



UNIVERSITY OF WARMIA AND MAZURY IN OLSZTYN
The Faculty of Technical Sciences
POLAND, 10-957 Olsztyn, M. Oczapowskiego 11
tel.: (48)(89) 5-23-32-40, fax: (48)(89) 5-23-32-55
URL: <http://www.uwm.edu.pl/edu/sobieski/> (in Polish)



Obliczeniowa Dynamika Płynów

Computational Fluid Dynamics – CFD

**Proces modelowania numerycznego
(wersja skrócona)**

wersja: 5 lutego 2026

Wojciech Sobieski

Olsztyn, 2003-2026

Etapy procesu modelowania numerycznego

Etapy procesu modelowania numerycznego:

- **przygotowanie (preprocessing):**

1. określenie geometrii domeny obliczeniowej
2. dyskretyzacja domeny obliczeniowej
3. wybór modelu matematyczno-fizycznego
4. definiowanie zestawu domknięć
5. definiowanie parametrów materiałowych
6. określenie warunków brzegowych
7. określenie warunków początkowych

Podstawowy
warunek,
umożliwiający
rozpoczęcie
analizy
numerycznej.

fizyka zjawisk,
matematyka ich opisu

- **przeprowadzenie obliczeń (solving):**

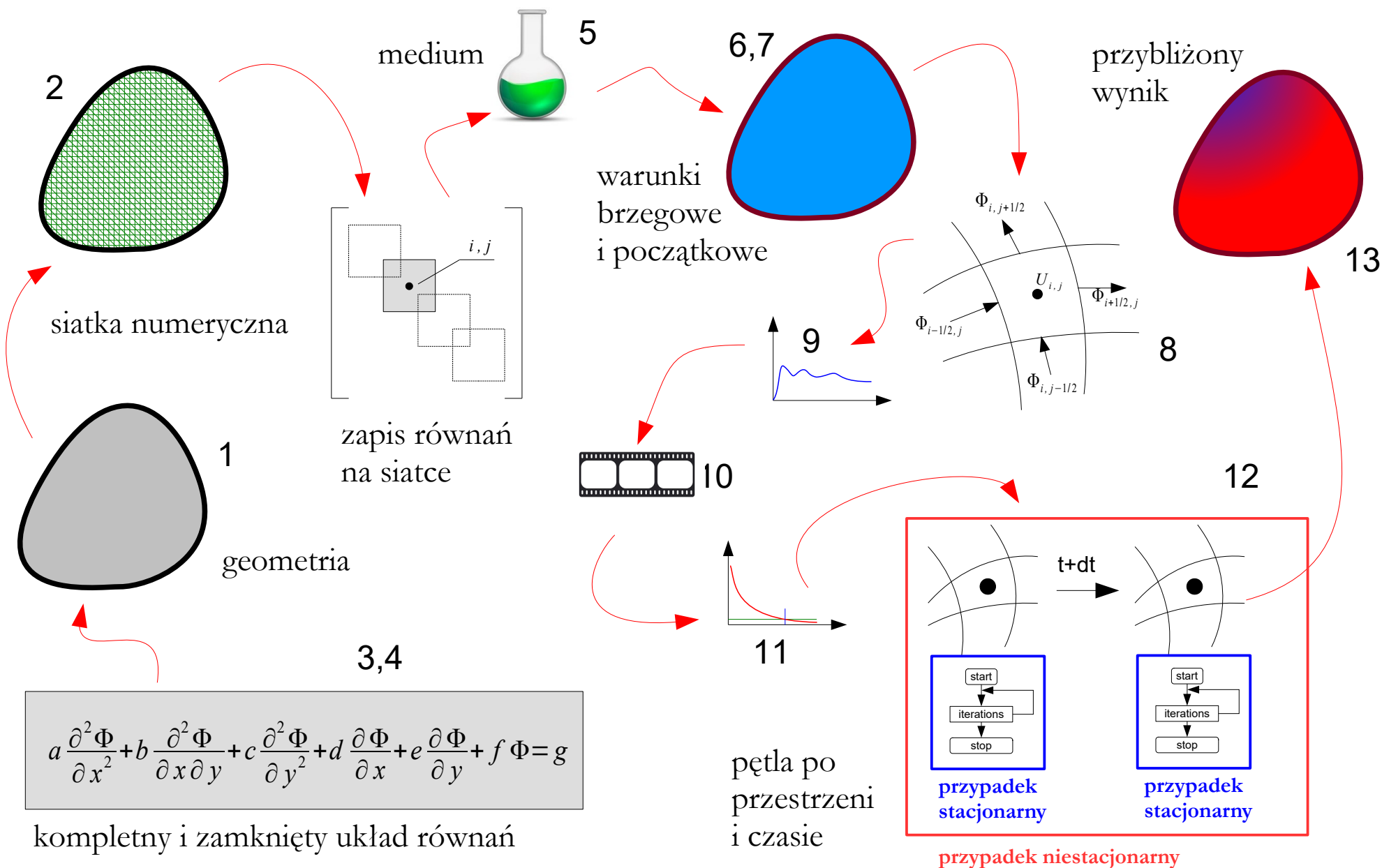
8. określenie technik numerycznych
9. określenie szczegółów monitoringu procesu obliczeniowego
10. określenie szczegółów rejestracji wyników
11. określenie warunku zakończenia obliczeń
12. przeprowadzenie i monitoring procesu obliczeń

numeryka,
informatyka

- **analiza i obróbka wyników (postprocessing):**

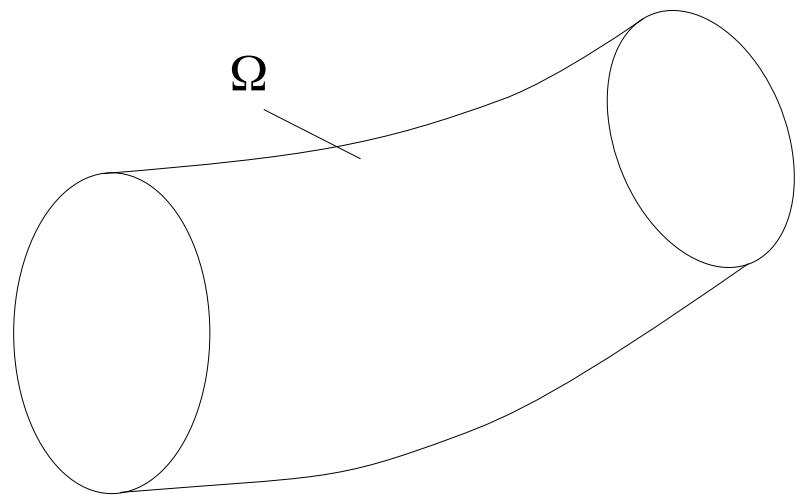
13. wizualizacja, analiza i obróbka wyników

Etapy procesu modelowania numerycznego

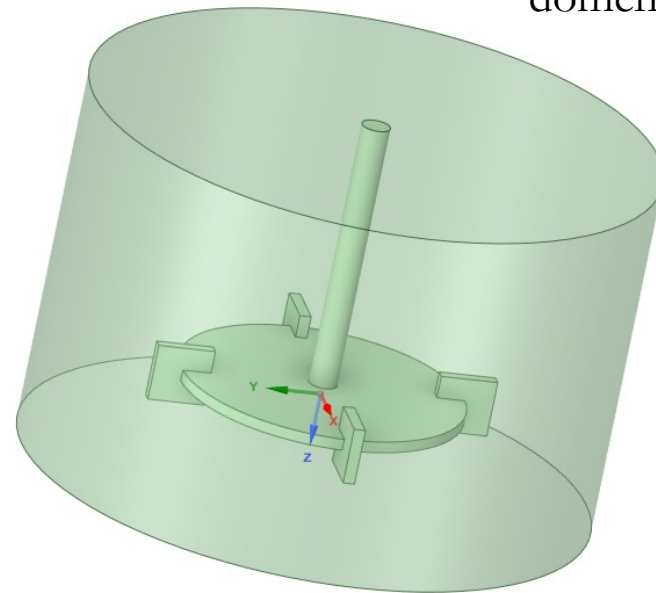


Domena obliczeniowa

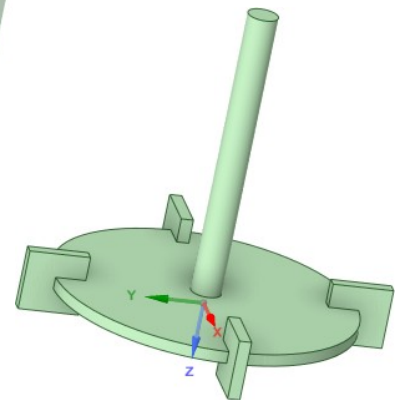
Domena obliczeniowa – przestrzeń (Ω) będąca wirtualną reprezentacją geometrii (całości lub fragmentu) układu rzeczywistego, przygotowana na potrzeby analiz numerycznych.



Schemat domeny obliczeniowej
(tu w kontekście mechaniki płynów).



domena: obszar analizy

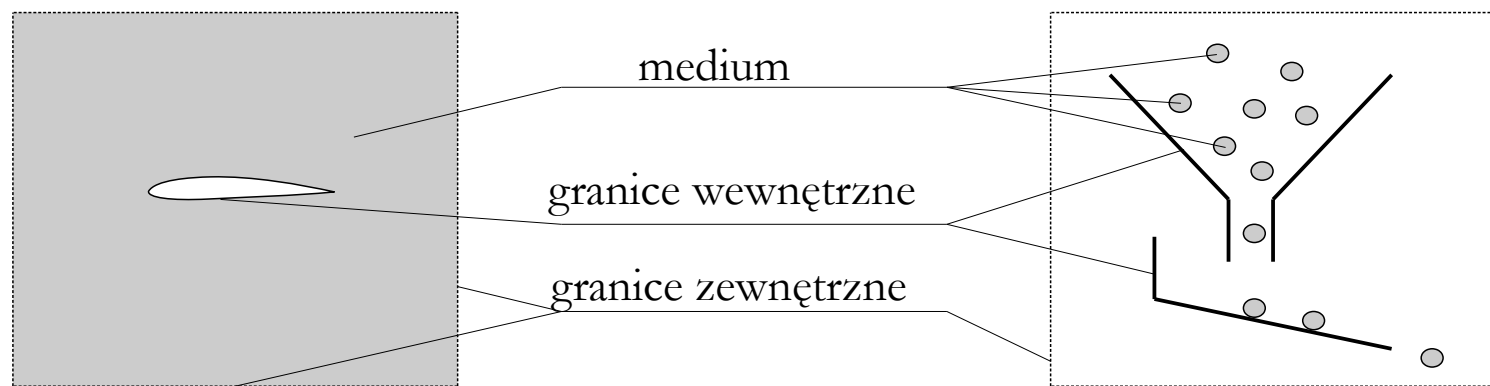


model 3D

Określenie geometrii domeny obliczeniowej

1. Określenie geometrii domeny obliczeniowej:

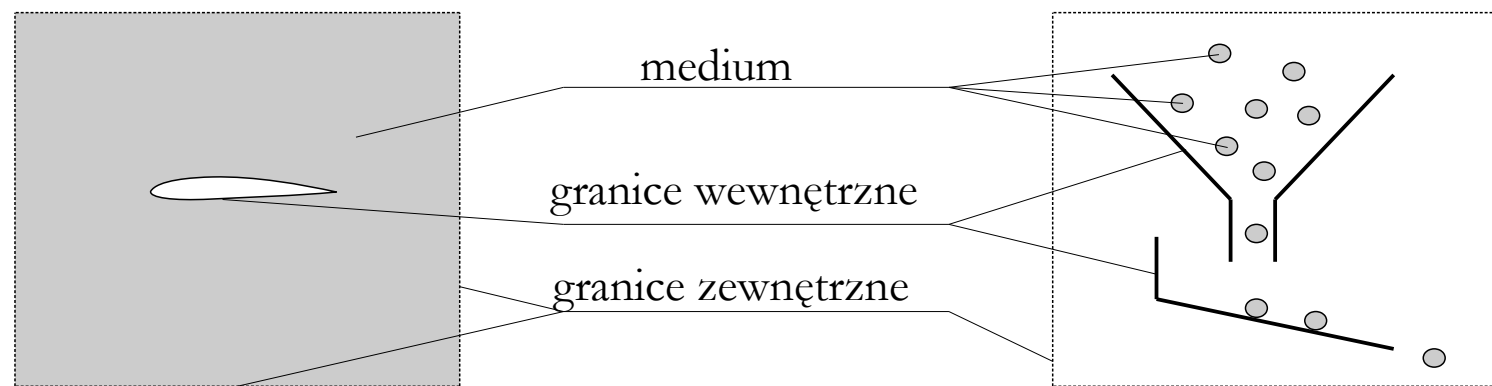
- W metodach siatkowych, takich jak Metoda Różnic Skończonych, Metoda Objętości Skończonych, Metoda Zanurzonego Brzegu, Metoda Elementów Skończonych, Metoda Elementów Brzegowych czy Metoda Gazu Sietowego Boltzmanna, granice domeny muszą być określone jawnie. Oznacza to, że należy wskazać jednoznacznie zamkniętą **powierzchnię** (w 2D) lub **bryłę** (w 3D), wewnątrz której znajduje się medium, dla którego mają być rozwiązywane równania zachowania.



