



UNIVERSITY OF WARMIA AND MAZURY IN OLSZTYN
The Faculty of Technical Sciences
POLAND, 10-957 Olsztyn, M. Oczapowskiego 11
tel.: (48)(89) 5-23-32-40, fax: (48)(89) 5-23-32-55
URL: <http://www.uwm.edu.pl/edu/sobieski/> (in Polish)



Obliczeniowa Dynamika Płynów

Computational Fluid Dynamics – CFD

Metoda Objętości Skończonych
(wersja skrócona)

wersja: 5 lutego 2026

Wojciech Sobieski

Olsztyn, 2003-2026

Metoda Objętości Skończonych

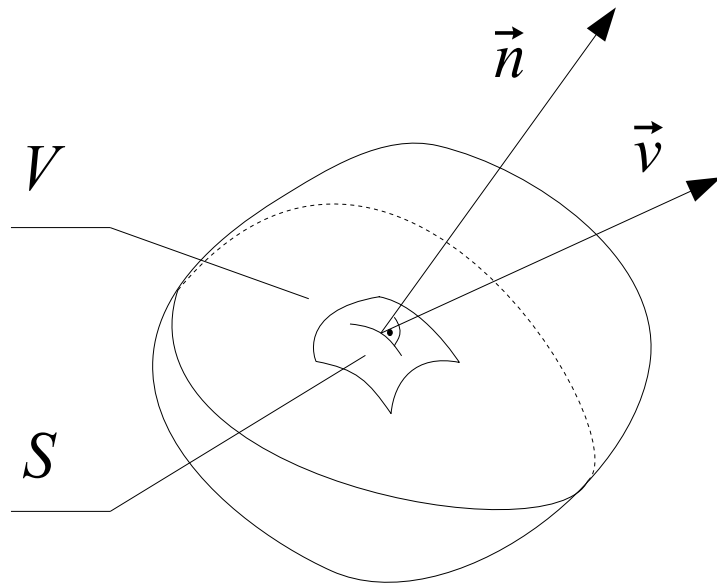
Metoda Objętości Skończonych – metoda polegająca na wykonywaniu bilansów powierzchniowych i objętościowych dowolnych ekstensywnych wielkości fizycznych, w oparciu o wcześniej zdefiniowaną przestrzenną siatkę dyskretną.

Zastosowania:

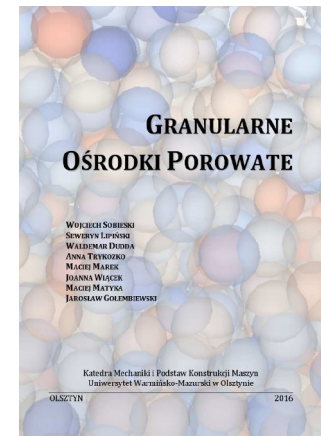
- przepływy wewnętrzne i zewnętrzne
- przepływy stacjonarne i niestacjonarne
- przepływy newtonowskie i nienewtonowskie
- przepływy laminarne i turbulentne
- przepływy jedno i wieloskładnikowe
- mieszaniny homogeniczne i niehomogeniczne
- ...

Metoda Objętości Skończonych

Objętość skończona (ang. Control Volume, CV) – elementarna objętość V otoczona zamkniętą powierzchnią S , dla której budowane są globalne równania zachowawcze płynu (bilansowe, transportu), np. równanie bilansu masy, pędu czy energii.



Rozdział 8



Rozdział 10

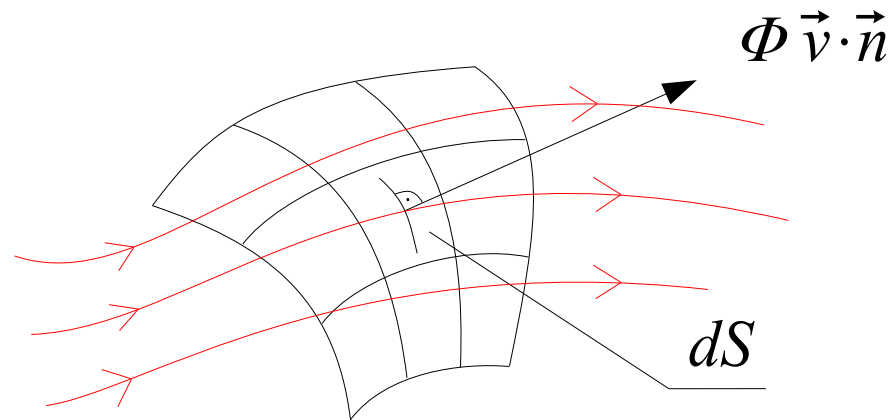


Metoda Objętości Skończonych

Strumień – wielkość wektorowa definiowana jako iloczyn dowolnej ekstensywnej wielkości fizycznej (Φ), np. masy, pędu czy energii, oraz prędkości przepływu w kierunku prostopadłym do powierzchni.

$$\vec{J} = \Phi \vec{v} \cdot \vec{n} = \Phi \vec{v}_n$$

$$\Phi = \rho, \rho \vec{v}, \rho e, \dots$$



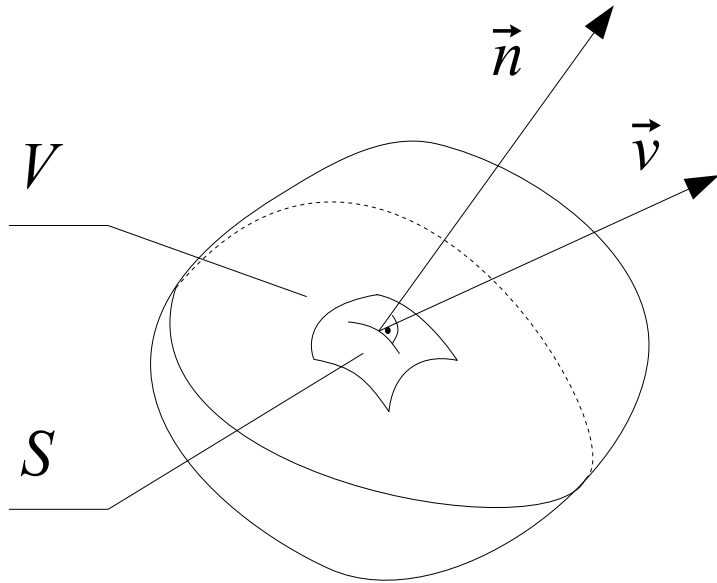
Φ - bilansowana wielkość ekstensywna (zależna od masy) [...]

