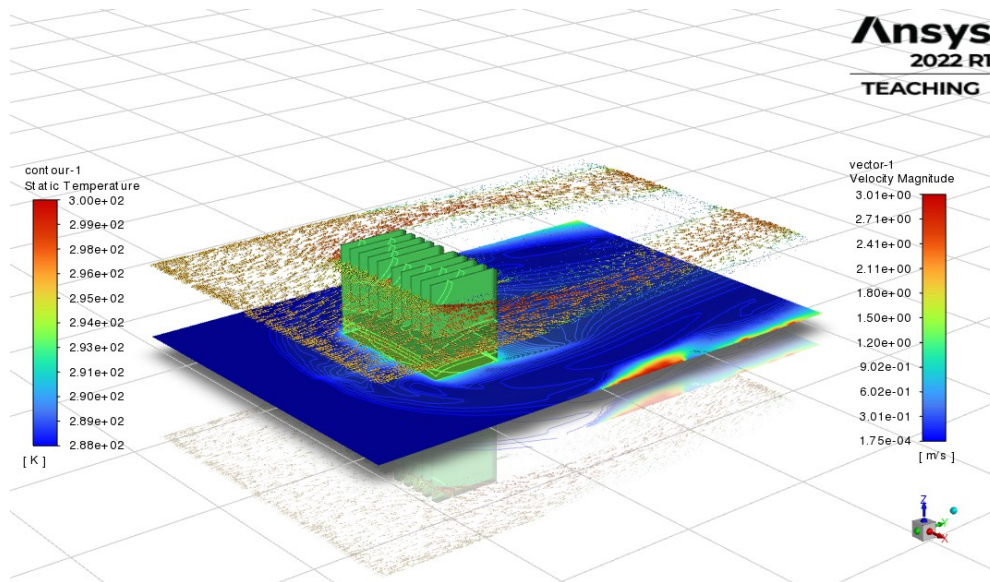
$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_S = \int_S (\Phi \vec{v} \cdot \vec{n}) dS$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_V = \int_V (\Phi) dV$$



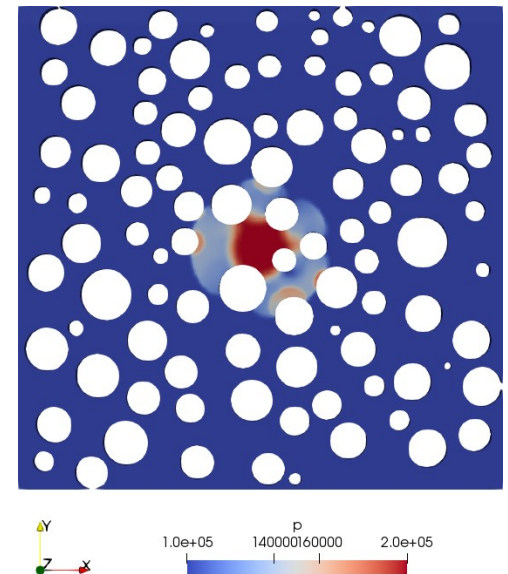
Metoda Objętości Skończonych

Przykład modelowania pracy mieszalnika z dwoma przeciwbieżnymi mieszadłami [Wojciech Sobieski, ANSYS Fluent].



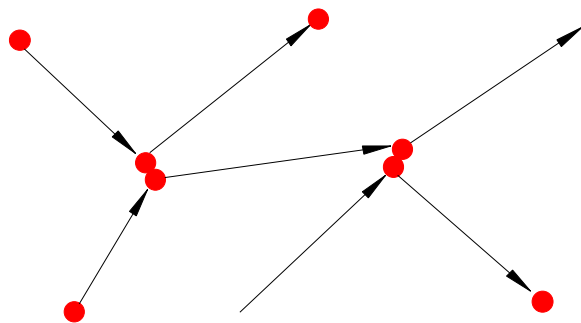
Przykład modelowania chłodzenia radiatora [Wojciech Sobieski, ANSYS Fluent].

Przykład modelowania eksplozji w rzadkim ośrodku porowatym – test solewra rhoPimpleFoam [Wojciech Sobieski, OpenFOAM].



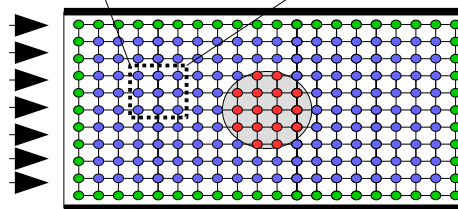
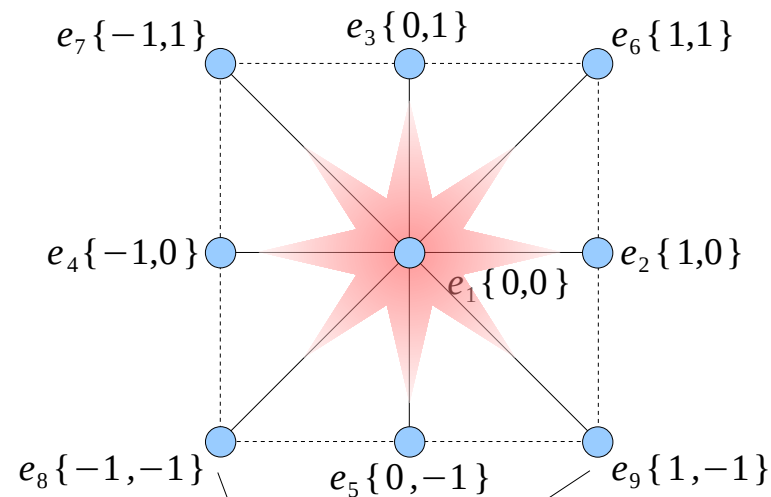
Metody Gazu Sieciowego Boltzmann

Metoda Gazu Sieciowego Boltzmann – metoda Lagrange'a polegająca na analizie zmian rozkładu przestrzennego tzw. gazu sieciowego w czasie, w oparciu o dyskretną wersję równania Boltzmann (statystyczne równanie różniczkowe gazu nie pozostającego w równowadze termodynamicznej).



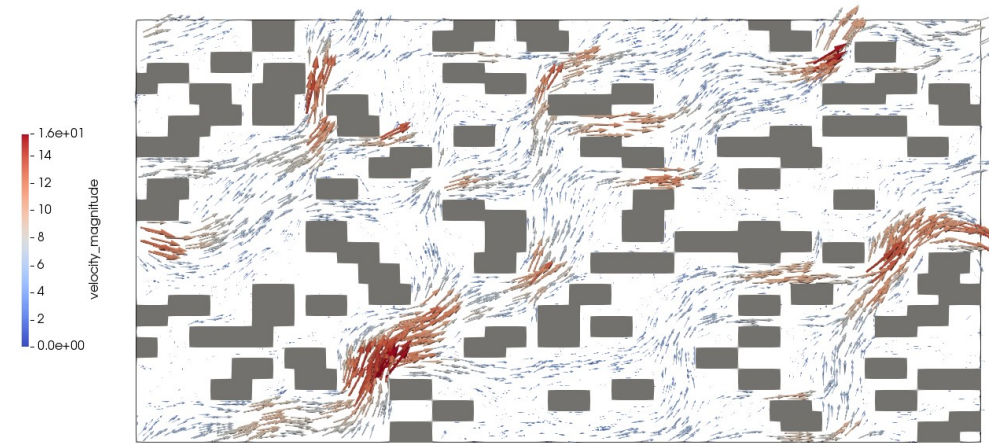
$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla_{\vec{x}} f + \frac{\vec{F}}{m} \cdot \nabla_{\vec{v}} f = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{zd}$$