Określenie geometrii domeny obliczeniowej

1. Określenie geometrii domeny obliczeniowej, cd:

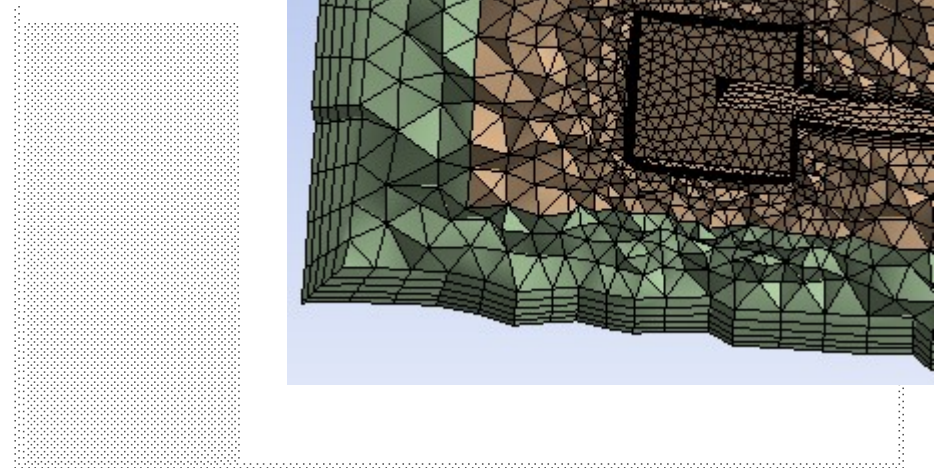
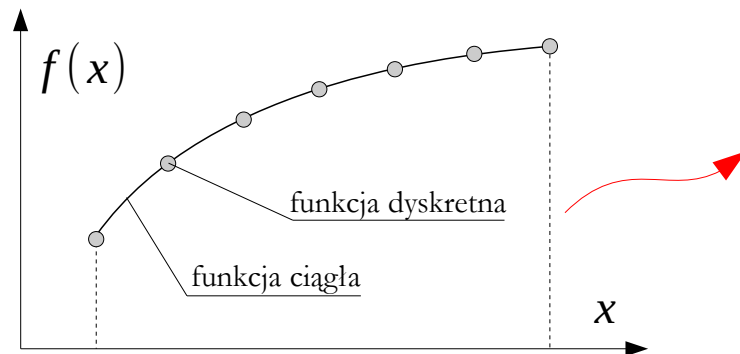
- W metodach bezsiatkowych, takich jak Metoda Cząstek Wygładzonych czy Metoda Elementów Dyskretnych, domena nie musi posiadać jawnie określonych granic zewnętrznych. Oznacza to, że rozmiar domeny zależy od bieżącej lokalizacji obiektów biorących udział w symulacji. Alternatywnie można podać maksymalne granice zewnętrzne, po przekroczeniu których obiekt przestaje brać udział w symulacji.



Dyskretyzacja domeny obliczeniowej

2. Dyskretyzacja domeny obliczeniowej:

- Zależnie od zastosowanej metody numerycznej, domenę należy podzielić na węzły, piksele, woksele, elementy lub komórki, stosując topologię **strukturalną**, **niestrukturalną** lub **mieszaną**. Istotne jest aby rodzaj, gęstość oraz jakość siatki były odpowiednie do wykorzystywanych metod i technik numerycznych. Geometria służy zasadniczo do generacji siatki numerycznej i później nie jest już przeważnie potrzebna, chyba że do celów wizualizacyjnych. Zagadnienie dyskretyzacji domeny dotyczy zasadniczo metod siatkowych.



Wybór modelu matematyczno-fizycznego

3. Wybór modelu matematyczno-fizycznego:

- Wybór modelu zależy w głównej mierze od założeń, kontekstu badań, przyjętego opisu matematycznego (Eulera czy Lagrange'a), liczby faz (mediów), zestawu zjawisk, jakie mają być uwzględnione w modelu i wielu innych czynników. Problem komplikuje się jeszcze w przypadku układów wielofazowych, w których można nieraz stosować kilka alternatywnych, lecz istotnie różniących się koncepcji, np. Model Homogeniczny, Model Euler-Euler, Model Euler-Lagrange.

$$a \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + d \frac{\partial \Phi}{\partial x} + e \frac{\partial \Phi}{\partial y} + f \Phi = g$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$\Delta < 0$ - równania eliptyczne, np. równanie Laplace'a:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0$$

$\Delta > 0$ - równania hiperboliczne, np. równanie falowe:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + a \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0, a > 0$$

$\Delta = 0$ - równania paraboliczne, np. równanie dyfuzji:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \alpha \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 0$$

Klasy równań
różniczkowych.

Definiowanie zestawu domknień

4. Definiowanie zestawu domknień:

- Liczba i stopień komplikacji domknień zależy głównie od przyjętych założeń oraz możliwości zastosowanego oprogramowania. Szczególnie istotne jest opisanie zachowania się badanych mediów pod wpływem działania na nie sił normalnych i stycznych.

Domknięcie – jest to model matematyczny opisujący jednostkowe zjawisko lub proces, uzupełniający podstawowy układ równań bilansowych.

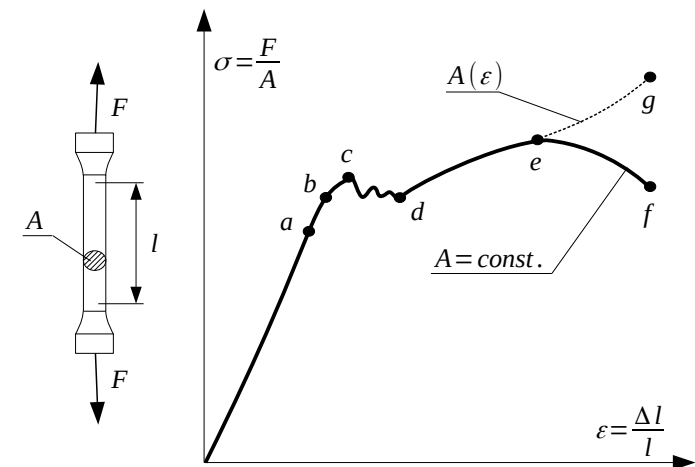
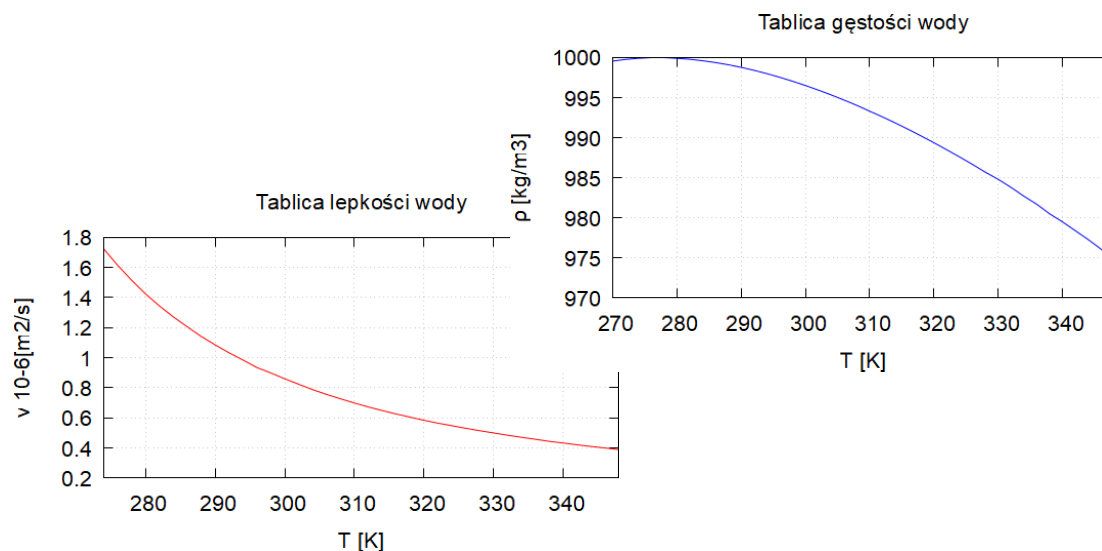
$$\frac{c_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1 = \frac{c_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + z_2$$

Równanie jest jedno, a zmiennych wiele – aby je rozwiązać trzeba podać dodatkowe zależności matematyczne (domknięcia).

Definiowanie parametrów materiałowych

5. Definiowanie parametrów materiałowych:

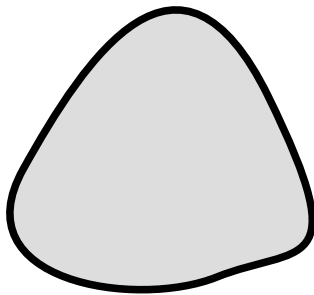
- Liczba parametrów zależy głównie od stopnia komplikacji modelu matematyczno-fizycznego. W szczególności ważne jest, czy analiza obejmuje dynamikę czy termodynamikę układu, a także czy stosowane modele są liniowe czy też nieliniowe. Z reguły najważniejsze parametry materiałowe to gęstość i lepkość dynamiczna w przypadku płynów oraz moduł Younga i liczba Poissona w przypadku ciał stałych. Parametry materiałowe mogą być stałe, lub mogą być funkcją jakiejś innej wielkości: temperatury, czasu, itp.



Określenie warunków brzegowych

6. Określenie warunków brzegowych:

- Warunki brzegowe mogą być stałe lub zmienne w czasie. W szczególności należy określić które linie (w 2D) lub powierzchnie (w 3D) graniczne domeny są ściankami, elementami symetrii, wlotami, wylotami itp. Istnieje wiele rodzajów warunków brzegowych, które stosuje się zależnie od fizyki zjawisk, podejścia obliczeniowego, warunków stabilności obliczeń, dostępności danych i wielu innych czynników. Jednym z najczęściej stosowanych warunków brzegowych jest zerowanie normalnej składowej prędkości na powierzchni ściany, co oznacza, że obiekt lub strumień nie może przejść przez jej granicę.



Obszar zamknięty (równania eliptyczne)



Obszar otwarty (równania paraboliczne i hiperboliczne)

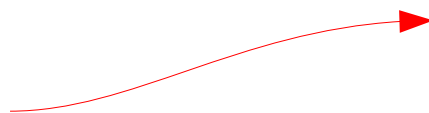
Określenie warunków brzegowych

Równania różniczkowe o pochodnych cząstkowych posiadają zazwyczaj wiele rozwiązań (brak rozwiązania ogólnego). Z tego względu poszukuje się takich rozwiązań, które spełniają specjalne warunki brzegowe.

Warunki brzegowe:

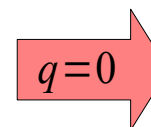
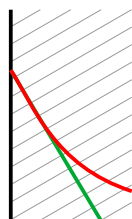
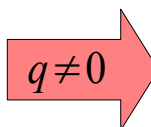
- Dirichleta:

$$f(S) = C$$



- Neumana:

$$\frac{\partial f(S)}{\partial n} = C$$



- mieszane:

$$\frac{\partial f(S)}{\partial n} + k f(S) = C, k > 0$$

$$\frac{dT}{dt} \neq 0$$

$$\frac{dT}{dt} = 0$$

filmy



Określenie warunków brzegowych

Podstawowe warunki brzegowe programu ANSYS Fluent 2022 R2:

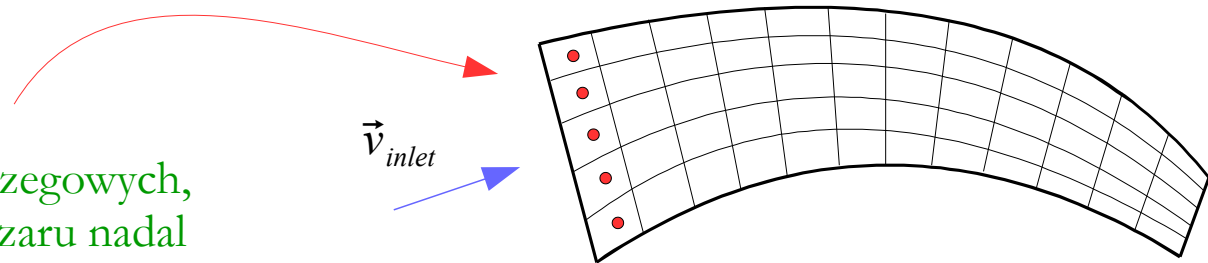
- **axis** – warunek brzegowy stosowany w modelach z symetrią osiową.
- **symmetry** – warunek brzegowy stosowany w modelach z symetrią płaszczyznową.
- **interface** – warunek określający powierzchnie wspólne różnych stref siatki (zawsze po 2).
- **pressure-inlet** – określa ciśnienie na wlocie.
- **pressure-outlet** – określa ciśnienie na wylocie.
- **pressure-far-field** – określa tzw. dalekie pole ciśnień, stosowany w aerodynamice.
- **outflow** – warunek na wylocie, gdy nie jest znane ciśnienie wyjściowe.
- **velocity-inlet** – określa prędkość przepływu na wlocie.
- **mass-flow-inlet** – określa strumień masy na wlocie.
- **mass-flow-outlet** – określa strumień na masy wylocie.
- **wall** – definiuje ściankę.
- **inlet-vent** – wlot wentylacyjny z określonym współczynnikiem strat, kierunkiem przepływu oraz ciśnieniem i temperaturą otoczenia (wlotu).
- **outlet-vent** – wylot wentylacyjny z określonym współczynnikiem strat oraz ciśnieniem i temperaturą otoczenia (wylotu).
- **intake-fan** – określa napływ powietrza przez wentylator lub wlot powietrza.
- **exhaust-fan** – określa wypływ powietrza generowany przez wentylator wywiewający.
- **overset** – warunek stosowany w modelach z ruchomymi siatkami.

Określenie warunków początkowych

7. Określenie warunków początkowych (inicjalizacja danych):

- Przed rozpoczęciem obliczeń niezbędne jest podanie początkowego pola prędkości (w odniesieniu do węzłów, komórek lub elementów dyskretnych), odkształceń (w odniesieniu do elementów skończonych) oraz ciśnień albo naprężeń (w odniesieniu do węzłów, komórek, elementów skończonych lub elementów brzegowych). W Metodzie Gazu Sieciowego Boltzmannna należy podać początkowy rozkład gęstości gazu w przestrzeni fazowej. Bardzo często warunki początkowe definiuje się na podstawie warunków brzegowych (bezpośrednio lub hybrydowo), dzięki czemu w polach skalarnych i wektorowych nie występują gwałtowne skoki wartości, negatywnie wpływające na stabilność obliczeń.

Po zadaniu warunków brzegowych,
komórki we wnętrzu obszaru nadal
mają nieokreślone wartości parametrów.