$\vec{v}$ - prędkość [m/s]

$\vec{n}$ - wektor normalny do powierzchni [-]

Bilanse MOS

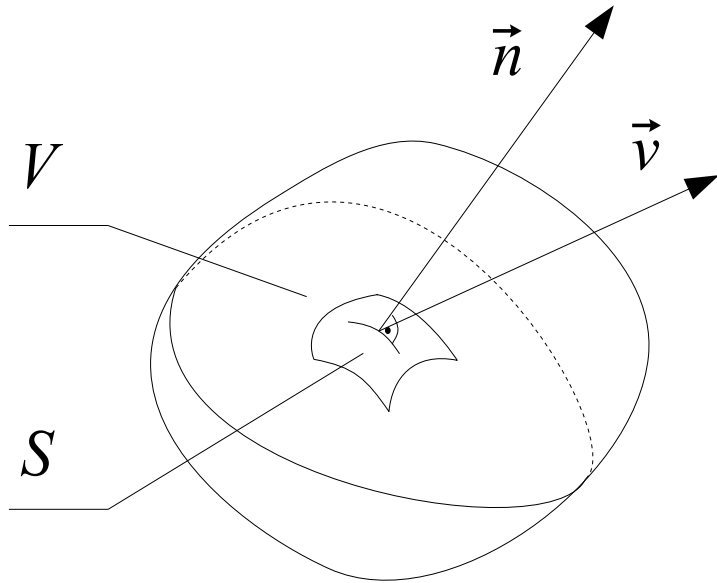
Bilans powierzchniowy jest to bilans opisujący zmianę wartości dowolnej wielkości ekstensywnej w czasie, na drodze wymiany strumieni tej wielkości między objętością skończoną a jej otoczeniem.



$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} \big|_V = \int_S (\Phi \vec{v} \cdot \vec{n}) dS$$

Bilanse MOS

Bilans objętościowy jest to bilans opisujący zmianę wartości dowolnej wielkości ekstensywnej w czasie, na skutek działania źródeł tej wielkości, istniejących wewnątrz objętości skończonej.



$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_V = \int_V (\Phi) dV$$

Bilanse MOS – analogie...

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} |_s = \int_s (\Phi \vec{v} \cdot \vec{n}) dS$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} |_v = \int_v (\Phi) dV$$



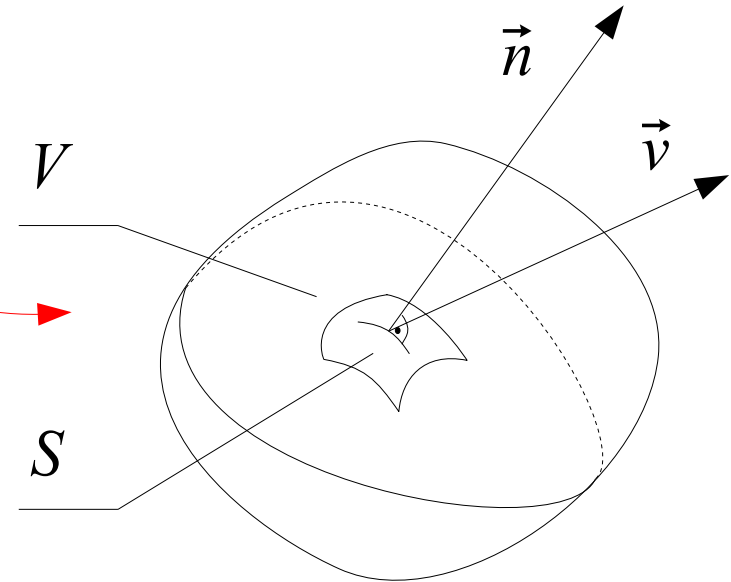
Jak policzyć liczbę mieszkańców Olsztyna
Oddzielnie dla każdego dnia w roku?

Układ równań bilansowych (zachowawczych)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_S = \int_S (\Phi \vec{v} \cdot \vec{n}) dS$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_V = \int_V (\Phi) dV$$

Zastosowanie bilansowania powierzchniowego i objętościowego na objętości skończonej prowadzi do uzyskania głównego układu równań bilansowych (jest to układ dla przepływu **jednoskładnikowego**):



Równanie Bilansu Masy (RBM):

Równanie Bilansu Pędu (RBP):

Równanie Bilansu Energii (RBE):

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{v}) + \text{div}(\rho \vec{v} \vec{v}) = \text{div}(-p \overset{\leftrightarrow}{I} + \overset{\leftrightarrow}{\tau}) + \rho \vec{s}_p$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho e) + \text{div}(\rho e \vec{v}) = \text{div}((-p \overset{\leftrightarrow}{I} + \overset{\leftrightarrow}{\tau}) \vec{v} + \vec{q}) + \rho s_e$$

Równanie Bilansu Masy

$$m = \bar{\rho} V$$

$$m = \int_V \rho dV$$

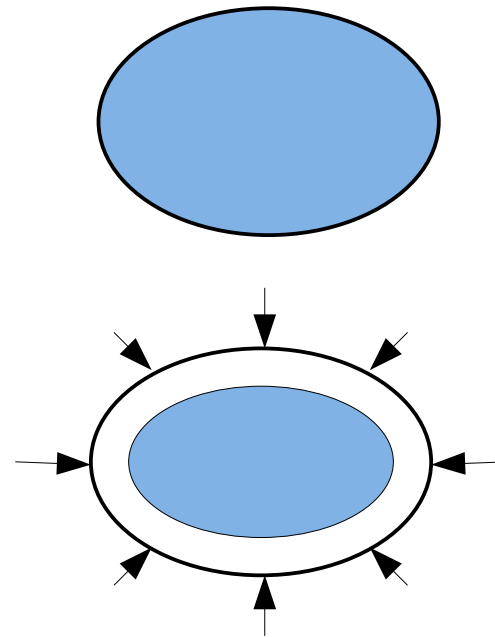
$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho dV = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

$$\frac{dm}{dt} = - \int_S (\rho \vec{v} \cdot \vec{n}) dS$$

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \int_S (\rho \vec{v} \cdot \vec{n}) dS = - \int_V \operatorname{div}(\rho \vec{v}) dV$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0$$