równanie Boltzmann

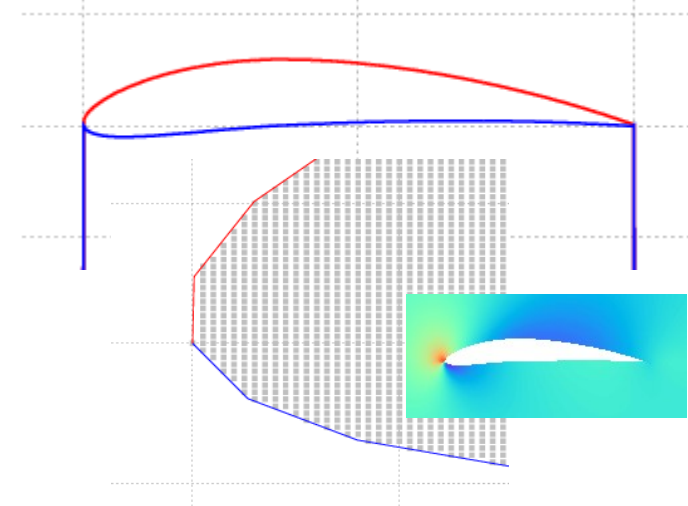
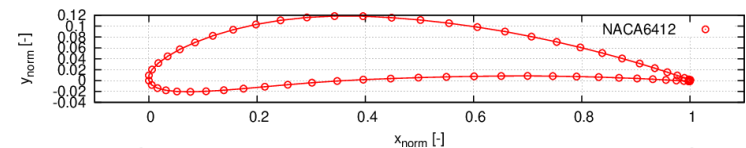
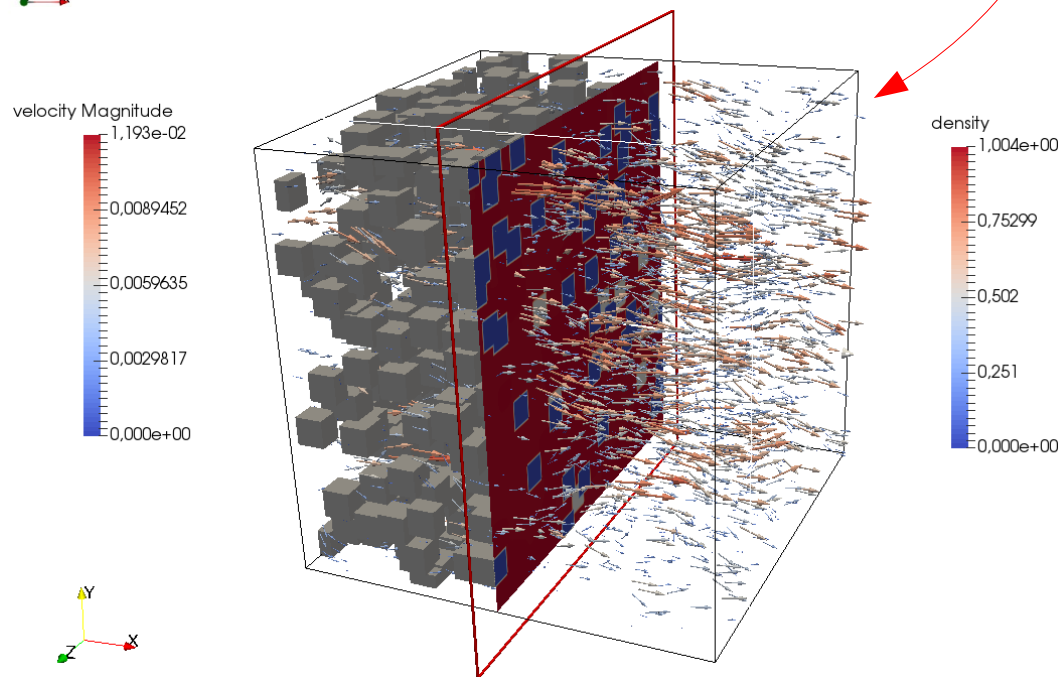


przykład
geometrii
binarnej

Metody Gazu Sieciowego Boltzmanna



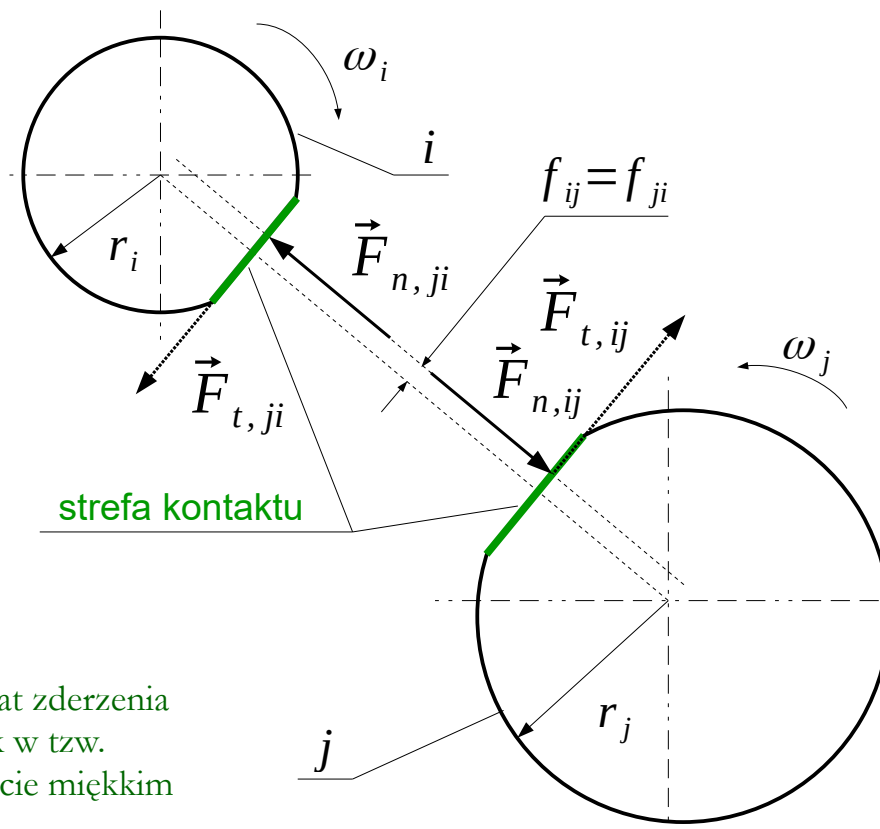
Przykład symulacji przepływu gazu sieciowego przez strukturę porową [Wojciech Sobieski, kod własny] [Wojciech Sobieski, Palabos].



Przykład konwersji geometrii wektorowej na geometrię binarną [Wojciech Sobieski, kod własny].

Metoda Elementów Dyskretnych

Metoda Elementów Dyskretnych – metoda Lagrange'a analizy dynamiki układów ciał stałych pozostających w ruchu swobodnym, wykorzystująca zasady dynamiki Newtona.