Określenie warunków początkowych

Program Drgania (Języki Programowania)

```
!wartości początkowe procesu iteracyjnego:
```

```
y = y0  
u = u0  
t = 0.
```

```
!początek pętli po czasie: -----  
do i=1,n
```

```
!wybór stałej tłumienia w zależności od kierunku ruchu:
```

```
if (u.gt.0) then  
  c = cd  
else  
  c = cg  
end if
```

```
!obliczenie pochodnych:
```

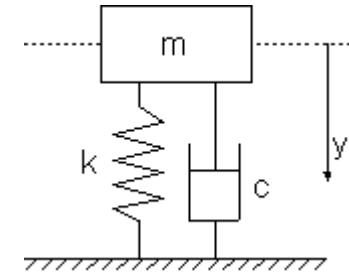
```
dydt = u  
dudt = -g - (k/m) * (y-w0) - c*u*abs(u)/m
```

```
!obliczenie nowych wartości zmiennych:
```

```
y = y+dydt*dt  
u = u+dudt*dt  
t = t+dt
```

```
end do
```

```
!koniec pętli po czasie: -----
```



$$\begin{cases} c = c_d \text{ dla } u > 0 \\ c = c_g \text{ dla } u < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = u \\ \frac{du}{dt} = -g - \frac{k}{m}(y - w_0) - \frac{c}{m}u|u| \end{cases}$$

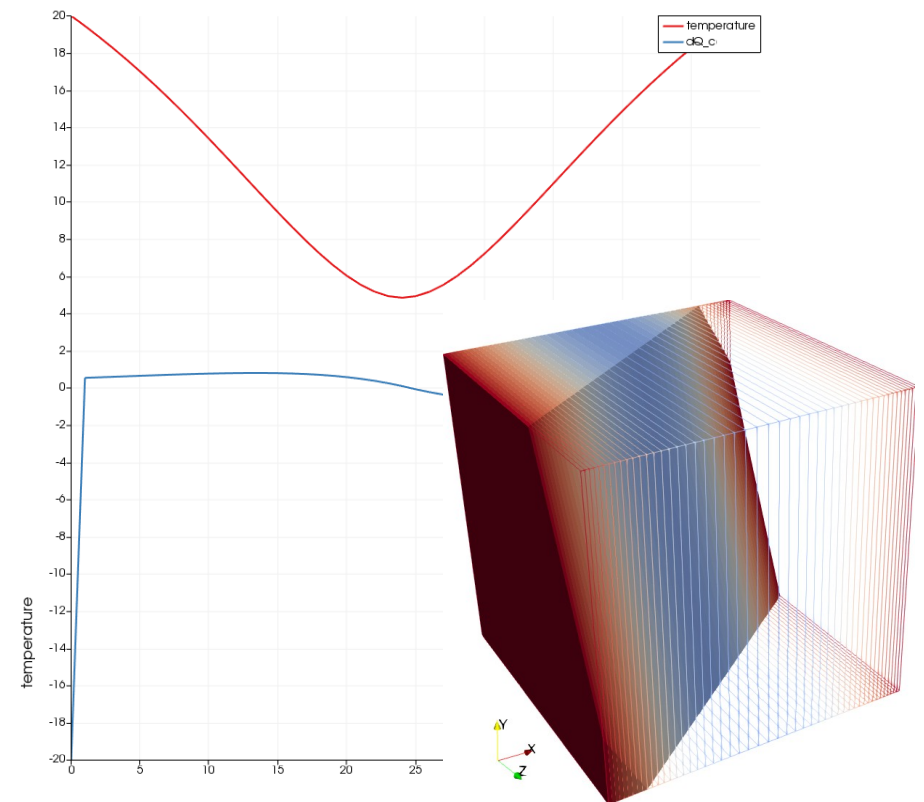
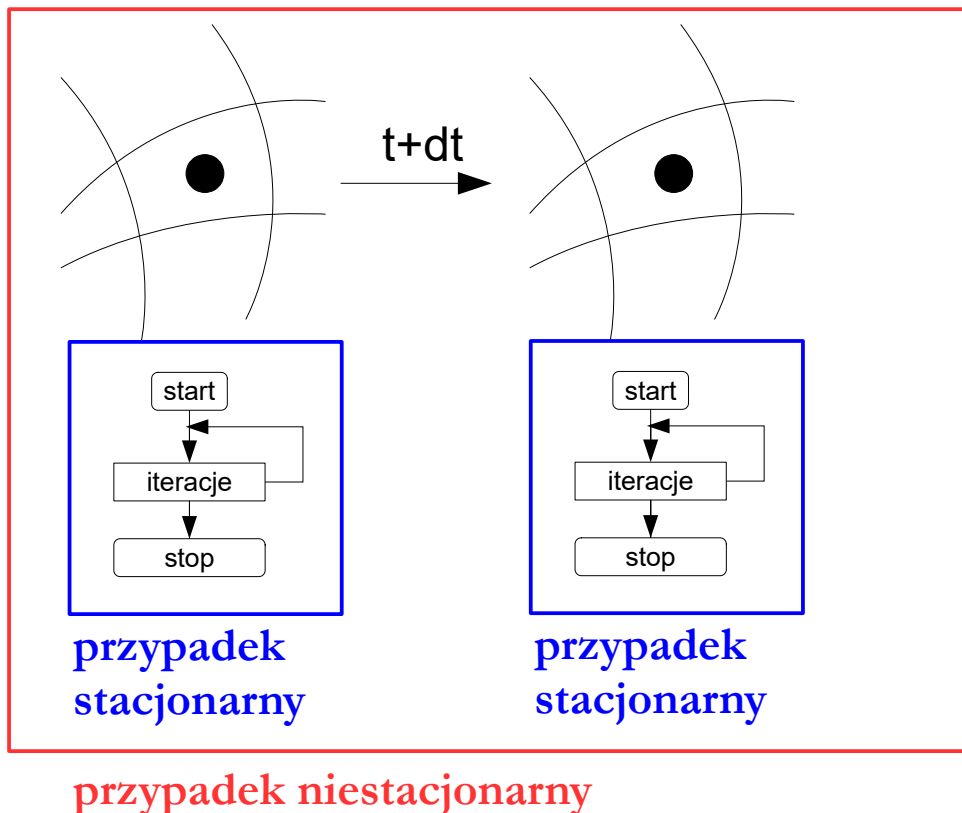
$$\begin{cases} y^n = y^{n-1} + \frac{dy}{dt} dt \\ u^n = u^{n-1} + \frac{du}{dt} dt \end{cases}$$

Podczas pierwszej iteracji wartość z kroku poprzedniego (o numerze **n-1**) nie istnieje!

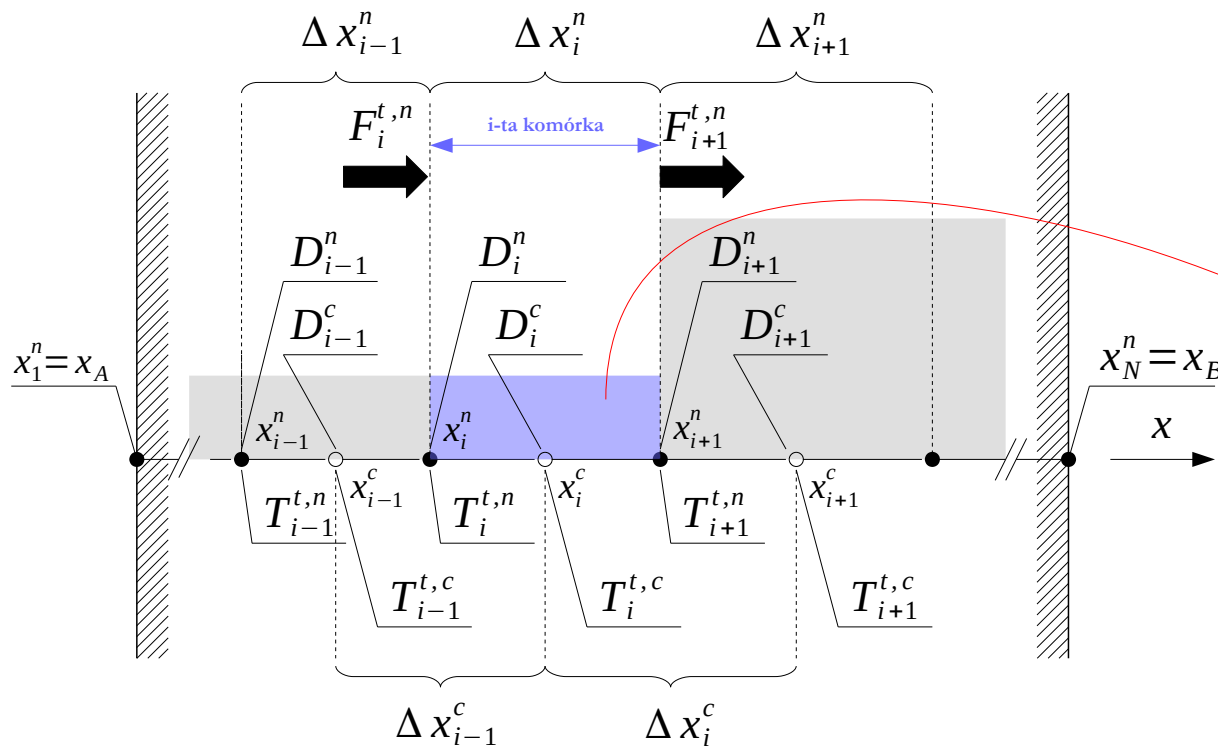
Określenie technik numerycznych

8. Określenie technik numerycznych:

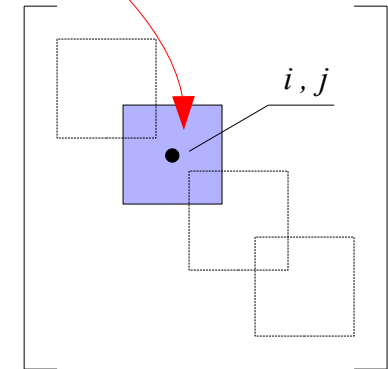
- W zakres wchodzi dobór schematów numerycznych i ich rzędów, sposobów dyskretyzacji w czasie, definicja wartości współczynników relaksacji, poziomu zbieżności itp.



Rozwiązywanie układów równań liniowych

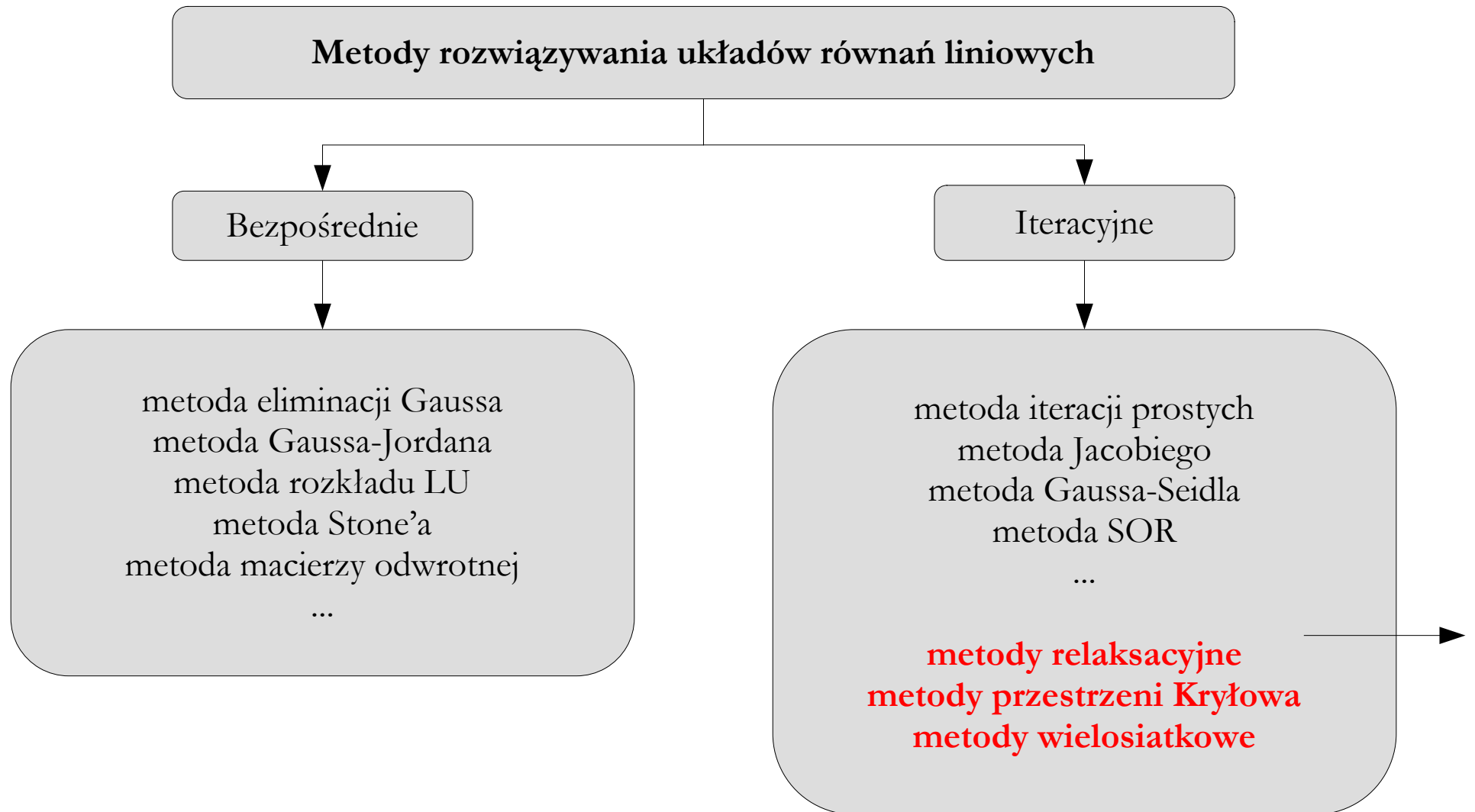


Zapis równań na siatkach numerycznych prowadzi do powstania zestawu równań liniowych (najczęściej o charakterze macierzy pasmowej), które trzeba rozwiązać.



$$\frac{-D_i^n}{\Delta x_{i-1}^n \Delta x_i^n} T_{i-1}^{t,c} + \left[\frac{D_i^n}{\Delta x_{i-1}^c \Delta x_i^n} + \frac{D_{i+1}^n}{\Delta x_i^c \Delta x_{i+1}^n} \right] T_i^{t,c} - \frac{D_{i+1}^n}{\Delta x_i^c \Delta x_{i+1}^n} T_{i+1}^{t,c} = 0$$

Rozwiązywanie układów równań liniowych



Rozwiązywanie układów równań liniowych

Metody relaksacyjne:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1N}x_N = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2N}x_N = b_2$$

...

$$a_{M1}x_1 + a_{M2}x_2 + \dots + a_{MN}x_N = b_M$$

$$\alpha_{i,j} = \frac{a_{i,j}}{a_{i,1}} \quad \beta_i = \frac{b_i}{a_{i,1}}$$

- wszystkie równania dzielimy przez ich pierwszy współczynnik
- wyrazy wolne przenosimy na lewą stronę

$$x_1 + \alpha_{12}x_2 + \dots + \alpha_{1N}x_N - \beta_1 = 0$$

$$x_1 + \alpha_{22}x_2 + \dots + \alpha_{2N}x_N - \beta_2 = 0$$

...

$$x_1 + \alpha_{M2}x_2 + \dots + \alpha_{MN}x_N - \beta_M = 0$$

Rozwiązywanie układów równań liniowych

Metody relaksacyjne:

$$A \cdot X = B$$

Macierzowa wersja zapisu
układu równań liniowych.

$$x_1 + \alpha_{12} x_2 + \dots + \alpha_{1N} x_N - \beta_1 = 0$$

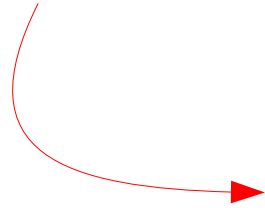
$$x_1 + \alpha_{22} x_2 + \dots + \alpha_{2N} x_N - \beta_2 = 0$$

...

$$x_1 + \alpha_{M2} x_2 + \dots + \alpha_{MN} x_N - \beta_M = 0$$

residua

- „strzelamy” wartości x -ów
(wynik będzie niedokładny
i powstaną reszty: „residua”)


$$x_1 + \alpha_{12} x_2 + \dots + \alpha_{1N} x_N - \beta_1 = r_1$$

$$x_1 + \alpha_{22} x_2 + \dots + \alpha_{2N} x_N - \beta_2 = r_2$$

...

$$x_1 + \alpha_{M2} x_2 + \dots + \alpha_{MN} x_N - \beta_M = r_M$$

Rozwiązywanie układów równań liniowych

Metody relaksacyjne:

$$x_1 + \alpha_{12} x_2 + \dots + \alpha_{1N} x_N - \beta_1 = r_1$$

$$x_1 + \alpha_{22} x_2 + \dots + \alpha_{2N} x_N - \beta_2 = r_2$$

...

$$x_1 + \alpha_{M2} x_2 + \dots + \alpha_{MN} x_N - \beta_M = r_M$$

r_i

3783945,124234
12763,836278
367,275612
11,987453
0,475832
0,003467
0,000541
0,000002

δ

Ważne, jaka jest precyzja zmiennych – pojedyncza czy podwójna!