- równanie bilansu masy płynu jednoskładnikowego



rozważamy zmianę masy w objętości skończonej w czasie

zakładamy przyrost czynnika sprawczego (ciśnienia) – płyn ulegnie ściśnięciu i powstanie „luz”

„luz” jest uzupełniany z zewnątrz poprzez strumień dopływający do środka przez powierzchnię

tw. Greena-Gaussa-Ostrogradzkiego

Fizyczny sens dywergencji prędkości

Obliczmy pochodną iloczynu funkcji:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla (\rho \vec{v}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla (\rho \vec{v}) + \nabla (\rho \vec{v})$$

symbol nabra jest
wygodniejszy w interpretacji

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla (\rho \vec{v}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \nabla (\vec{v}) + \vec{v} \nabla (\rho)$$

operator nabra na polu
wektorowym daje „div”

operator nabra na polu
skalarnym daje „grad”

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla (\rho \vec{v}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \operatorname{div} (\vec{v}) + \vec{v} \operatorname{grad} (\rho) = 0 \xrightarrow{\text{rozpiszmy ten cz\u0142on}}$$

Fizyczny sens dywergencji prędkości

W układzie kartezjańskim:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + v_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + v_z \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \operatorname{div}(\vec{v}) = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial t} \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \operatorname{div}(\vec{v}) = 0$$

$$v_x = \frac{\partial x}{\partial t}$$

$$v_y = \frac{\partial y}{\partial t}$$

$$v_z = \frac{\partial z}{\partial t}$$

pocho
dna
całkowita

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div}(\vec{v}) = 0$$

lub

$$\operatorname{div}(\vec{v}) = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} \quad (*)$$

Fizyczny sens dywergencji prędkości

$$\frac{d}{dt} m = \frac{d}{dt} (\rho V)$$

pochoďna iloczynu funkcji (ρV)

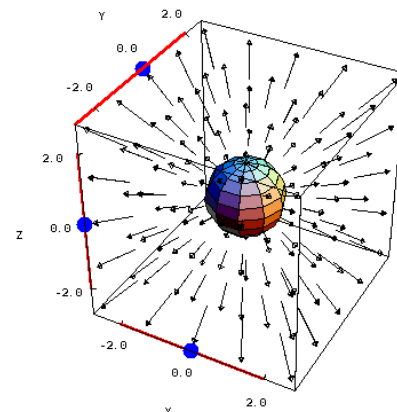
$$\frac{d}{dt} (\rho V) = V \frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{dV}{dt}$$

zakładamy, że plyn jest
nieściśliwy, wówczas nie może
być zmian masy w czasie

$$V \frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{dV}{dt} = 0$$

$$\frac{1}{V} \frac{dV}{dt} = - \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} \quad (**)$$

dywergencja pola prędkości
jest miarą szybkość zmian
objętości właściwej płynu
podczas jego ruchu



$$\frac{1}{V} \frac{dV}{dt} = \text{div}(\vec{v})$$

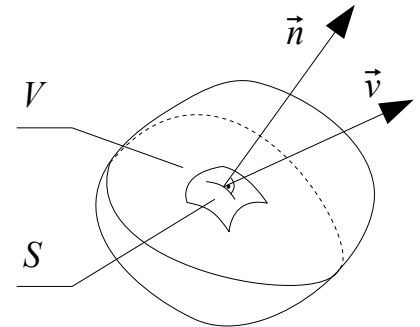
$$\text{div}(\vec{v}) = - \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} \quad (*)$$

Równanie Bilansu Pędu

$$\frac{d}{dt} \vec{p} = \vec{F} \quad \vec{p} = m \vec{v} \quad m = \int_V \rho dV$$

$$\frac{d}{dt} \int_V (\rho \vec{v}) dV = \vec{F}_S + \vec{F}_V$$

rozważamy zmianę pędu w objętości skończonej w czasie



$$\vec{F}_S = \int_S (\vec{f}_S \cdot \vec{n}) dS = \int_S (\vec{T} \cdot \vec{n}) dS \quad - \text{ siły powierzchniowe}$$

$$\vec{F}_V = \int_V (\rho \vec{f}_V) dV \quad - \text{ siły masowe}$$

$$\vec{f}_S \quad - \text{ jednostkowa siła powierzchniowa [N/m}^2\text{]}$$

$$\vec{f}_V \quad - \text{ jednostkowa siła masowa [N/kg]}$$

Równanie Bilansu Pędu

$$\frac{d}{dt} \int_V (\rho \vec{v}) dV = \int_S (\overset{\leftrightarrow}{T} \cdot \vec{n}) dS + \int_V (\rho \vec{f}_V) dV$$

tw. Transportu Reynoldsa

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{v}) dV + \int_S (\rho \vec{v} \vec{v} \cdot \vec{n}) dS = \int_S (\overset{\leftrightarrow}{T} \cdot \vec{n}) dS + \int_V (\rho \vec{f}_V) dV$$

tw. Greena-Gaussa-Ostrogradzkiego

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{v}) dV + \int_V \operatorname{div} (\rho \vec{v} \vec{v}) dV = \int_V \operatorname{div} (\overset{\leftrightarrow}{T}) dV + \int_V (\rho \vec{f}_V) dV$$

całkowity tensor naprężeń:

$$\overset{\leftrightarrow}{T} = -p \overset{\leftrightarrow}{I} + \overset{\leftrightarrow}{\tau}$$

Równanie Bilansu Pędu

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{v}) + \operatorname{div}(\rho \vec{v} \vec{v}) = \operatorname{div}\left(-p \vec{I} + \vec{\tau}\right) + \rho \vec{f}_V$$