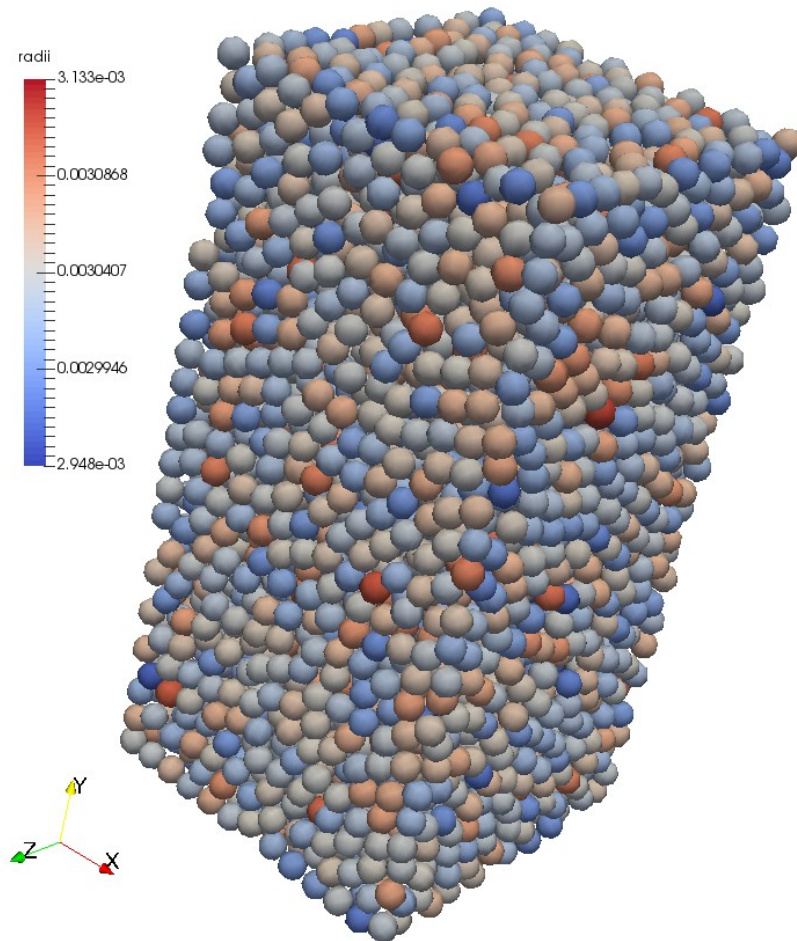


Schemat zderzenia
cząstek w tzw.
kontakcie miękkim

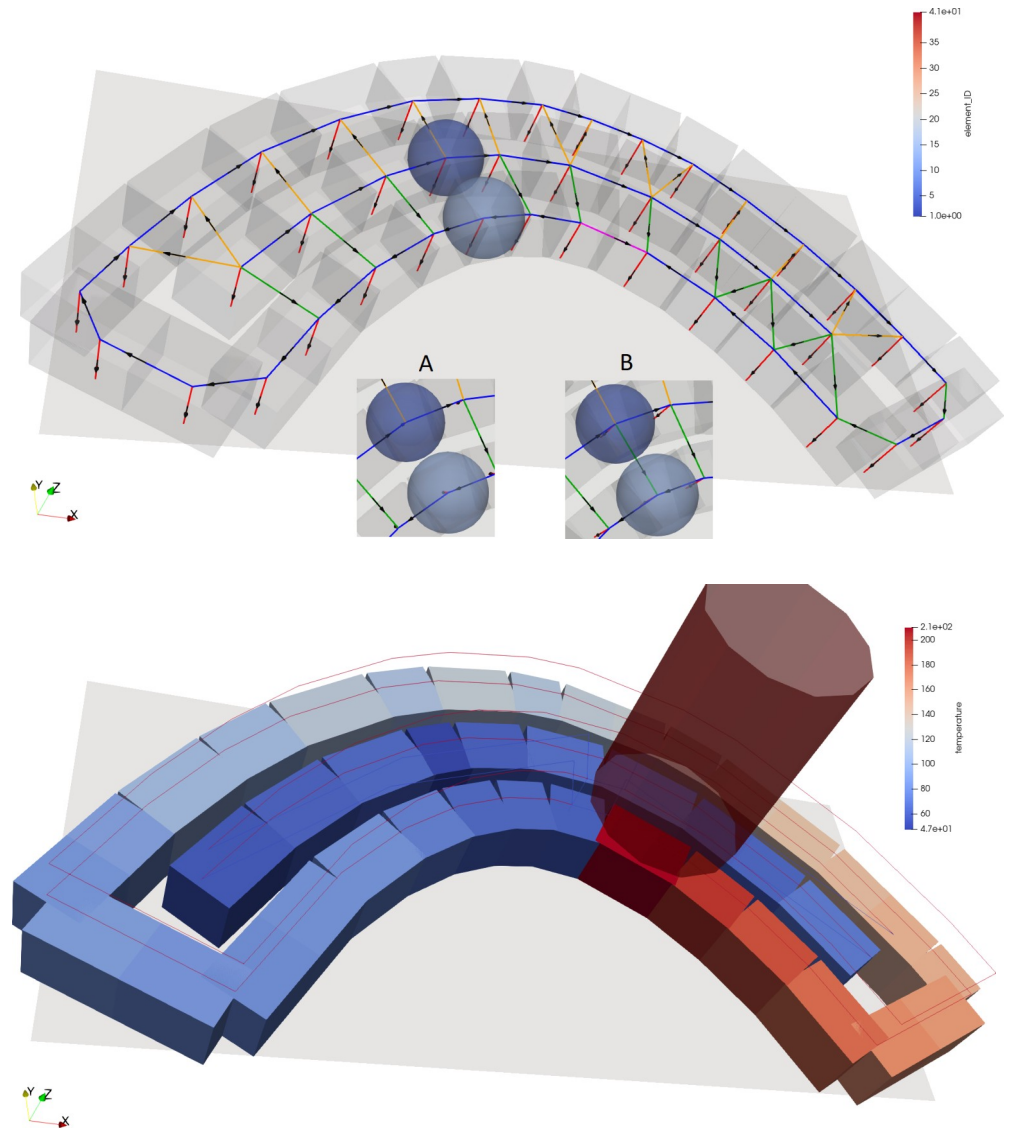
$$m_i \frac{d v_i}{dt} = \sum_{k=1}^{n_k} (F_{ij}^n + F_{ij}^t) + m_i g$$

$$I_i \frac{d \omega_i}{dt} = \sum_{k=1}^{n_k} (r_i \times F_{ij}^t) + \tau_{rij}$$

Metoda Elementów Dyskretnych

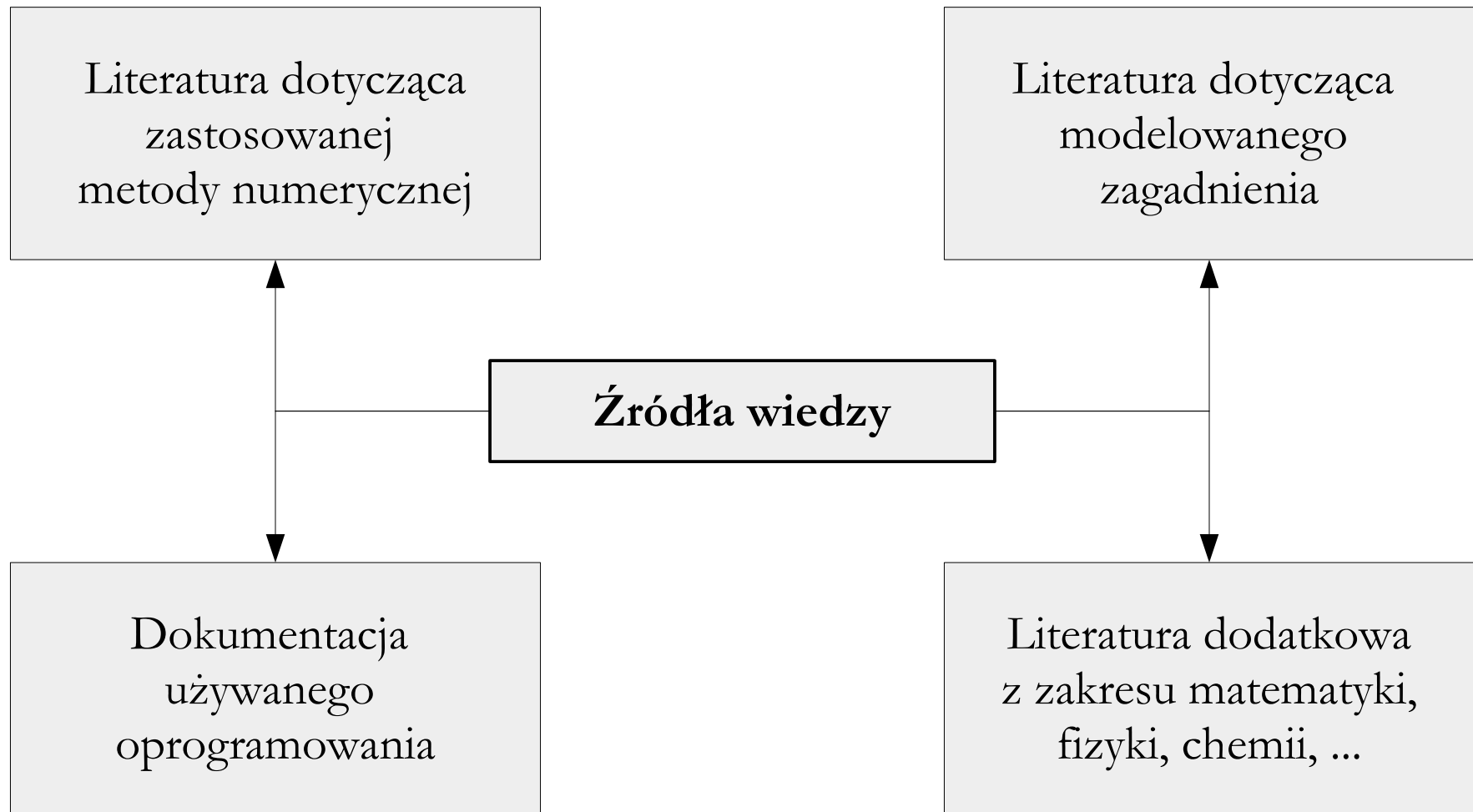


Przykład generacji złoza granularnego
[Wojciech Sobieski, YADE].

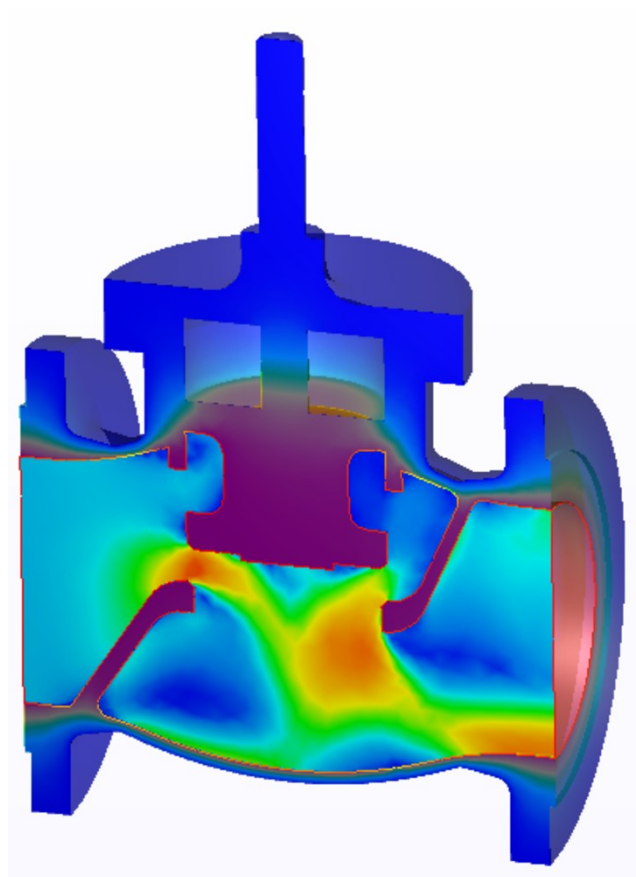


Program do symulacji druku 3D
[Wojciech Sobieski, kod własny].