STOP – większa dokładność nie jest potrzebna

$$x_i^{n+1} = x_i^n - \omega r_i^n$$

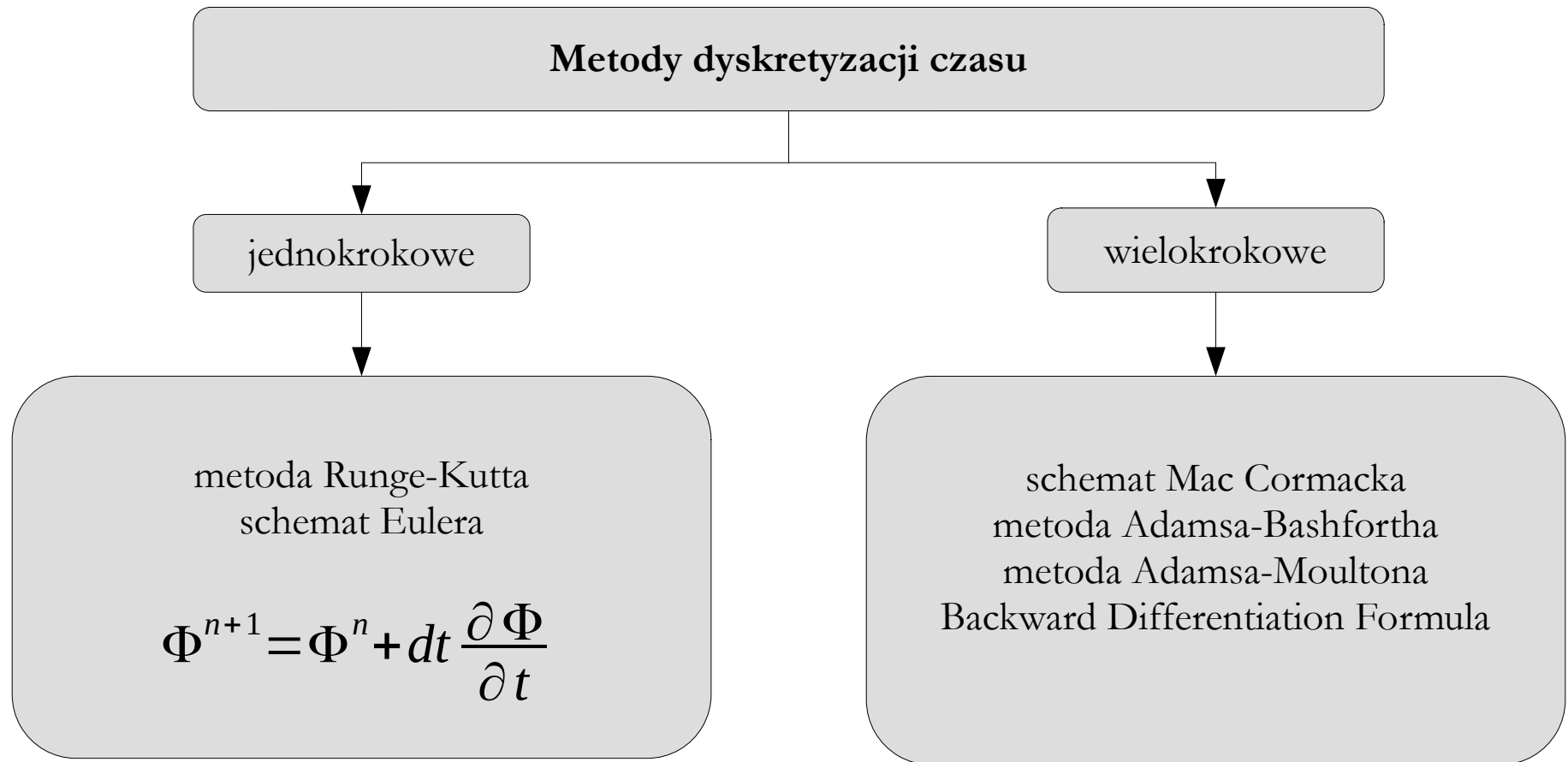
$$x_i^{n+1} = x_i^n - r_i^n$$

współczynnik relaksacji
 $0 < \omega < 1$

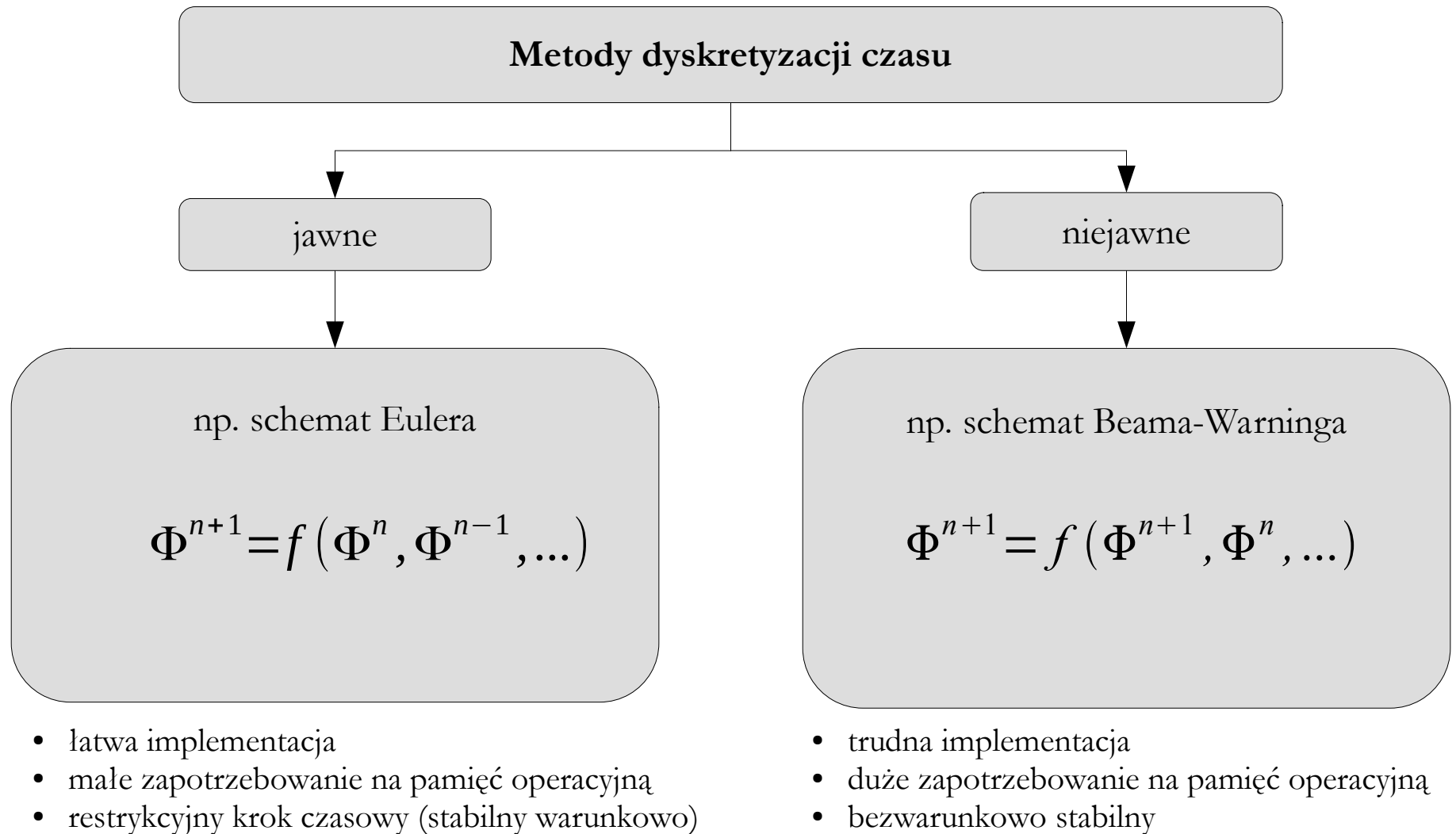
- od poprzednich wartości niewiadomych odejmujemy ich reszty – wynik odejmowania będzie stanowił nową propozycję wartości x-sów: obliczenia powtarzamy aż do uzyskania **zbieżności**

- resztę można pomnożyć przez pewien współczynnik (współczynnik relaksacji), którego odpowiedni dobór może znacznie skrócić czas obliczeń

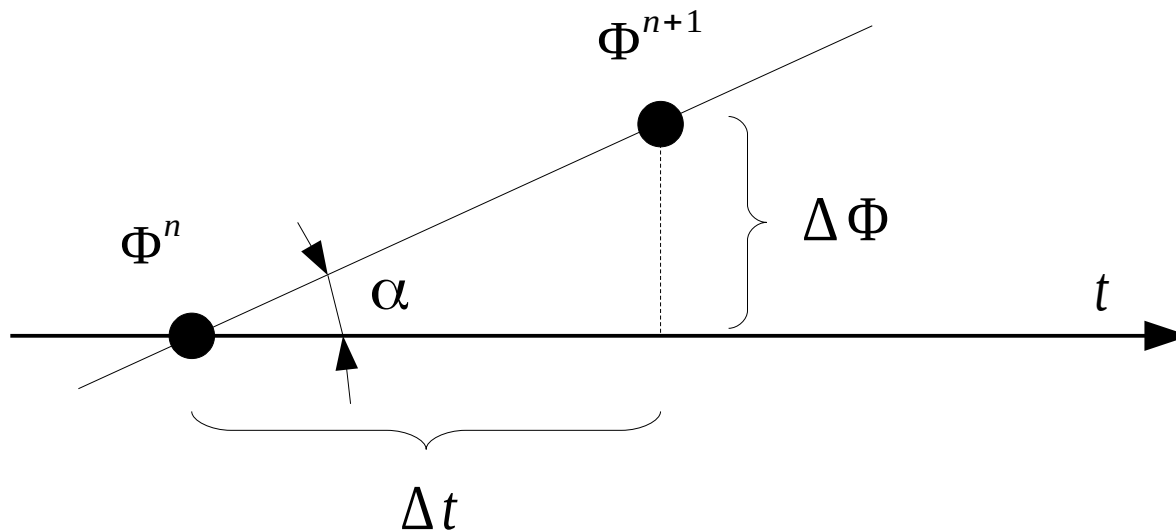
Dyskretyzacja czasu



Dyskretyzacja czasu



Dyskretyzacja czasu



Graficzna interpretacja
jawnego schematu Eulera

$$\Phi^{n+1} = \Phi^n + dt \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

tangens kąta α $\frac{\Delta \Phi}{\Delta t}$

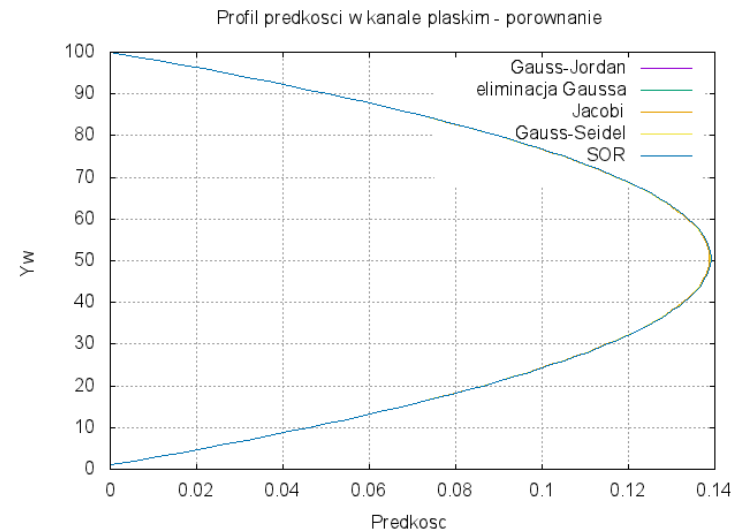
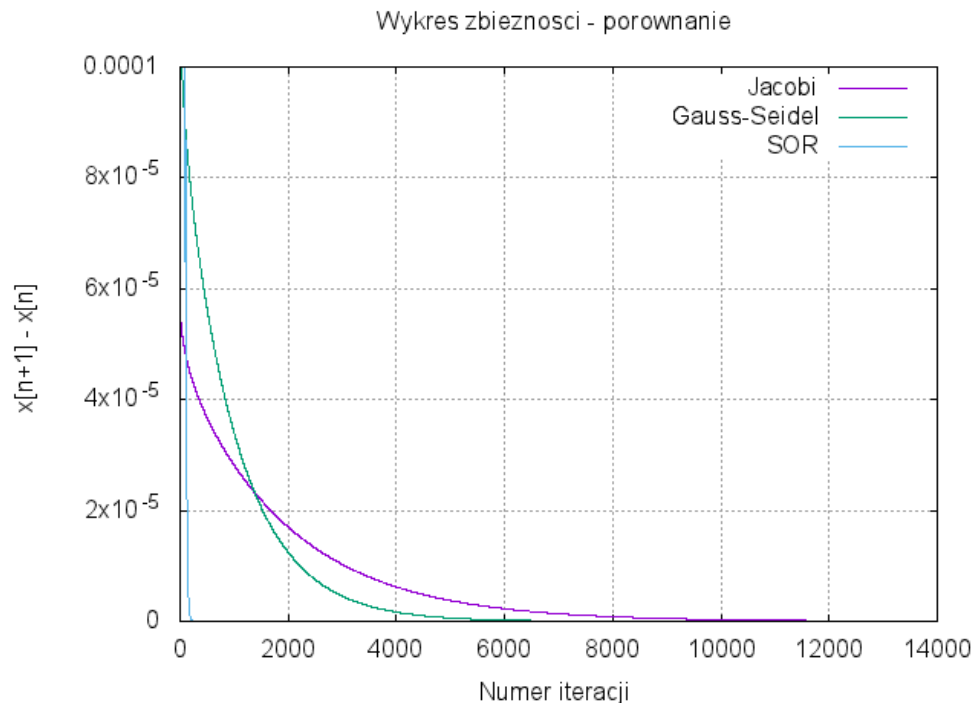
To, jaka będzie nowa wartość zmiennej (Φ^{n+1}) zależy od wartości bieżącej (Φ^n) oraz od:

- stopnia „stromości” zmian tej zmiennej (pochodnej, czyli tangensa kąta nachylenia),
- kroku, jaki się da w przód.