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}^l + \vec{\tau}^t + \dots$$

tensor naprężeń lepkich

tensor naprężeń turbulentnych

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{v}) + \operatorname{div}(\rho \vec{v} \vec{v}) = \operatorname{div}\left(-p \vec{I} + \vec{\tau}^l + \vec{\tau}^t + \dots\right) + \rho \vec{s}_p$$

lub:

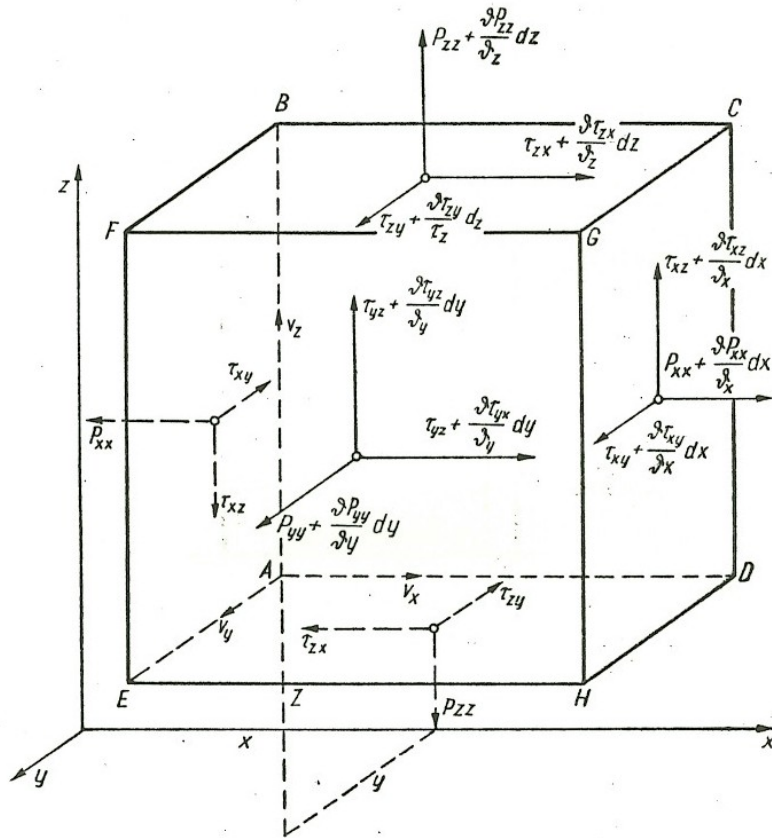
$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{v}) + \operatorname{div}\left(\rho \vec{v} \vec{v} + p \vec{I}\right) = \operatorname{div}\left(\vec{\tau}^l + \vec{\tau}^t + \dots\right) + \rho \vec{s}_p$$

- równanie bilansu pędu płynu jednoskładnikowego

$$\rho \vec{s}_p = \rho \vec{f}_V$$

stosujemy ogólny
symbol źródeł

Równanie Bilansu Pędu



Rys. 6-5. Rozkład naprężenia na elemencie równoległościennym płynu lepkiego

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} &= X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \\ &+ \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} &= Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \\ &+ \nu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} &= Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \\ &+ \nu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) \end{aligned}$$

Wyprowadzenie równania Naviera-Stokesa
zajmuje wraz z opisami 9 stron!

Równanie Hydrostatyki

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{v}) + \operatorname{div}(\rho \vec{v} \vec{v}) = \operatorname{div}\left(-p \vec{I} + \vec{\tau}^l + \vec{\tau}^t + \dots\right) + \rho \vec{s}_p$$

Założenie: płyn pozostaje w spoczynku $\vec{v} = 0$

$$0 = -\operatorname{grad}(p) + \rho \vec{s}_p$$

Dla całej masy płynu:

$$0 = -\operatorname{grad}(p) + \rho \vec{F} \qquad \vec{F} = \vec{s}_p$$

$$\frac{1}{\rho} \operatorname{grad}(p) = \vec{F}$$

- równanie hydrostatyki

dla $\vec{F} = 0$

$$\operatorname{grad}(p) = 0$$

- prawo Pascala

Równanie Bilansu Energii

$$E_k = \frac{m \vec{v}^2}{2} = \int_V \left(\frac{\rho \vec{v}^2}{2} \right) dV$$

- energia kinetyczna

$$U = mu = \int_V (\rho u) dV$$

- energia wewnętrzna

$$E = E_K + U = \int_V \left(\frac{\rho \vec{v}^2}{2} + \rho u \right) dV$$

- energia całkowita

$$E = E_K + U = \int_V (\rho e) dV$$

- gdzie: $e = \frac{\vec{v}^2}{2} + u$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V (\rho e) dV$$

rozważamy zmianę energii w objętości skończonej w czasie

Równanie Bilansu Energii

$$\frac{dE}{dt} = L_S + L_V + Q_S + Q_V$$

stosujemy I Zasadę Termodynamiki

praca sił powierzchniowych

$$L_S = \vec{F}_S \vec{v} = \int_S \left(\vec{T} \vec{v} \cdot \vec{n} \right) dS$$

praca sił objętościowych (masowych)