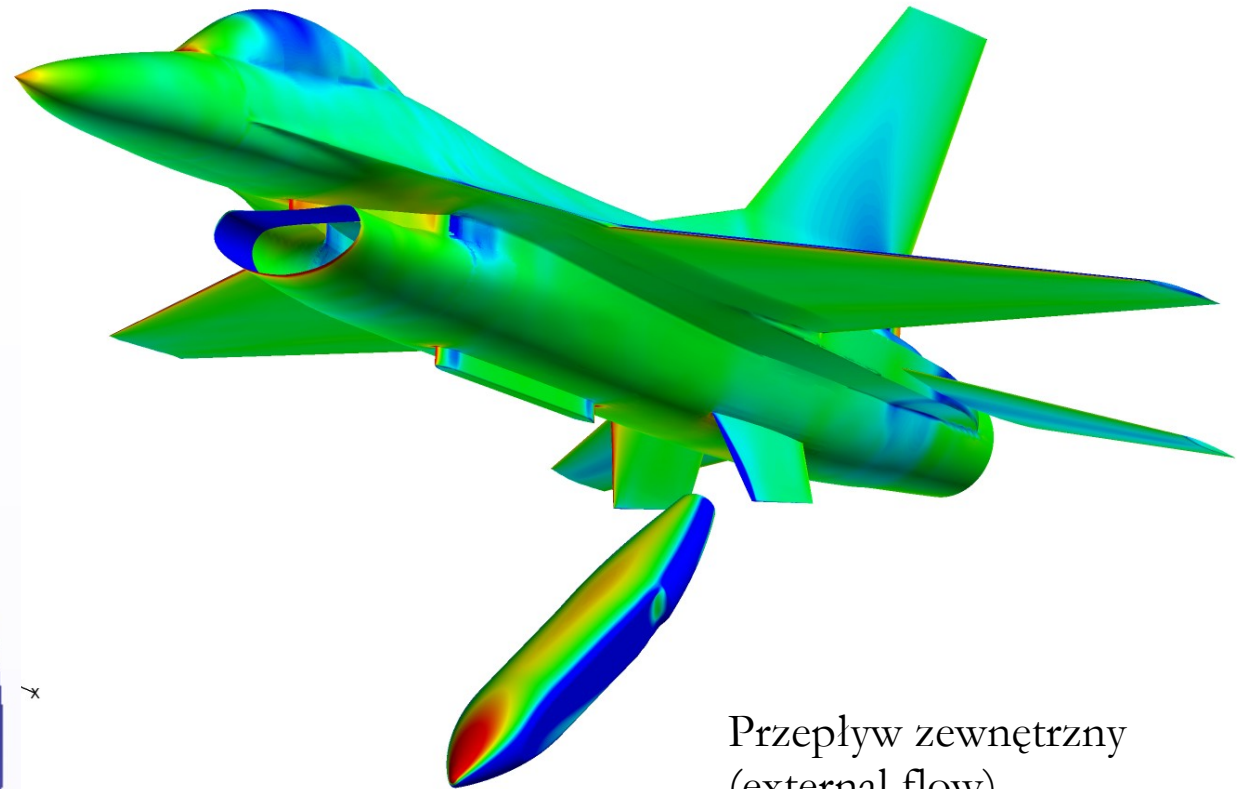
Źródła wiedzy



Podstawowa klasyfikacja przepływów

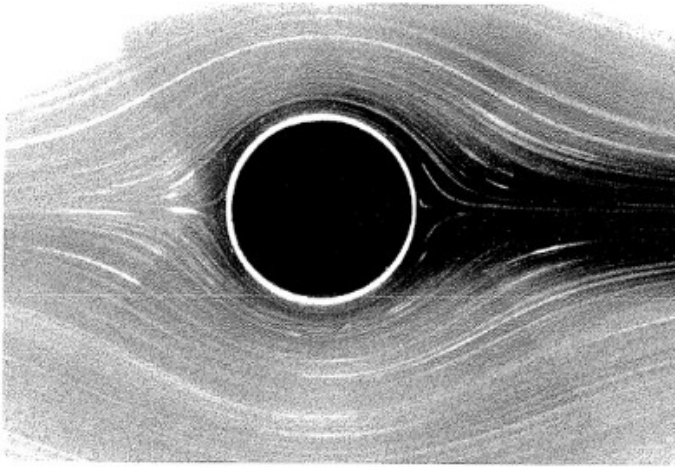


Przepływ wewnętrzny
(internal flow).

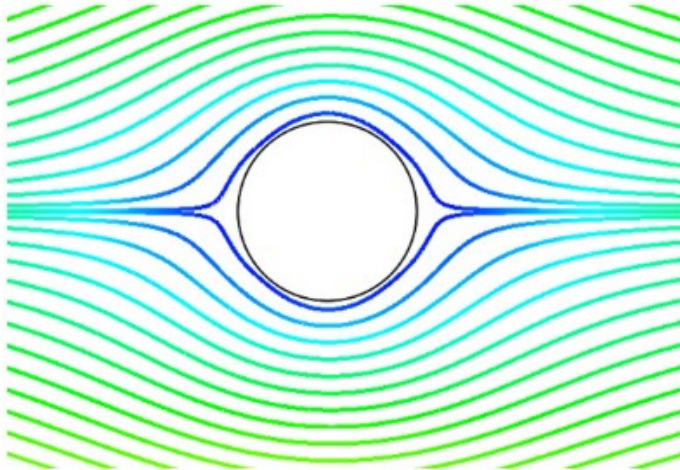
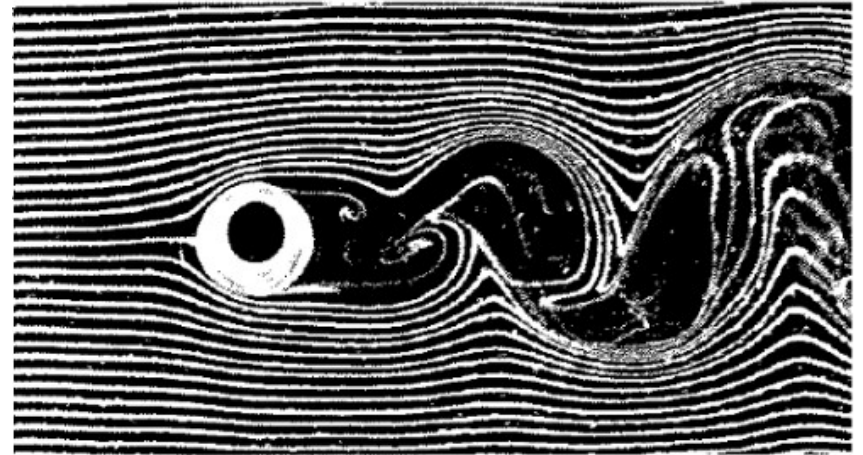


Przepływ zewnętrzny
(external flow).