Określenie szczegółów monitoringu

9. Określenie szczegółów monitoringu procesu obliczeniowego:

- Najczęściej śledzeniu podlega sam przebieg symulacji, w szczególności przebieg rezyduów, lub też wartości wybranych parametrów (np. sił, momentów, naprężeń, porowatości itp.).

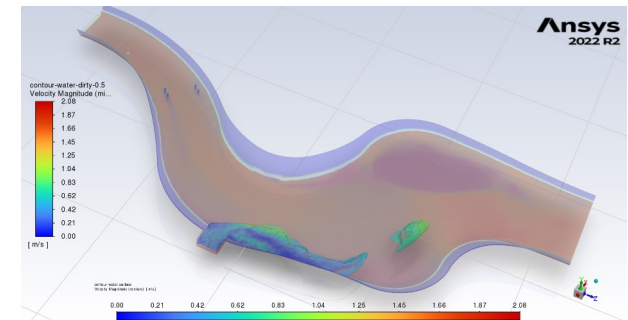
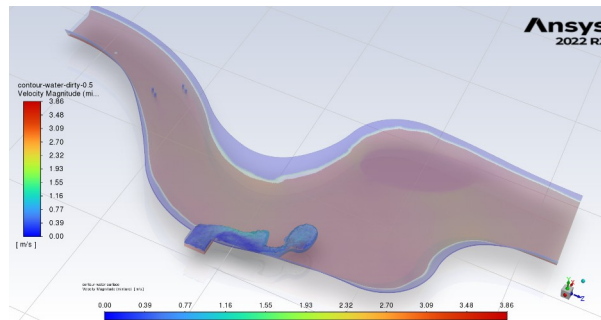
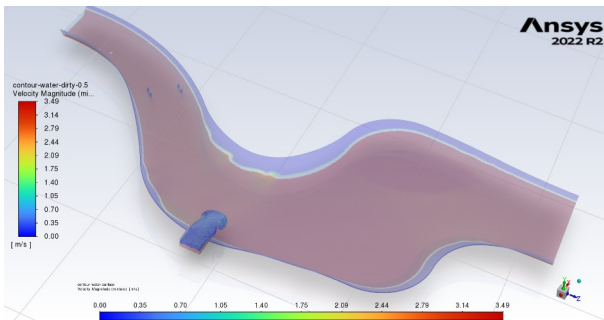


Przykład zdefiniowania monitorów do śledzenia wartości rezyduów [Wojciech Sobieski, program Profil].

Określenie szczegółów rejestracji wyników

10. Określenie szczegółów rejestracji wyników:

- Zazwyczaj w wyniku symulacji uzyskuje się zbiór pól skalnych (np. pole ciśnień lub naprężeń) i wektorowych (np. pole prędkości) oraz zapis działania narzędzi monitorujących przebieg obliczeń lub wartości wybranych parametrów. Dane te można zapisać w różnych formatach, obejmujących wszystkie możliwe, lub tylko wybrane wyniki. Większość programów przeznaczonych do przeprowadzania symulacji numerycznych umożliwia zapis wyników końcowych oraz zapis wyników pośrednich, co umożliwia obserwację przebiegu modelowanych zjawisk i procesów, a także wykonanie animacji.



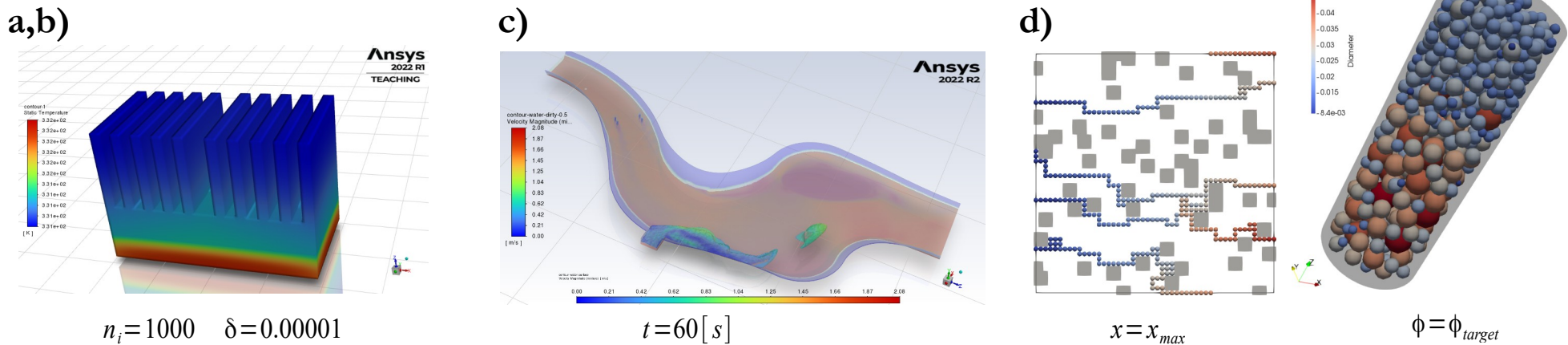
Określenie warunku zakończenia obliczeń

11. Określenie warunku zakończenia obliczeń:

- Warunkiem zakończenia obliczeń może być:
 - wykonanie określonej liczby iteracji,
 - osiągnięcie założonego kryterium zbieżności,
 - osiągnięcie założonego czasu symulacji,
 - osiągnięcie zadanej wartości jakiegoś parametru (porowatości, temperatury, naprężenia itp.).

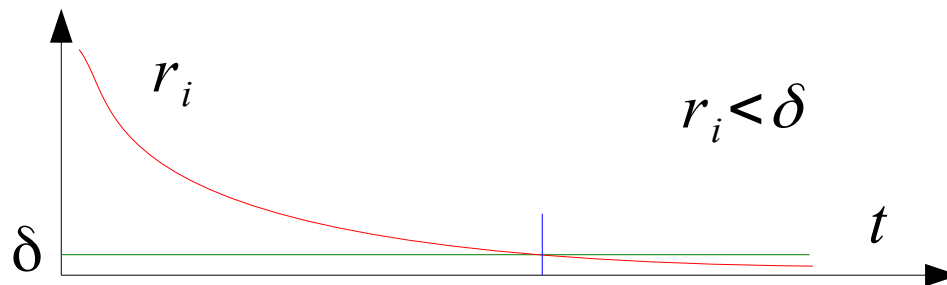
Warto dodatkowo:

- śledzić wybraną wielkość fizyczną (masę, siłę, ...)
- sprawdzić minimalne i maksymalne wartości pól

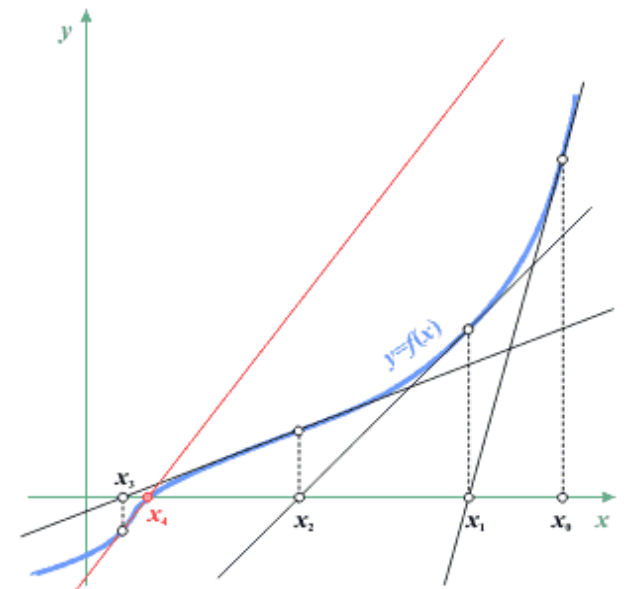
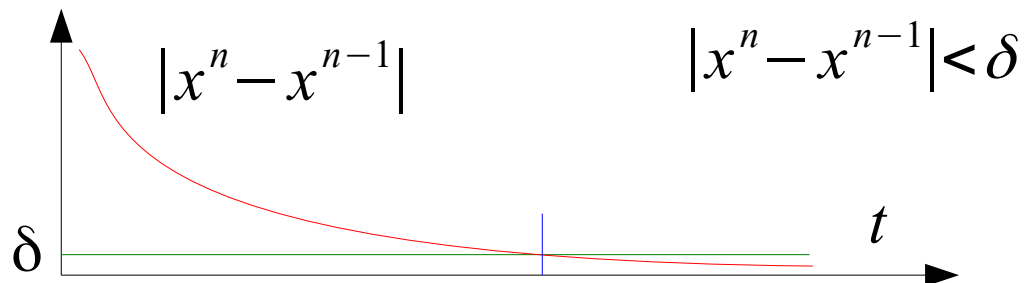


Określenie warunku zakończenia obliczeń

Zbieżność bezwzględna obliczeń następuje wtedy, gdy wartości rezyduów są mniejsze niż wymagana dokładność obliczeń:



Zbieżność względna obliczeń następuje wtedy, gdy różnica wartości uzyskanych w dwóch kolejnych krokach czasowych jest mniejsza niż wymagana dokładność obliczeń:

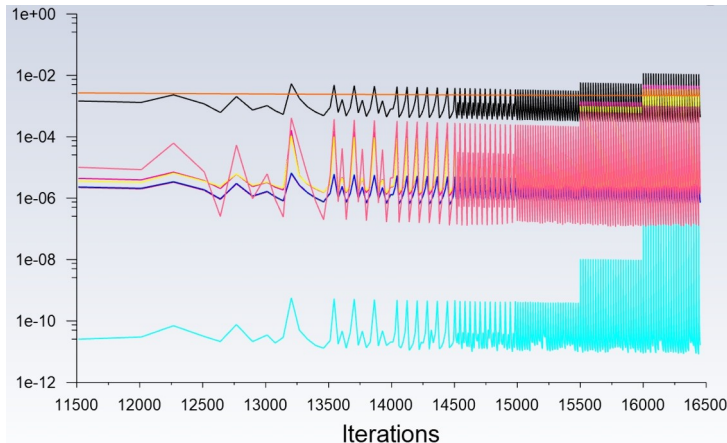


Proszę sobie
przypomnieć metodę
Newtona, opisywaną na
pierwszym wykładzie.

Przeprowadzenie obliczeń

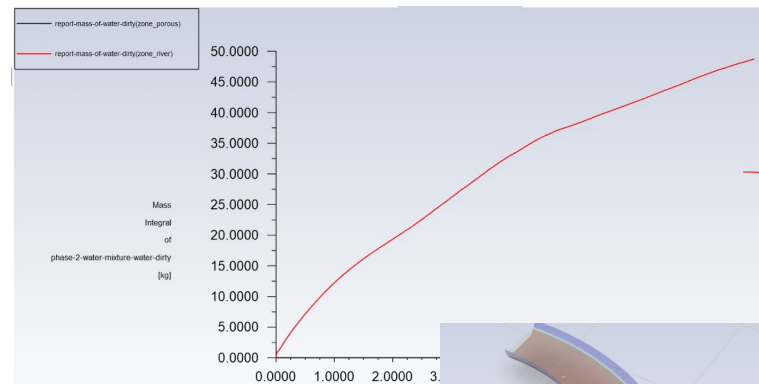
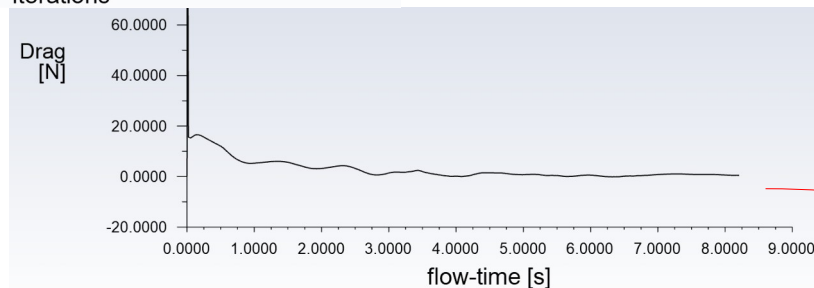
12. Przeprowadzenie i monitoring przebiegu obliczeń:

- Obliczenia mogą być wykonywane od początku lub kontynuowane od ostatnio zapisanej iteracji lub kroku czasowego. Obliczenia mogą być prowadzone na jednym lub na wielu procesorach (CPU lub GPU). Podstawową formą monitorowania przebiegu obliczeń jest śledzenie wykresu rezyduów (reszt).