$$L_V = \vec{F}_V \vec{v} = \int_V \left(\rho \vec{v} \vec{f}_V \right) dV$$

ciepło wymieniane z otoczeniem przez powierzchnię

$$Q_S = \int_S \left(\vec{q}_S \cdot \vec{n} \right) dS$$

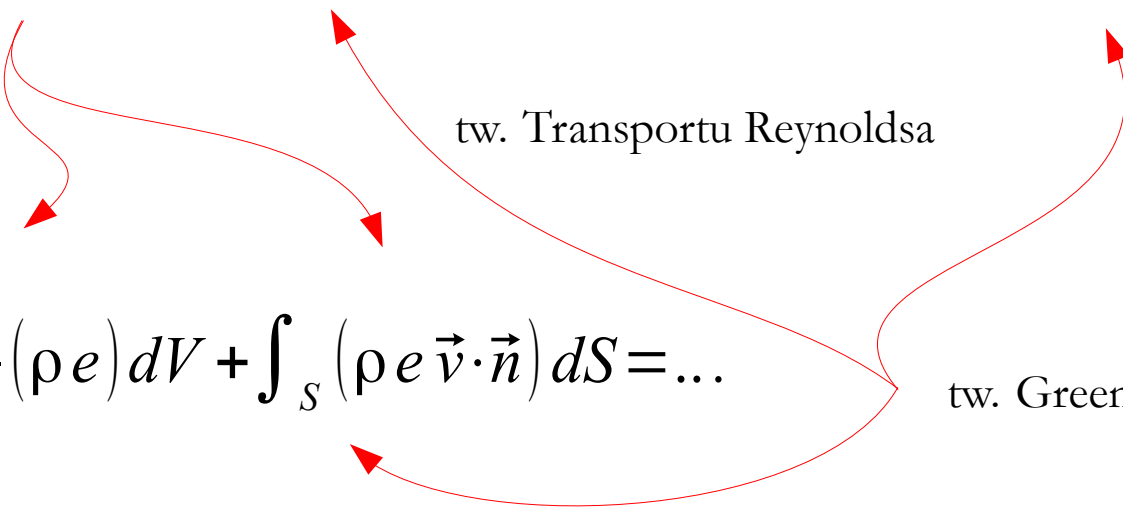
ciepło źródeł działających wewnątrz objętości

$$Q_V = \int_V \left(\rho q_V \right) dV$$

Równanie Bilansu Energii

$$\frac{d}{dt} \int_V (\rho e) dV = \int_S \left(\overleftrightarrow{T} \vec{v} \cdot \vec{n} \right) dS + \int_V \left(\rho \vec{v} \cdot \vec{f}_V \right) dV + \int_S \left(\vec{q}_S \cdot \vec{n} \right) dS + \int_V \left(\rho q_V \right) dV$$

tw. Transportu Reynoldsa



$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho e) dV + \int_S (\rho e \vec{v} \cdot \vec{n}) dS = \dots$$

tw. Greena-Gaussa-Ostrogradzkiego

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho e) dV + \int_V \operatorname{div} (\rho e \vec{v}) dV = \dots$$

$$\dots = \int_V \operatorname{div} \left(\overleftrightarrow{T} \vec{v} \right) dV + \int_V \left(\rho \vec{v} \cdot \vec{f}_V \right) dV + \int_V \operatorname{div} (\vec{q}_S) dV + \int_V (\rho q_V) dV$$

Równanie Bilansu Energii

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho e) + \operatorname{div}(\rho e \vec{v}) = \operatorname{div}\left(\overset{\leftrightarrow}{T} \vec{v}\right) + (\rho \vec{v} \vec{f}_V) + \operatorname{div}(\vec{q}_S) + (\rho q_V)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho e) + \operatorname{div}(\rho e \vec{v}) = \operatorname{div}\left[\left(\overset{\leftrightarrow}{T} \vec{v}\right) + \vec{q}_S\right] + \rho(q_V + \vec{v} \vec{f}_V)$$

stosujemy ogólny
symbol źródeł

$$\overset{\leftrightarrow}{\tau} = \overset{\leftrightarrow}{\tau}^l + \overset{\leftrightarrow}{\tau}^t + \dots$$

$$\vec{q}_S = \vec{q}_S^l + \vec{q}_S^t + \dots$$

$$\rho s_e = \rho(q_V + \vec{v} \vec{f}_V)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho e) + \operatorname{div}(\rho e \vec{v}) = \operatorname{div}\left[\left(-p \overset{\leftrightarrow}{I} + \overset{\leftrightarrow}{\tau}^l + \overset{\leftrightarrow}{\tau}^t + \dots\right) \vec{v} + \vec{q}_S^l + \vec{q}_S^t + \dots\right] + \rho s_e$$

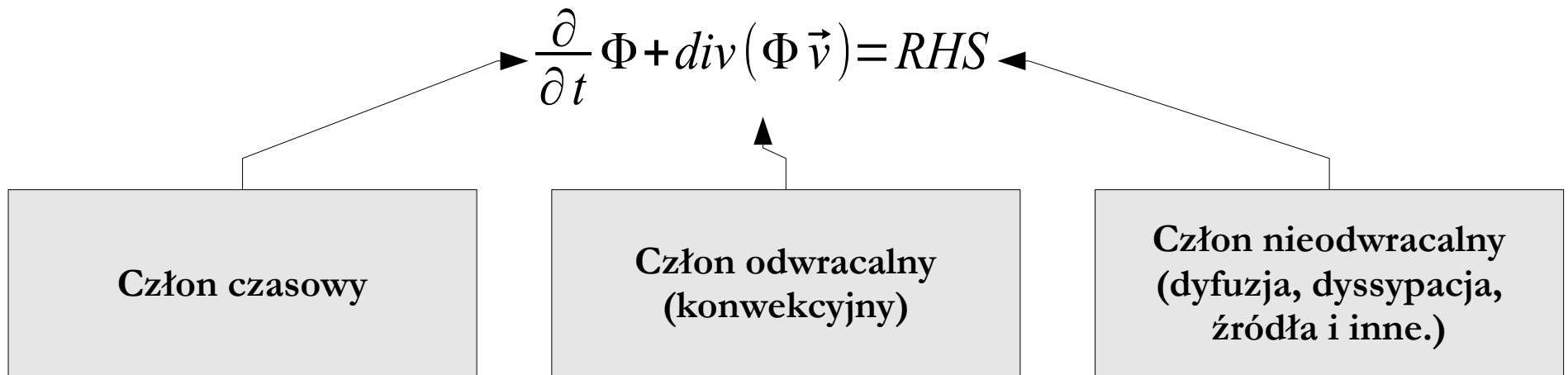
- równanie bilansu energii płynu jednoskładnikowego