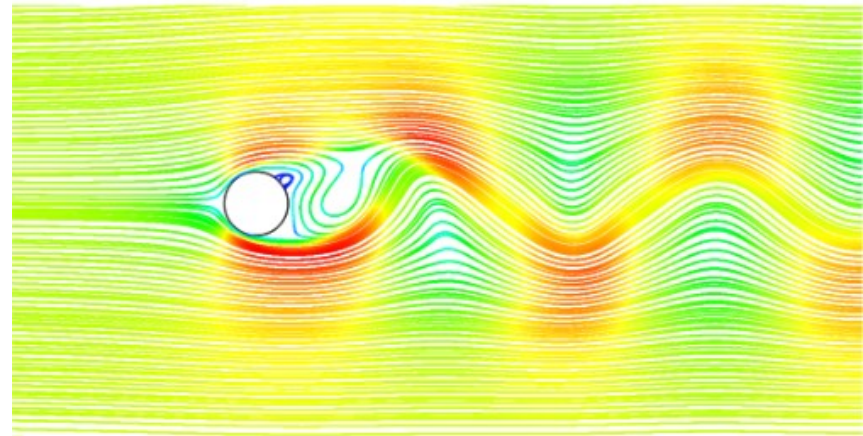
Podstawowa klasyfikacja przepływów



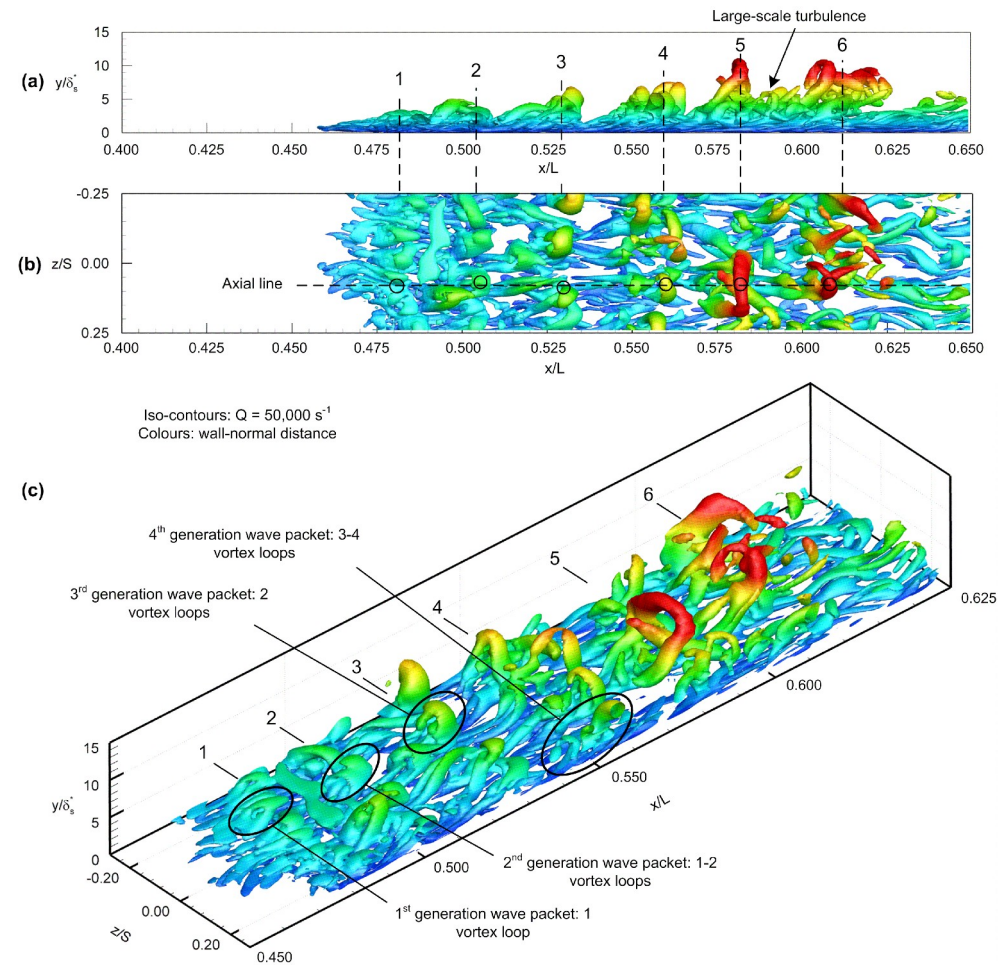
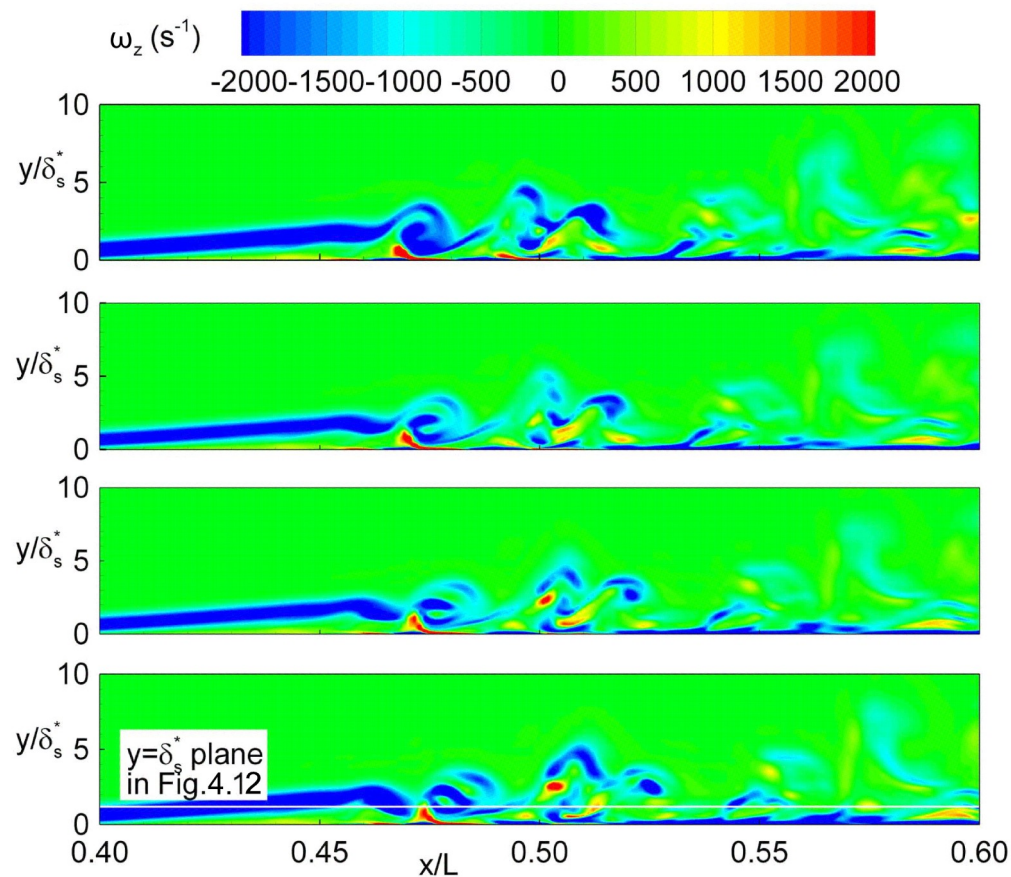
Przepływ
stacjonarny
(steady state flow)
($Re = 0.038$).



Przepływ
niestacjonarny
(unsteady state flow)
($Re = 195$).



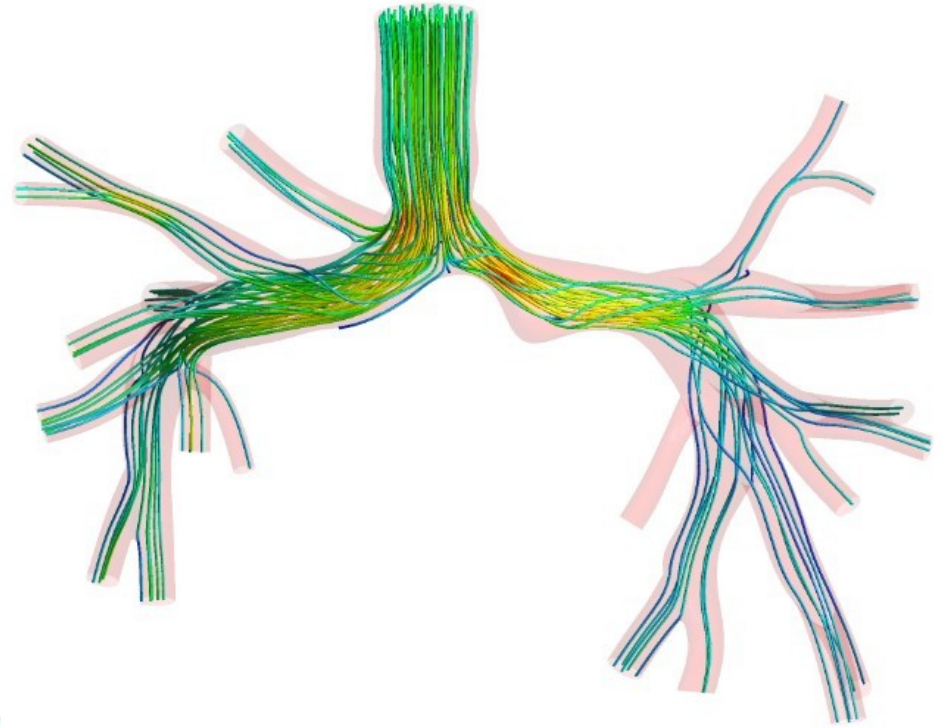
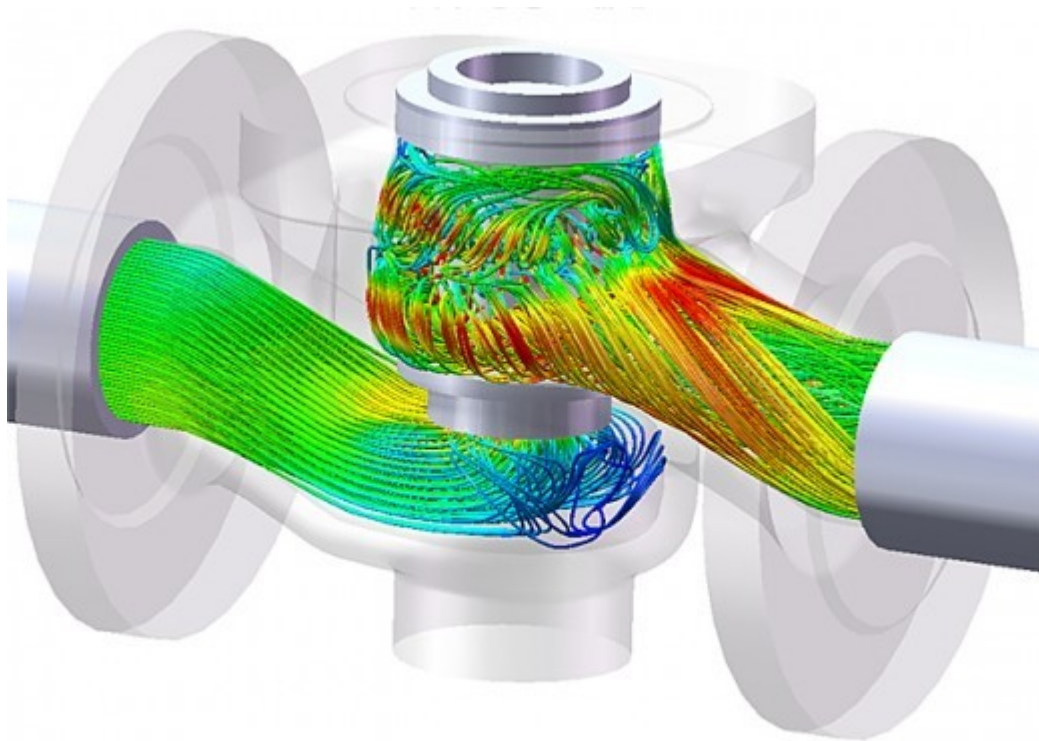
Podstawowa klasyfikacja przepływów