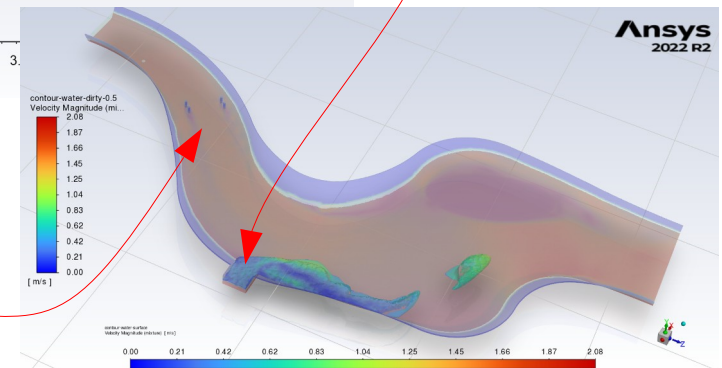
wykres reszt

siła oporu na
podporach mostu

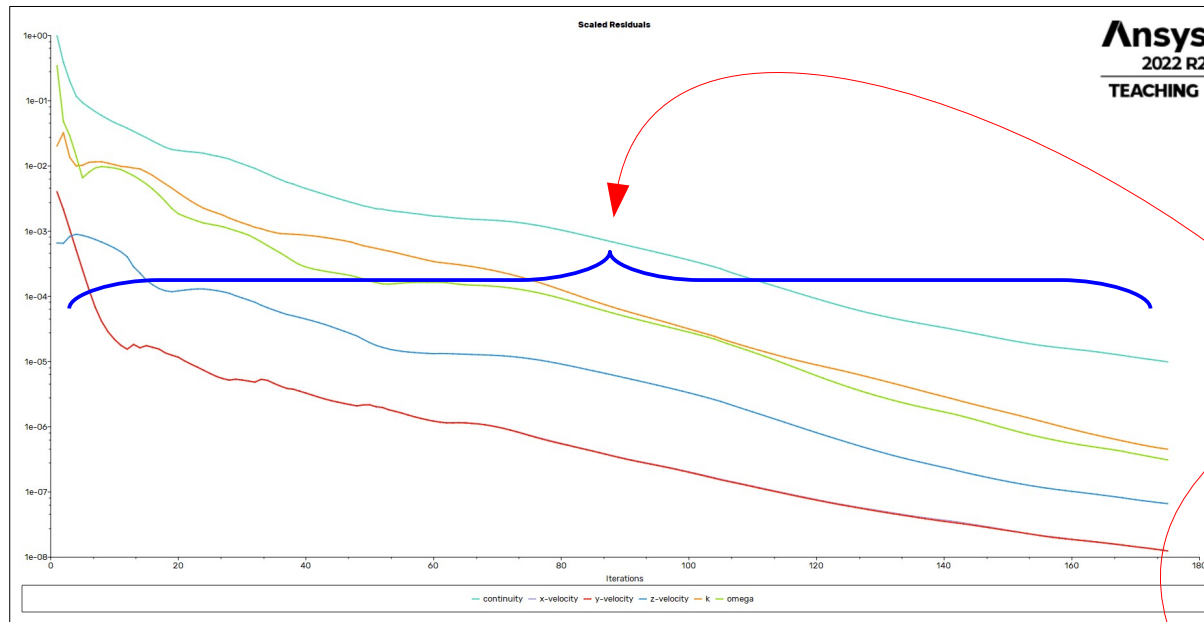


całkowita masa
wody brudnej

scena do
animacji



Przeprowadzenie obliczeń



Przykład monitoringu rezyduów podczas obliczeń niestacjonarnych (ANSYS Fluent).

r_i

3783945,124234
12763,836278
367,275612
11,987453
0,475832
0,003467
0,000541
0,000002

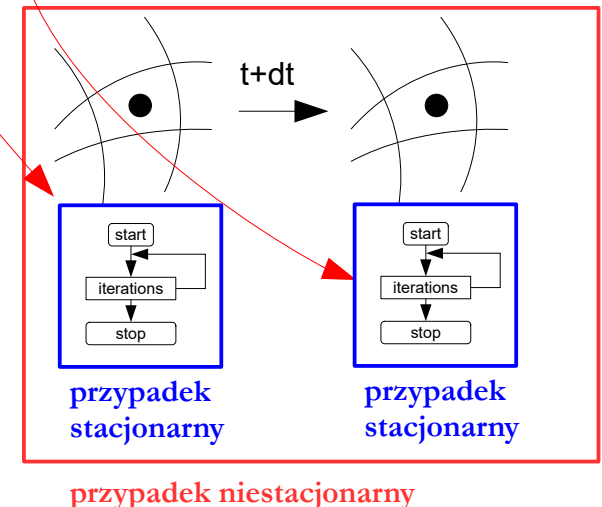
δ

Ważne, jaka jest precyzja zmiennych – pojedyncza czy podwójna!

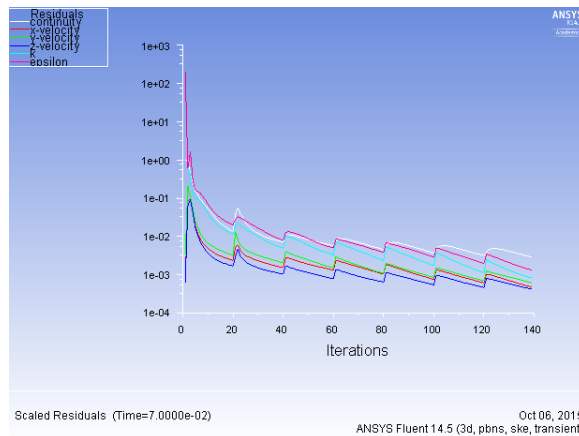
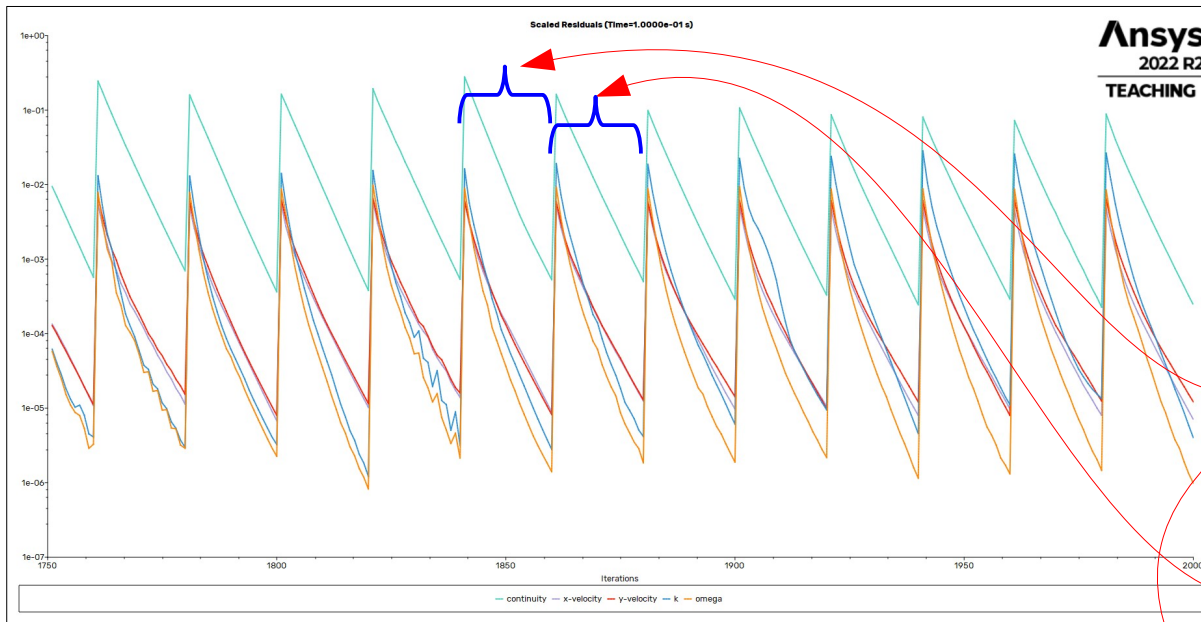
STOP – większa dokładność nie jest potrzebna

Uzyskanie rozwiązania dla nieokreślonego czasu

Ponowne obliczenie pól ciśnień, prędkości itp. dla kolejnego kroku czasowego



Przeprowadzenie obliczeń

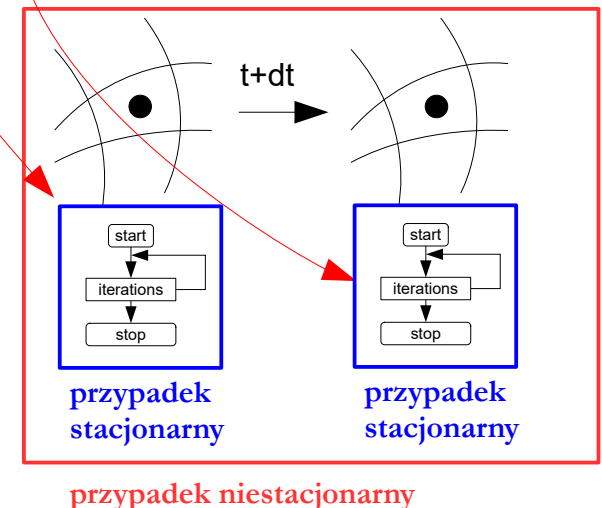


Przykład monitoringu rezyduów podczas obliczeń niestacjonarnych (ANSYS Fluent).

r_i	3783945,124234	Ważne, jaka jest precyzja zmiennych – pojedyncza czy podwójna!
	12763,836278	
	367,275612	
	11,987453	
	0,475832	
	0,003467	
	0,000541	STOP – większa dokładność nie jest potrzebna
δ	0,000002	

Uzyskanie rozwiązania dla bieżącego kroku czasowego

Ponowne obliczenie pól ciśnień, prędkości itp. dla kolejnego kroku czasowego

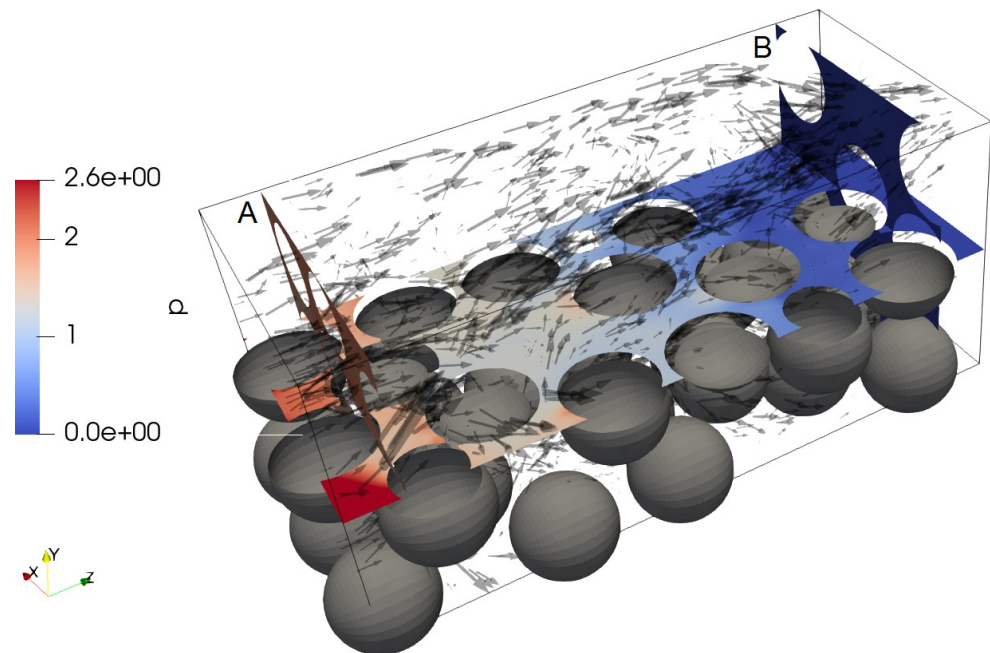


Analiza i obróbka wyników

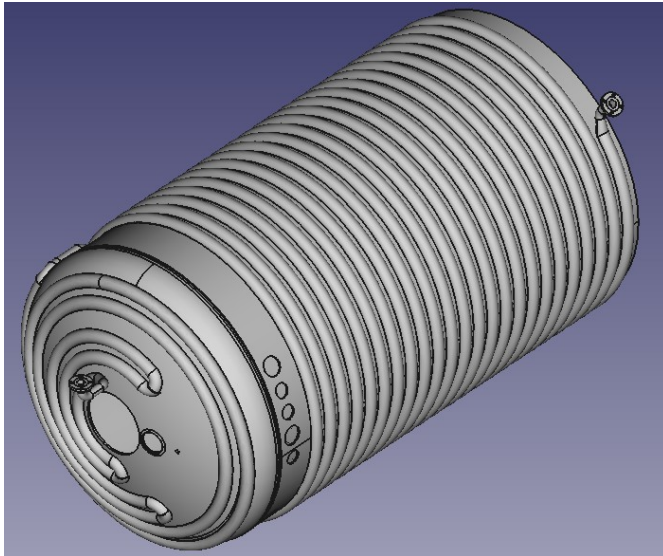
13. Wizualizacja, analiza i obróbka wyników:

- Dane pochodzące z wyników symulacji numerycznych często wymagają dalszej obróbki, szczególnie w badaniach porównawczych, w których analizuje się różne warianty obliczeń. W takim przypadku dane należy poddać odpowiedniej wizualizacji, przedstawić w postaci tabel lub wykresów, albo wyrazić w formie znormalizowanej lub w postaci różnych charakterystycznych wskaźników. Cennym elementem tego etapu jest tzw. analiza wrażliwości.

Przykłady wizualizacji przepływu płynu przez kanały porowe złoża granularnego [Wojciech Sobieski, OpenFOAM].