Ogólna postać równań bilansowych

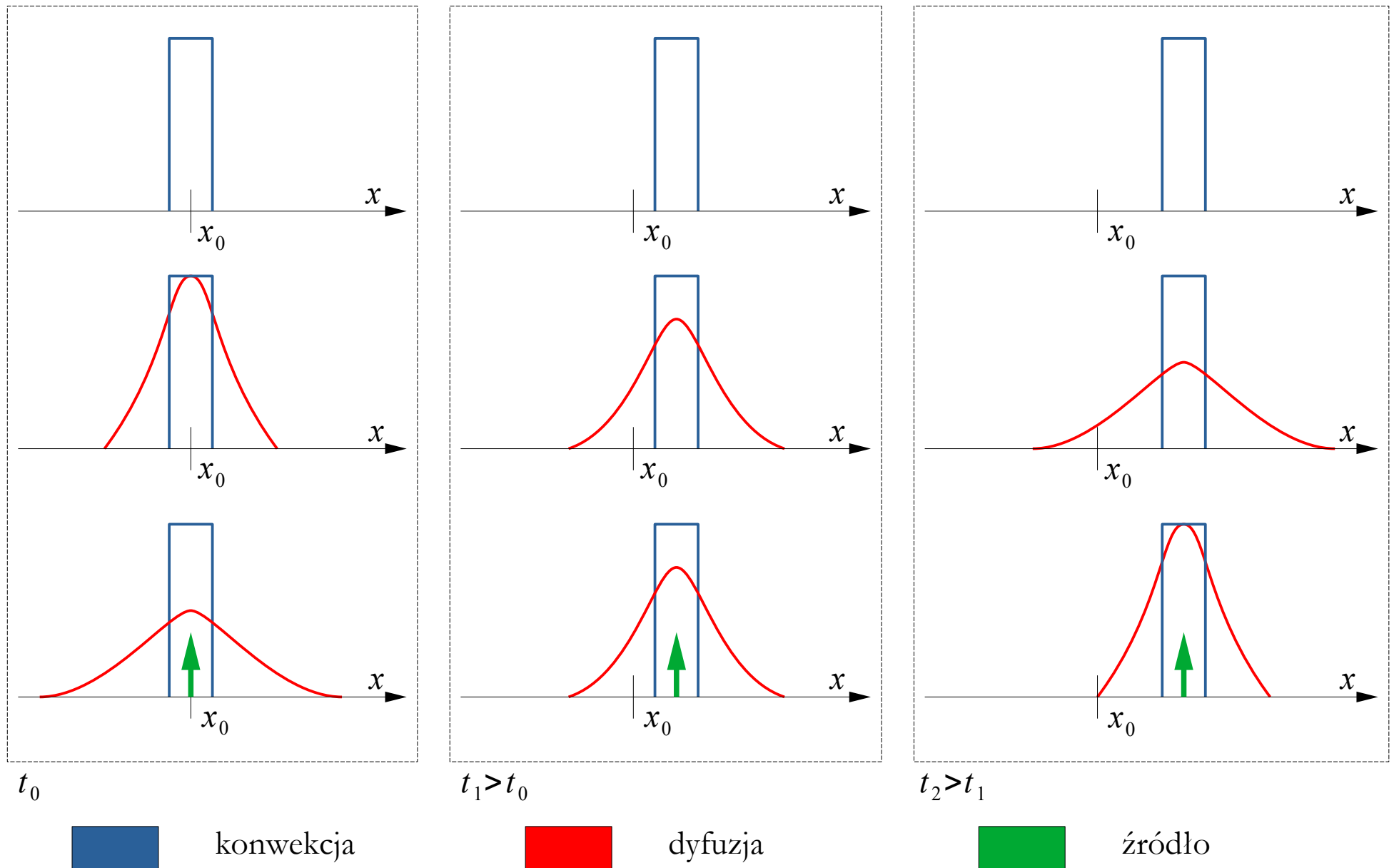
bilans masy: $\frac{\partial}{\partial t} \rho + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0$

bilans pędu: $\frac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{v}) + \text{div}(\rho \vec{v} \vec{v}) = \text{div}(-p \vec{I} + \vec{\tau}^l + \vec{\tau}^t + \dots) + \rho \vec{s}_p$

bilans energii: $\frac{\partial}{\partial t}(\rho e) + \text{div}(\rho e \vec{v}) = \text{div}\left[\left(-p \vec{I} + \vec{\tau}^l + \vec{\tau}^t + \dots\right) \vec{v} + \vec{q}_s^l + \vec{q}_s^t + \dots\right] + \rho s_e$



Ilustracja członów równań bilansowych



Kartezjańska postać równań bilansowych

bilans masy:
$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) = 0$$

bilans pędu:
$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v_x v_x + \delta_{ij} p) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v_x v_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_x v_z) = \\ \frac{\partial}{\partial x} (\tau_{xx}^c) + \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{xy}^c) + \frac{\partial}{\partial z} (\tau_{xz}^c) + \rho s_{bx} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v_y v_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v_y v_y + \delta_{ij} p) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_y v_z) = \\ \frac{\partial}{\partial x} (\tau_{yx}^c) + \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{yy}^c) + \frac{\partial}{\partial z} (\tau_{yz}^c) + \rho s_{by} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho v_z) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v_z v_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v_z v_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z v_z + \delta_{ij} p) = \\ \frac{\partial}{\partial x} (\tau_{zx}^c) + \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{zy}^c) + \frac{\partial}{\partial z} (\tau_{zz}^c) + \rho s_{bz} \end{aligned}$$

bilans energii:
$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho e) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho h v_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho h v_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho h v_z) = \\ \frac{\partial}{\partial x} (\tau_{xx}^c v_x + \tau_{xy}^c v_y + \tau_{xz}^c v_z + q_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{yx}^c v_x + \tau_{yy}^c v_y + \tau_{yz}^c v_z + q_y) + \\ \frac{\partial}{\partial z} (\tau_{zx}^c v_x + \tau_{zy}^c v_y + \tau_{zz}^c v_z + q_z) + \rho s_e \end{aligned}$$