Przepływ laminarny i turbulentny
(laminar flow, turbulent flow).

Podstawowa klasyfikacja przepływów

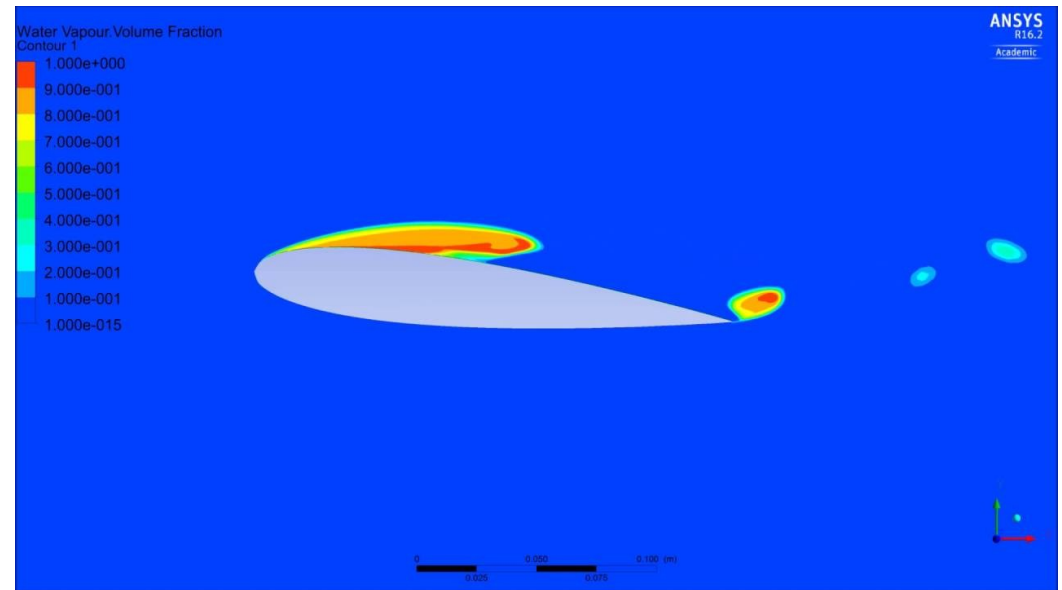
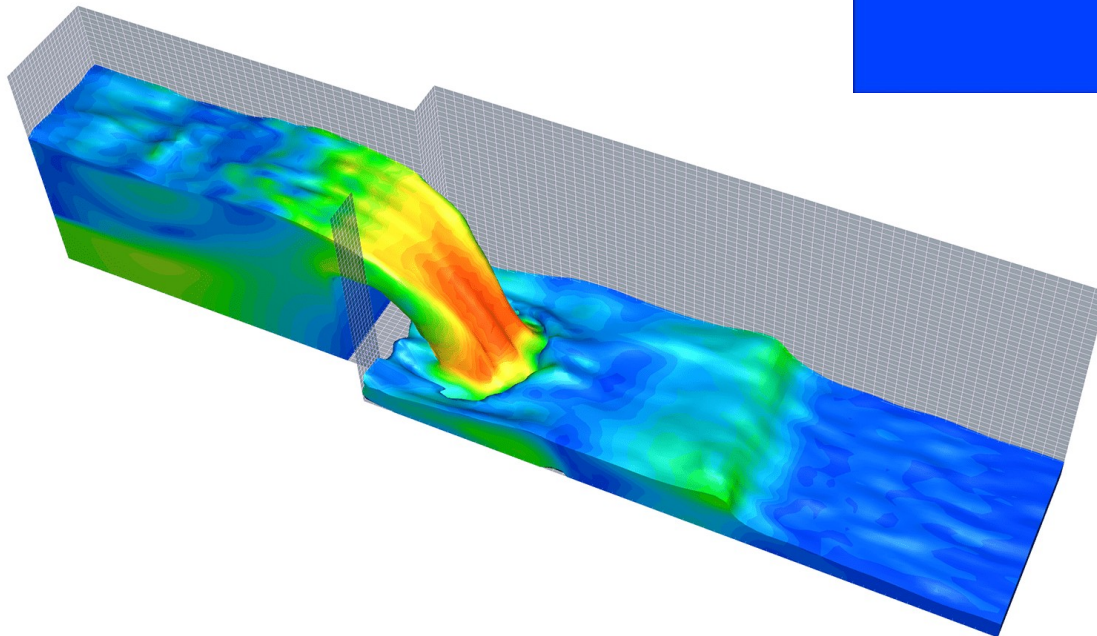
Przepływ newtonowski
(newtonian flow).



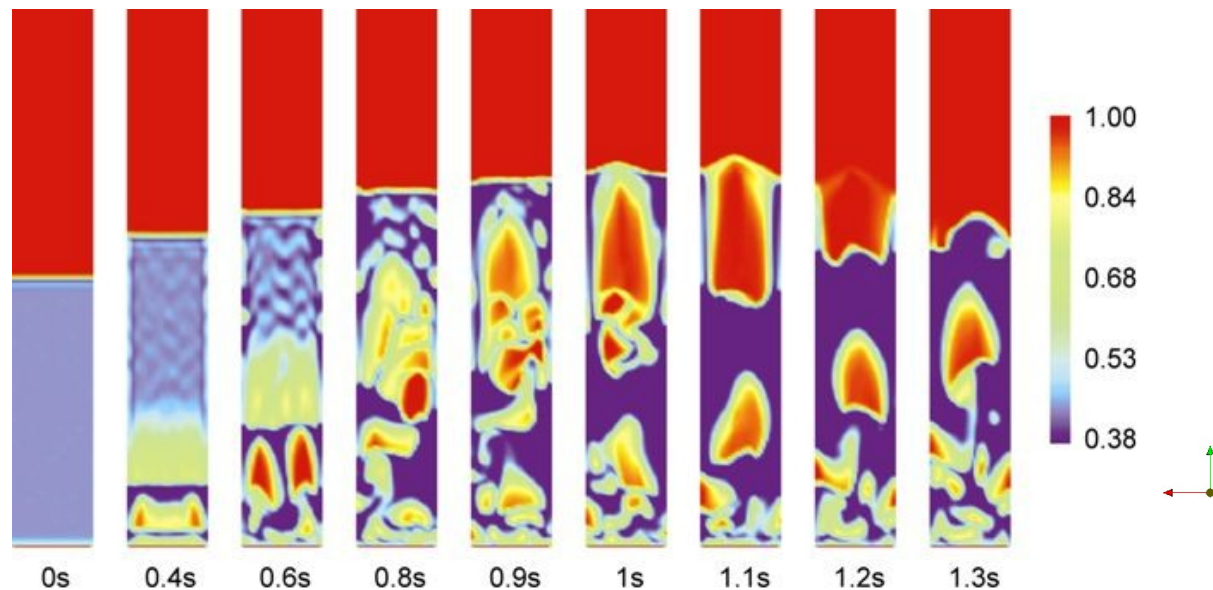
Przepływ nienewtonowski
(non-newtonian flow).