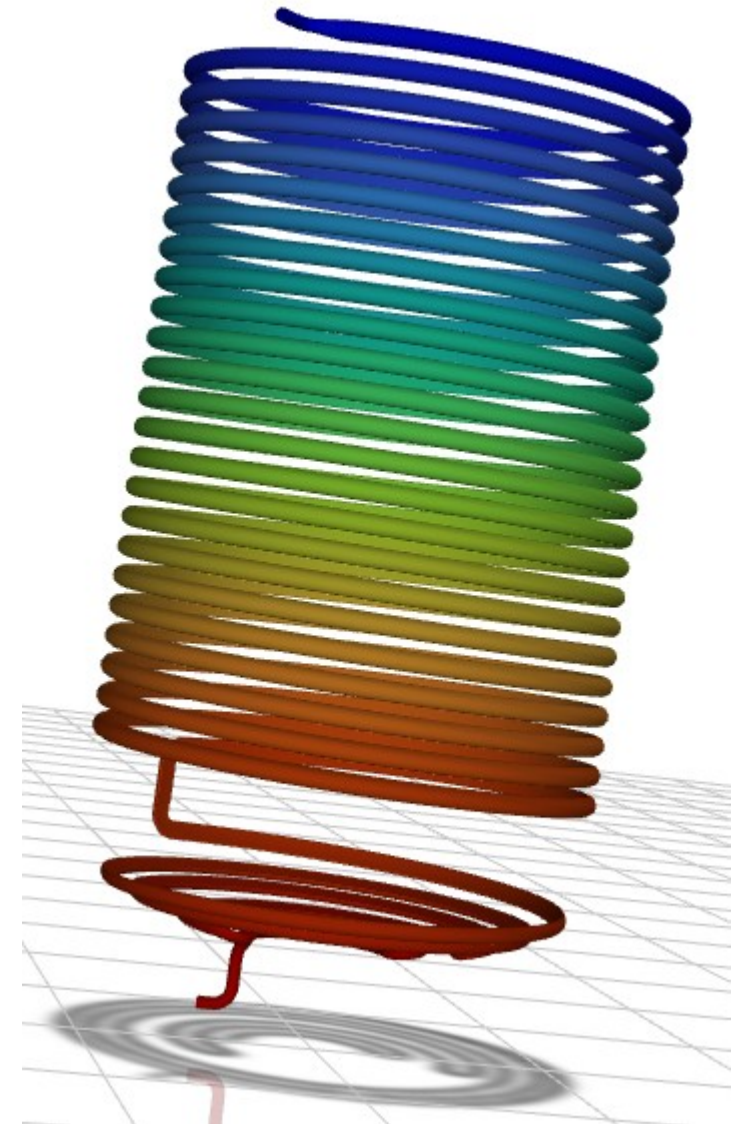
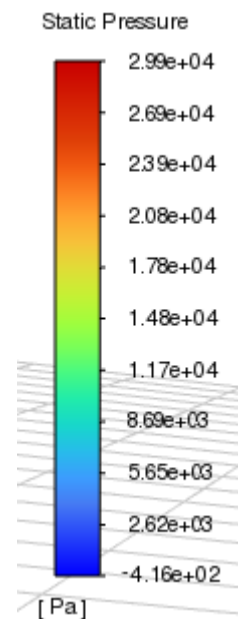
Analiza i obróbka wyników



(title "Static Pressure")
(labels "Position" "Static Pressure")

((xy/key/label "point-inlet")
-5.85334e-12 29683.6
)

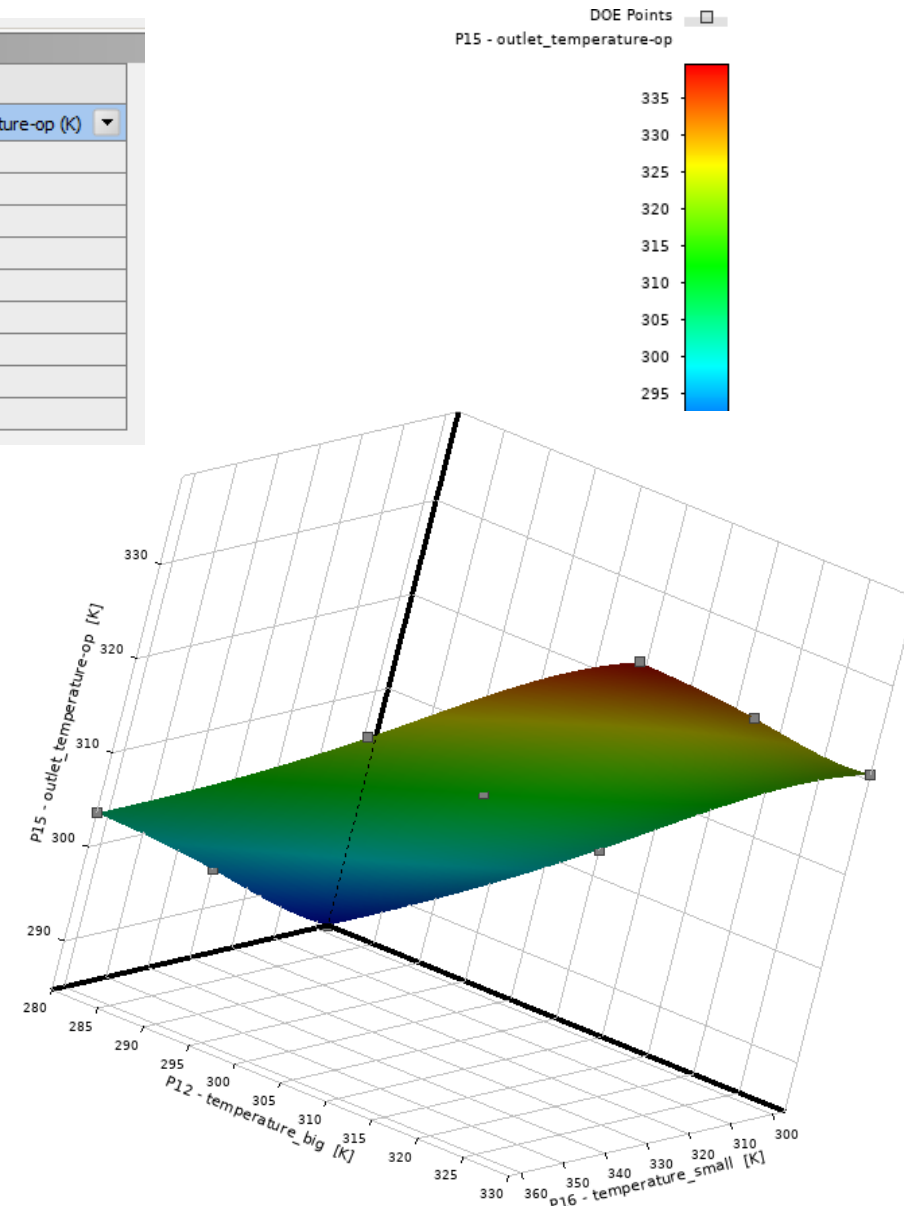
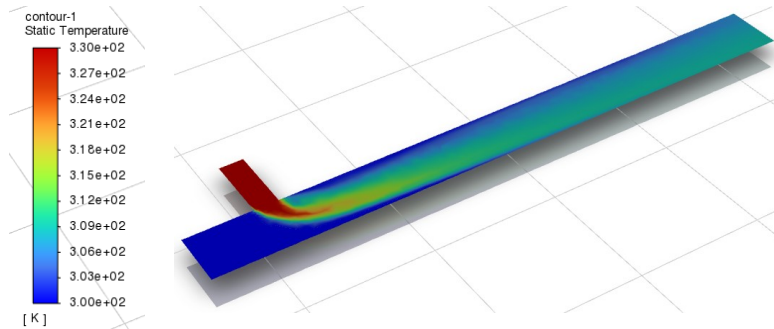
((xy/key/label "point-outlet")
3.94 0.0792469
)



Przykład obliczania spadków ciśnień podczas przepływu wody przez wężownicę [Wojciech Sobieski, ANSYS Fluent].

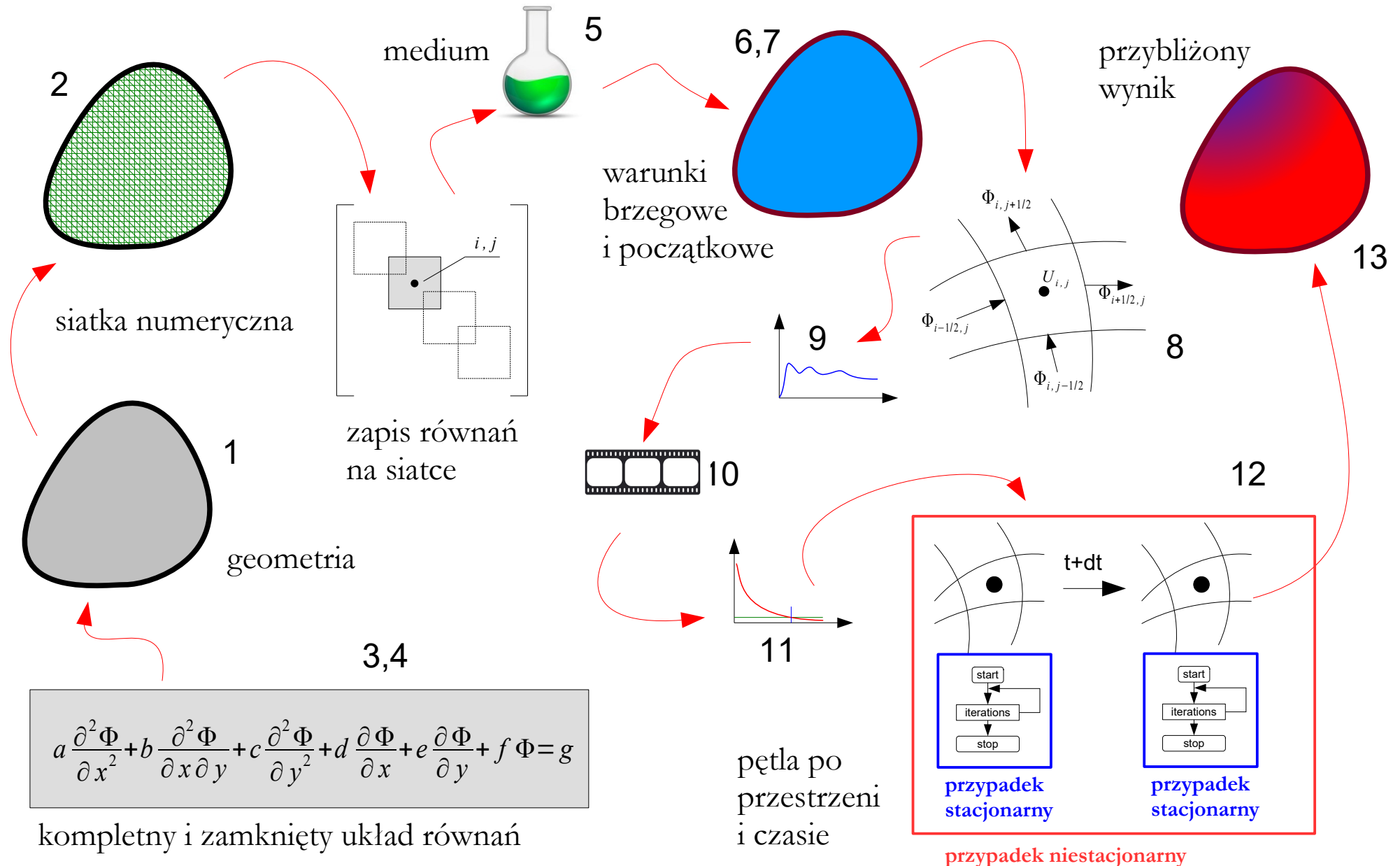
Analiza i obróbka wyników

Table of Outline A2: Design Points of Design of Experiments					
	A	B	C	D	E
1	Name	P12 - temperature_big (K)	P16 - temperature_small (K)	P10 - Mesh Max	P15 - outlet_temperature-op (K)
2	1	305	330	0,79355	312,11
3	2	280	330	0,79355	294,22
4	3	330	330	0,79355	330
5	4	305	297	0,79355	302,73
6	5	305	363	0,79355	321,49
7	6	280	297	0,79355	284,83
8	7	330	297	0,79355	320,62
9	8	280	363	0,79355	303,6
10	9	330	363	0,79355	339,38



Przykład użycia powierzchni odpowiedzi do wygenerowania tzw. modelu zredukowanego [Wojciech Sobieski, ANSYS Fluent].

Proces modelowania numerycznego



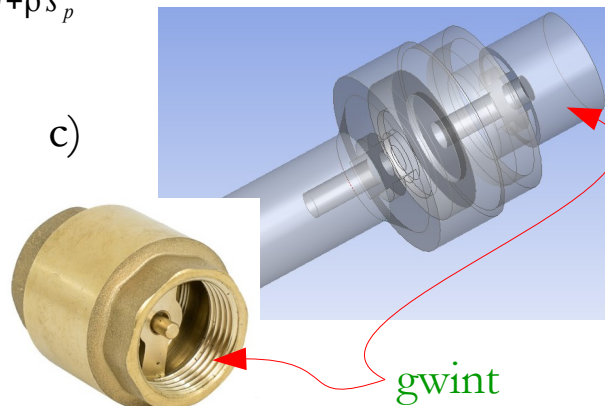
Błędy analiz numerycznych

Błędy analiz numerycznych:

- a) **błąd modelowania** – zastosowany model matematyczny nie odzwierciedla dokładnie rzeczywistości,
- b) **błąd wartości współczynników** – parametry liczbowe są podawane/mierzone z określoną dokładnością,
- c) **błąd odwzorowania obszaru** – geometria domeny nie odpowiada dokładnie geometrii obiektu rzeczywistego,
- d) **błąd numeryczny** – skończona dokładność interpolacji, aproksymacji, ekstrapolacji,
- e) **błąd zaokrąglenia** – skończona dokładność zastosowanych typów zmiennych.

a) $\frac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{v}) + \text{div}(\rho \vec{v} \vec{v}) = \text{div}(-p \vec{I} + \vec{\tau}' + \boxed{\vec{\tau}'} + \dots) + \rho \vec{s}_p$

$\vec{\tau}' = ?$



d)

forward scheme

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

central scheme

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x)}{2 \Delta x}$$

backward scheme

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0) - f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x}$$

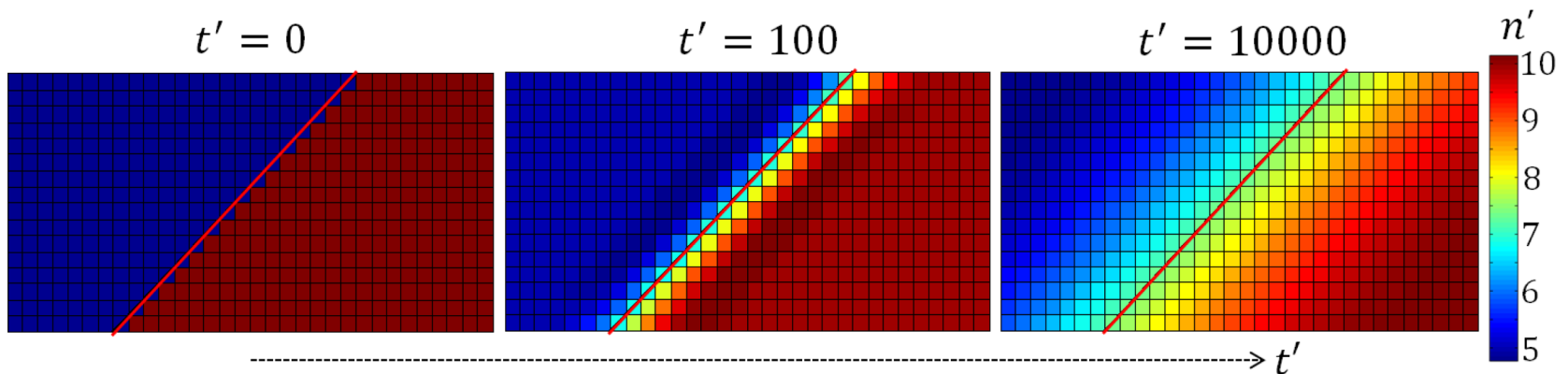
e)

$\pi = 3.14$	$\pi = 3.1415$	$\pi = 3.141592$
--------------	----------------	------------------

Dyfuzja numeryczna

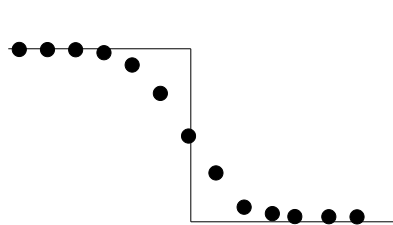
Dyfuzja numeryczna – rodzaj błędu numerycznego, przez który symulowany płyn wykazuje wyższą dyfuzyjność niż powinien.