Kartezjańska postać równań bilansowych

bilans masy:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) = 0$$

bilans pędu:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v_x v_x + \delta_{ij} p) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v_x v_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_x v_z) =$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (\tau_{xx}^c) + \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{xy}^c) + \frac{\partial}{\partial z} (\tau_{xz}^c) + \rho s_{bx}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v_y v_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v_y v_y + \delta_{ij} p) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_y v_z) =$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (\tau_{yx}^c) + \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{yy}^c) + \frac{\partial}{\partial z} (\tau_{yz}^c) + \rho s_{by}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_z) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v_z v_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v_z v_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z v_z + \delta_{ij} p) =$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (\tau_{zx}^c) + \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{zy}^c) + \frac{\partial}{\partial z} (\tau_{zz}^c) + \rho s_{bz}$$

bilans energii:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho e) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho h v_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho h v_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho h v_z) =$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (\tau_{xx}^c v_x + \tau_{xy}^c v_y + \tau_{xz}^c v_z + q_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{yx}^c v_x + \tau_{yy}^c v_y + \tau_{yz}^c v_z + q_y) +$$

$$\frac{\partial}{\partial z} (\tau_{zx}^c v_x + \tau_{zy}^c v_y + \tau_{zz}^c v_z + q_z) + \rho s_e$$

Zachowawcza postać równań bilansowych

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{Bmatrix} \rho \\ \rho v_x \\ \rho v_y \\ \rho v_z \\ \rho e \end{Bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{Bmatrix} \rho v_x \\ \rho v_x v_x + p \\ \rho v_y v_x \\ \rho v_z v_x \\ \rho h v_x \end{Bmatrix} + \frac{\partial}{\partial y} \begin{Bmatrix} \rho v_y \\ \rho v_x v_y \\ \rho v_y v_y + p \\ \rho v_z v_y \\ \rho h v_y \end{Bmatrix} + \frac{\partial}{\partial z} \begin{Bmatrix} \rho v_z \\ \rho v_x v_z \\ \rho v_y v_z \\ \rho v_z v_z + p \\ \rho h v_z \end{Bmatrix} =$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \begin{Bmatrix} 0 \\ \tau_{xx}^c \\ \tau_{yx}^c \\ \tau_{zx}^c \\ \tau_{xx}^c v_x + \tau_{yx}^c v_y + \tau_{zx}^c v_z + q_x \end{Bmatrix} + \frac{\partial}{\partial y} \begin{Bmatrix} 0 \\ \tau_{xy}^c \\ \tau_{yy}^c \\ \tau_{zy}^c \\ \tau_{xy}^c v_x + \tau_{yy}^c v_y + \tau_{zy}^c v_z + q_y \end{Bmatrix} + \frac{\partial}{\partial z} \begin{Bmatrix} 0 \\ \tau_{xz}^c \\ \tau_{yz}^c \\ \tau_{zz}^c \\ \tau_{xz}^c v_x + \tau_{yz}^c v_y + \tau_{zz}^c v_z + q_z \end{Bmatrix} +$$

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ \rho s_{bx} \\ \rho s_{by} \\ \rho s_{bz} \\ \rho e \end{Bmatrix}$$

do i=1,n

.....

end do

Zachowawcza postać równań bilansowych

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} U \\ \rho v_x \\ \rho v_y \\ \rho v_z \\ \rho e \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} F_x \\ \rho v_x v_x + p \\ \rho v_y v_x \\ \rho v_z v_x \\ \rho h v_x \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial y} \begin{pmatrix} F_y \\ \rho v_x v_y \\ \rho v_y v_y + p \\ \rho v_z v_y \\ \rho h v_y \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial z} \begin{pmatrix} F_z \\ \rho v_x v_z \\ \rho v_y v_z \\ \rho v_z v_z + p \\ \rho h v_z \end{pmatrix} = \\
 & \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xx}^c \\ \tau_{yx}^c \\ \tau_{zx}^c \\ \tau_{xx}^c v_x + \tau_{yx}^c v_y + \tau_{zx}^c v_z + q_x \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial y} \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xy}^c \\ \tau_{yy}^c \\ \tau_{zy}^c \\ \tau_{xy}^c v_x + \tau_{yy}^c v_y + \tau_{zy}^c v_z + q_y \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial z} \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xz}^c \\ \tau_{yz}^c \\ \tau_{zz}^c \\ \tau_{xz}^c v_x + \tau_{yz}^c v_y + \tau_{zz}^c v_z + q_z \end{pmatrix} + \\
 & F_x^v \quad F_y^v \quad F_z^v \quad S \begin{pmatrix} 0 \\ \rho s_{bx} \\ \rho s_{by} \\ \rho s_{bz} \\ \rho e \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Zachowawcza postać równań bilansowych

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} U}_{\text{człon czasowy}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} F_x + \frac{\partial}{\partial y} F_y + \frac{\partial}{\partial z} F_z}_{\text{człon konwekcyjny}} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} F_x^v + \frac{\partial}{\partial y} F_y^v + \frac{\partial}{\partial z} F_z^v}_{\text{człon dyfuzyjny}} + \underbrace{S}_{\text{źródła}}$$

gdzie:

U – wektor zmiennych zachowawczych (podstawowych),

F – wektor konwekcyjny, odpowiedzialny za zmianę wielkości bilansowanej wynikłą z ruchu płynu (jest to odwracalna część energii),

F^v – wektor dyfuzyjny, odpowiedzialne za zmianę wielkości bilansowanej wynikłą z faktu istnienia lepkości, turbulencji, dyfuzji i innych (są to straty nieodwracalne zamieniane w ciepło),

S – wektor źródłowy, odpowiedzialny za zmianę wielkości bilansowej wynikłą z przemian fazowych i/lub reakcji chemicznych.