Podstawowa klasyfikacja przepływów

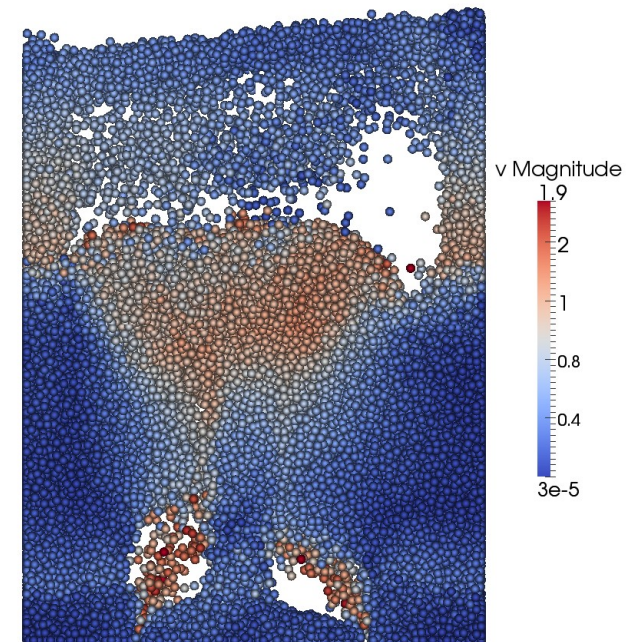
Przepływy jedno- i wielofazowe
(multiphase flows).



Podstawowa klasyfikacja przepływów



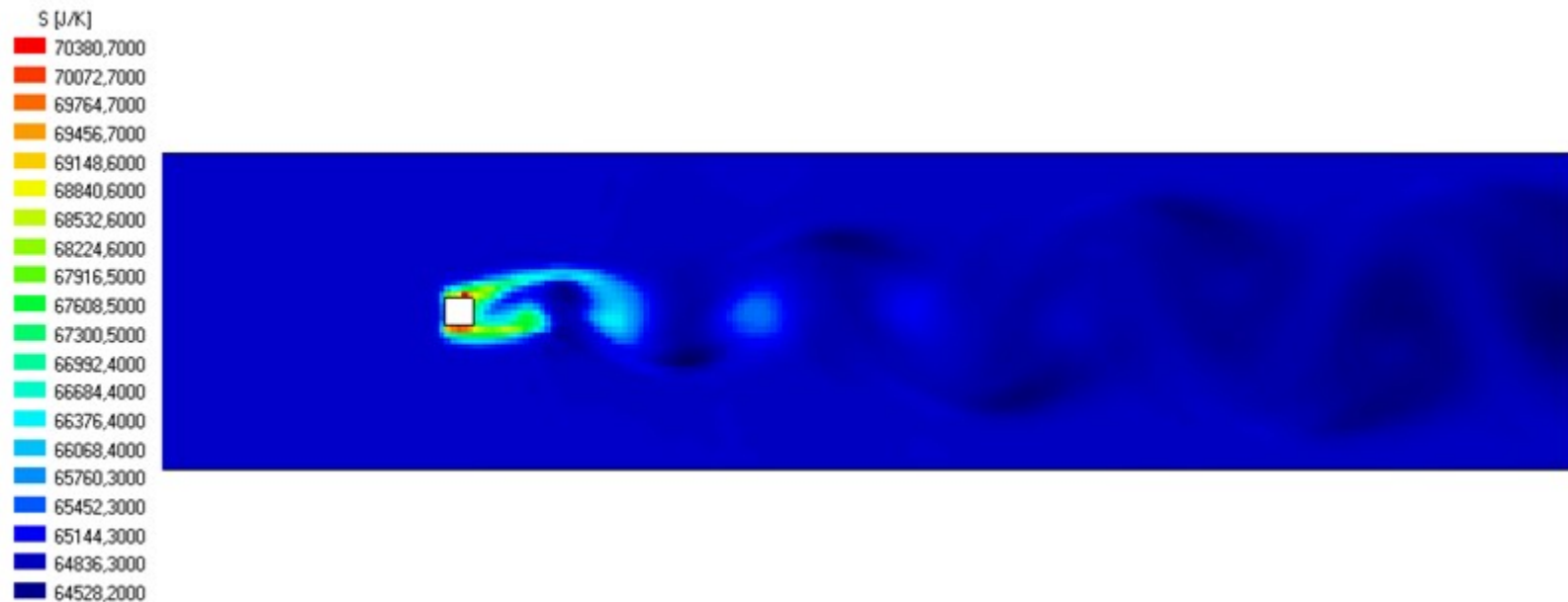
Przepływy homogeniczne
(fluidyzacja – podejście Eulera).



Przepływy niehomogeniczne
(fluidyzacja – podejście mieszane:
Eulera (FVM) i Lagrange'a (DEM)).

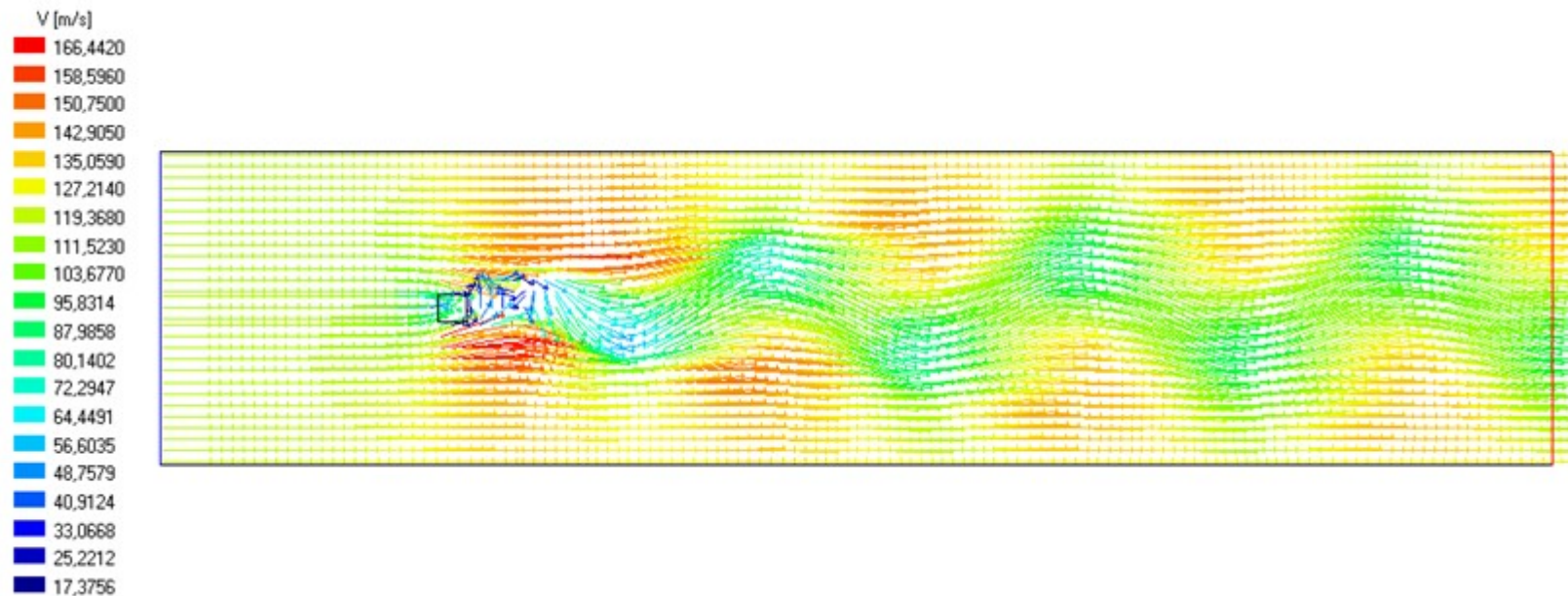
Dodatkowe pojęcia

Wielkość skalarną U , która w każdym punkcie przestrzeni przybiera oznaczoną wartość, nazywamy **funkcją skalarną** lub **polem skalarnym**.



Dodatkowe pojęcia

Wielkość wektorową W , która w każdym punkcie przestrzeni przybiera oznaczoną wartość, nazywamy **funkcją wektorową** lub **polem wektorowym**.