Dyfuzja numeryczna występuje, gdy stosowana jest dyskretyzacja pierwszego rzędu (przy czym schemat „pod wiatr” jest najmniej dyfuzyjny). Czasami określa się ją mianem „lepkości numerycznej”, ponieważ układ zachowuje się tak, jakby do lepkości fizycznej dodany był jakiś dodatkowy człon.

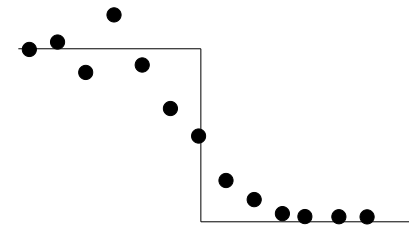


Dyspersja numeryczna

Dyspersja numeryczna – rodzaj błędu numerycznego, który występuje, gdy stosowana jest dyskretyzacja wyższego rzędu w celu poprawienia dokładności obliczeń. Dyspersja numeryczna często przybiera postać tzw. „fałszywych oscylacji”. Jeśli dyspersja numeryczna wystąpi w zmiennej, która może przyjmować tylko wartości w określonym zakresie (np. ułamek masowy składnika w mieszaninie, którego wartość musi mieścić się między 0 a 1), to fałszywe oscylacje mogą prowadzić do wartości нефizycznych.

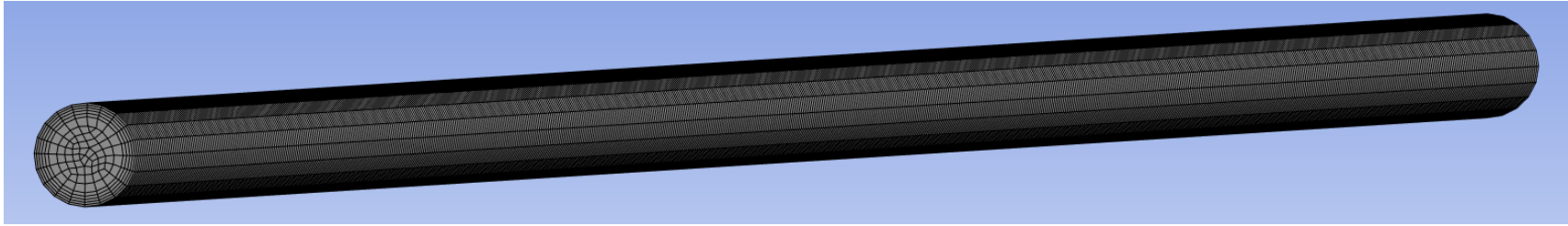


dyfuzja numeryczna

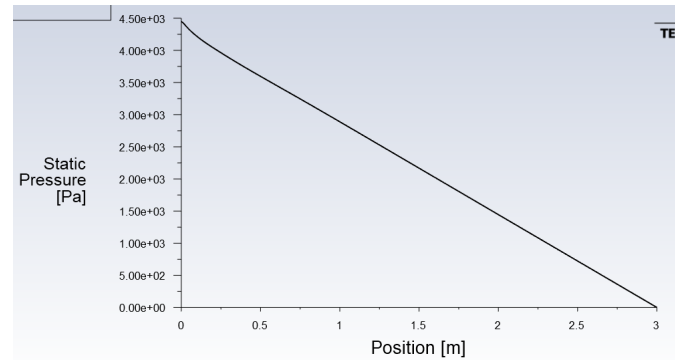


dyspersja numeryczna

Jakość wyników



Obliczanie spadku
ciśnień w rurze kołowej
[Wojciech Sobieski,
ANSYS Fluent].



(title "Static Pressure")
(labels "Position" "Static Pressure")

```
((xy/key/label "point-a")  
1 2888.23  
)  
((xy/key/label "point-b")  
2 1444.33  
)
```

$\Delta p = 1443.9$

rozwiązanie numeryczne

$$Re = \frac{c \cdot d}{\nu} = \frac{2 \cdot 0.0254}{0.0000006017} = 84427$$

$$\lambda = \frac{0.3164}{\sqrt[4]{Re}} = 0.0186$$

$$h_s = \frac{c^2}{2 \cdot g} \cdot \lambda \cdot \frac{l}{d} = 0.149$$

$$\Delta p = \rho \cdot g \cdot h_s = 1447.22$$

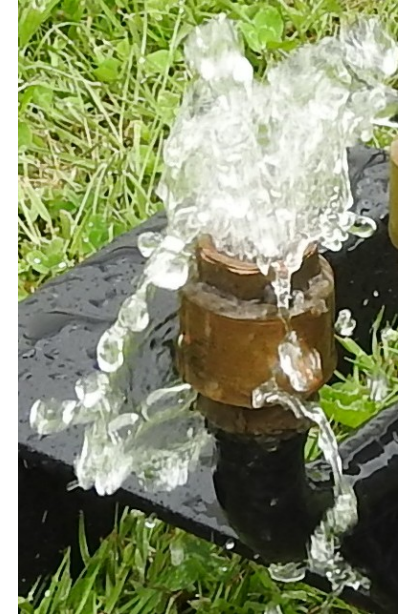
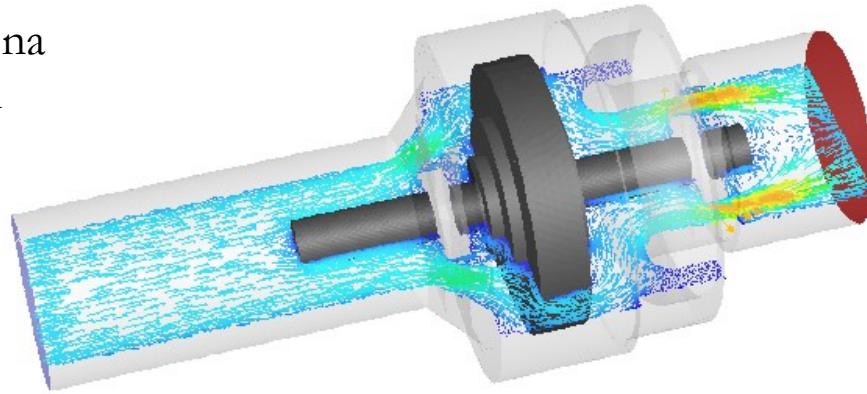
rozwiązanie analityczne

$\delta = 0.23\%$

błąd względny

Jakość wyników

Obliczenie siły działającej na grzybek zaworu [Wojciech Sobieski, ANSYS Fluent].



Console

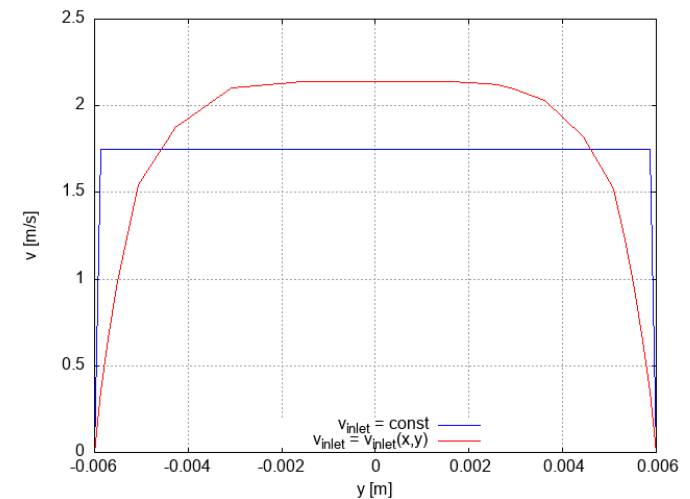
Forces - Direction Vector (0 0 1)						
Forces [N]						
Zone	Pressure	Viscous	Total	Coefficients Pressure	Viscous	Total
wall_head	0.36886696	-0.0011510001	0.36771596	0.60223177	-0.0018791839	0.60035258

Net	0.36886696	-0.0011510001	0.36771596	0.60223177	-0.0018791839	0.60035258

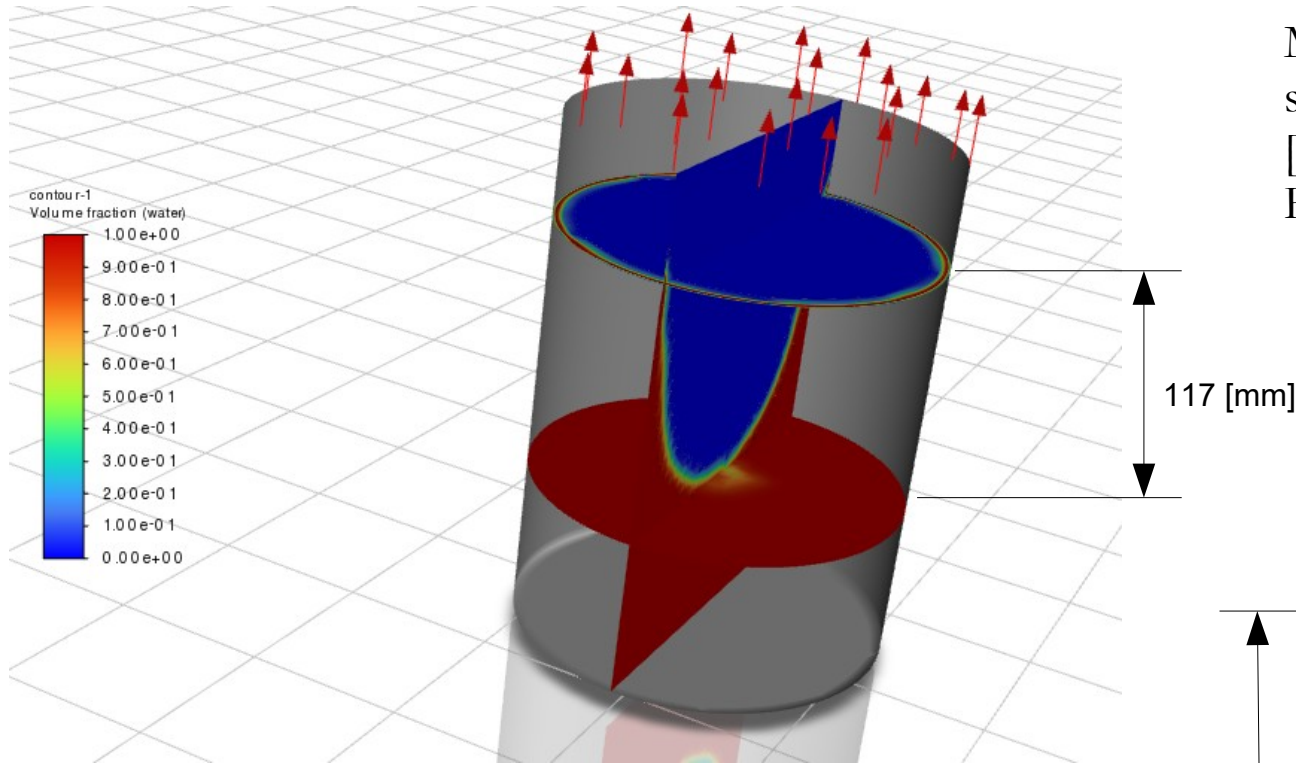
rozwiązanie analityczne: $F = 0.3703 [N]$

rozwiązanie numeryczne
(stała prędkość na wlocie): $F = 0.402 [N]$ $\delta = 13.39\%$

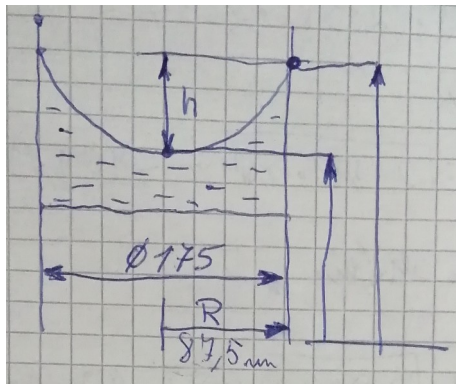
rozwiązanie numeryczne
(profil prędkości na wlocie): $F = 0.369 [N]$ $\delta = 0.37\%$



Jakość wyników



Modelowanie kształtu powierzchni swobodnej w naczyniu wirującym [Wojciech Sobieski, ANSYS Fluent].



Eksperyment został wykonany na zajęciach laboratoryjnych z Mechaniki Płynów [Paweł Pietkiewicz, 2022]

$$160 \text{ h} = 171 - 59 = 112$$



Kody MOS

Oprogramowanie MOS dzieli się na komercyjne i niekomercyjne.



Open▽FOAM



simFlow





UNIVERSITY OF WARMIA AND MAZURY IN OLSZTYN
The Faculty of Technical Sciences
POLAND, 10-957 Olsztyn, M. Oczapowskiego 11
tel.: (48)(89) 5-23-32-40, fax: (48)(89) 5-23-32-55
URL: <http://www.uwm.edu.pl/edu/sobieski/> (in Polish)



Dziękuję za uwagę

Wojciech Sobieski

Olsztyn, 2003-2026