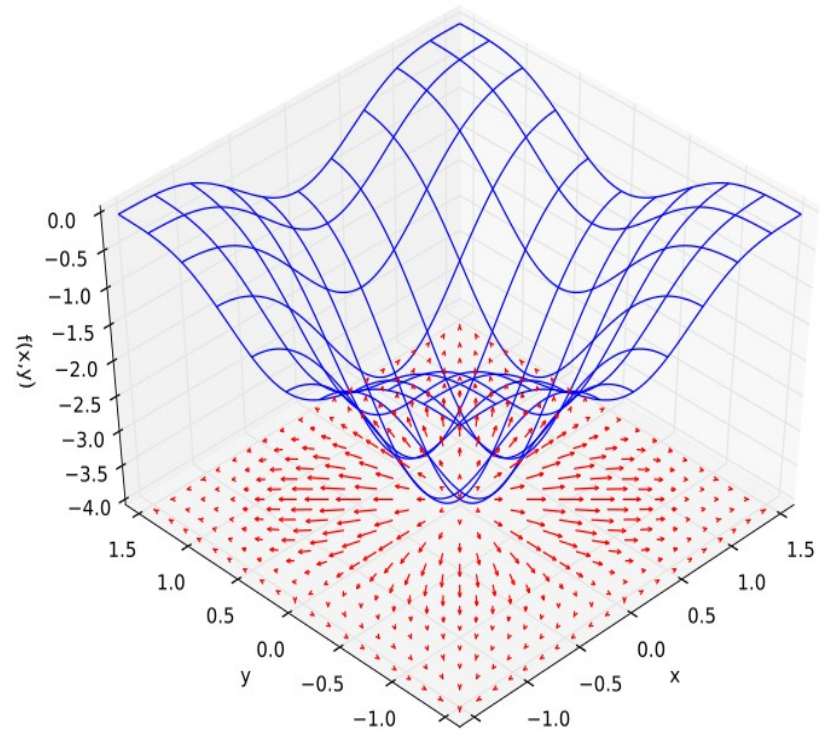


Dodatkowe pojęcia

Gradient pola skalarnego U , oznaczony symbolem $\text{grad}(U)$ lub ∇U , jest to wektor określony w każdym punkcie pola, mający kierunek zgodny z kierunkiem normalnej do powierzchni równych wartości pola, zorientowany w kierunku wzrastania funkcji U i mający długość $\partial U / \partial n$ (gdzie n jest współrzędną).

$$\text{grad}(U) = \vec{n} \frac{\partial U}{\partial n}$$

$$\text{grad}(U) = i \frac{\partial U}{\partial x} + j \frac{\partial U}{\partial y} + k \frac{\partial U}{\partial z}$$

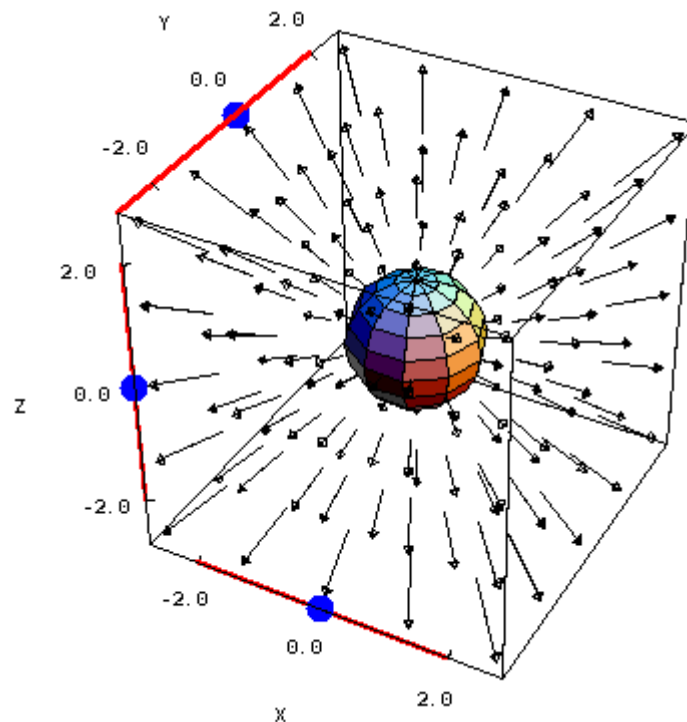


Dodatkowe pojęcia

Dywergencja albo **rozbieżność** pola wektorowego W , oznaczona symbolem $\text{div}(W)$ lub ∇W , jest to skalar określony w każdym punkcie pola, stanowiący pochodną przestrzenną skalarną pola wektorowego w danym punkcie.

$$\text{div}(W) = \lim_{V \rightarrow 0} \left(\frac{1}{V} \int_S W dS \right)$$

$$\text{div}(W) = \frac{\partial W_x}{\partial x} + \frac{\partial W_y}{\partial y} + \frac{\partial W_z}{\partial z}$$



Dodatkowe pojęcia

Wirowością albo **rotacją pola wektorowego** W , oznaczoną symbolem $\text{rot}(W)$ lub $\nabla \times W$, nazywamy wektor określony w każdym punkcie pola i stanowiący pochodną przestrzenną wektorową tego pola, wziętą ze znakiem przeciwnym.

$$\text{rot}(W) = \lim_{V \rightarrow 0} \left(\frac{1}{V} \int_S W \times dS \right)$$

$$\text{rot}(W) = i \left(\frac{\partial W_z}{\partial y} - \frac{\partial W_y}{\partial z} \right) + j \left(\frac{\partial W_x}{\partial z} - \frac{\partial W_z}{\partial x} \right) + k \left(\frac{\partial W_y}{\partial x} - \frac{\partial W_x}{\partial y} \right)$$

Dodatkowe pojęcia

Operator Hamiltona – wektor symboliczny zastępujący oznaczenia grad, dyw i rot, przyjmujący znaczenie w zależności od kontekstu:

$$\nabla U = \text{grad}(U) \qquad \nabla W = \text{div}(W) \qquad \nabla \times W = \text{rot}(W)$$

podstawowe operacje na operatorze:

$$\nabla(C) = 0$$

$$\nabla(C \cdot U) = C \cdot \nabla(U)$$

$$\nabla(U_1 + U_2) = \nabla(U_1) + \nabla(U_2)$$

stosowanie operatora na funkcji złożonej:

$$\nabla(X Y Z) = \nabla(\check{X} Y Z) + \nabla(X \check{Y} Z) + \nabla(X Y \check{Z}) = Y Z \nabla(\check{X}) + X Z \nabla(\check{Y}) + X Y \nabla(\check{Z})$$

Dodatkowe pojęcia

Twierdzenie Greena-Gaussa-Ostrogradzkiego – jeżeli powierzchnia S , identyfikowana wektorem kierunku normalnego $\vec{n}$, otacza jednospójny obszar V w polu skalarnym lub wektorowym W , to zachodzi zależność:

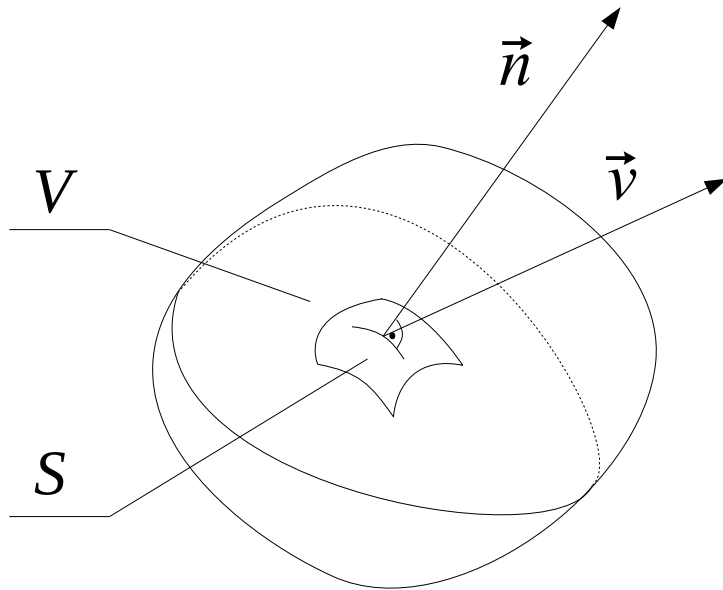
$$\int_S (W \cdot \vec{n}) dS = \int_V (\operatorname{div}(W)) dV$$

Twierdzenie Stokesa – jeżeli zamknięta krzywa l , identyfikowana wektorem kierunku normalnego $\vec{n}$, otacza jednospójny płat powierzchni S w polu wektorowym W , to zachodzi zależność

$$\int_l (W \cdot \vec{n}) dl = \int_A (\operatorname{div}(W)) dA$$

Dodatkowe pojęcia

Twierdzenie transportu Reynoldsa – szybkość zmian ekstensywnej wartości Φ w układzie jest równa szybkości zmian ilości tej wartości w objętości kontrolnej oraz zmianie szybkości przepływu tej wartości przez powierzchnię kontrolną



$$\frac{d(\Phi)}{dt} = \int_V \frac{\partial \Phi}{\partial t} dV + \int_S (\Phi \vec{v}) \cdot \vec{n} dS$$



UNIVERSITY OF WARMIA AND MAZURY IN OLSZTYN
The Faculty of Technical Sciences
POLAND, 10-957 Olsztyn, M. Oczapowskiego 11
tel.: (48)(89) 5-23-32-40, fax: (48)(89) 5-23-32-55
URL: <http://www.uwm.edu.pl/edu/sobieski/> (in Polish)



Dziękuję za uwagę

Wojciech Sobieski

Olsztyn, 2003-2026