Zachowawcza postać równań bilansowych

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} U}_{\text{człon czasowy}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} F_x + \frac{\partial}{\partial y} F_y + \frac{\partial}{\partial z} F_z}_{\text{człon konwekcyjny}} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} F_x^v + \frac{\partial}{\partial y} F_y^v + \frac{\partial}{\partial z} F_z^v}_{\text{człon dyfuzyjny}} + \underbrace{S}_{\text{źródła}}$$

$$\vec{F} = F_x + F_y + F_z$$

$$\vec{F}^v = F_x^v + F_y^v + F_z^v$$

$$\frac{\partial}{\partial t} U + \nabla \vec{F} = \nabla \vec{F}^v + S$$

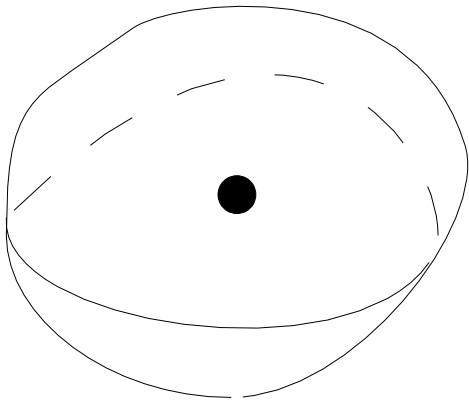
lub

$$\frac{\partial}{\partial t} U + \operatorname{div} \vec{F} = \operatorname{div} \vec{F}^v + S$$

ogólne równanie
termomechaniki
przepływów płynów
jednoskładnikowych

Całkowa postać równań bilansowych

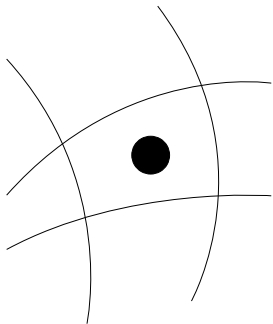
$$\frac{\partial}{\partial t} U + \operatorname{div} \vec{F} = \operatorname{div} \vec{F}^v + S$$



Całkowanie w przestrzeni 3D:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V (U) dV + \int_S (\operatorname{div} \vec{F}) dS = \int_S (\operatorname{div} \vec{F}^v) dS + \int_V (S) dV$$

V (= np. $dx dy dz$) – objętość, S – pole powierzchni.

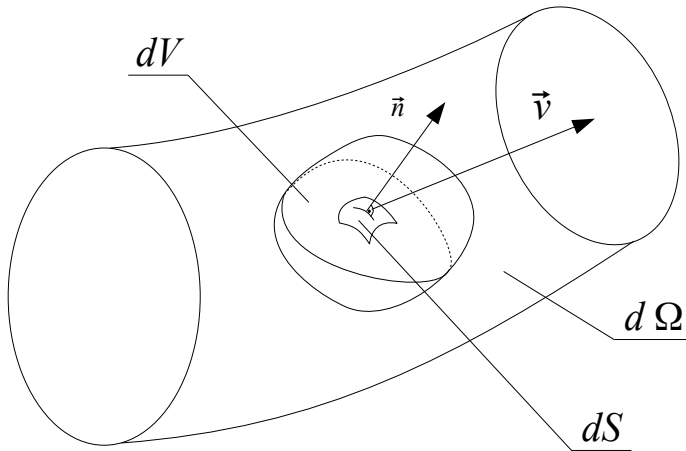


Całkowanie w przestrzeni 2D:

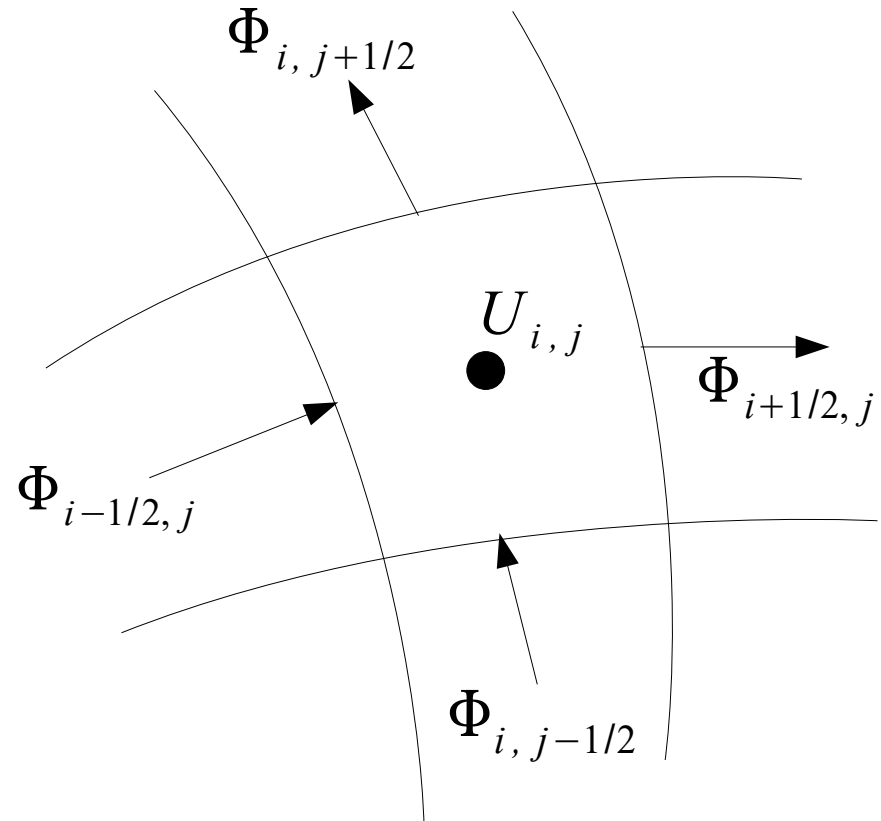
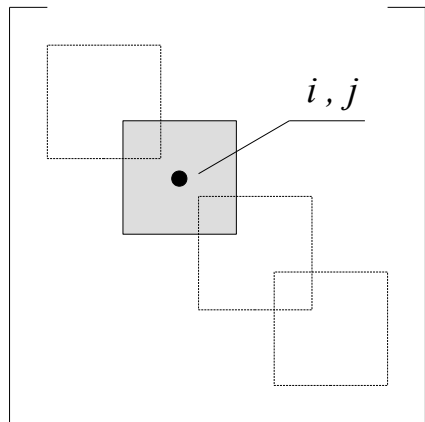
$$\frac{\partial}{\partial t} \int_A (A) dA + \int_l (\operatorname{div} \vec{F}) dl = \int_l (\operatorname{div} \vec{F}^v) dl + \int_A (S) dA$$

A (= np. $dx dy$) – pole powierzchni, l – obwód.

Całkowa postać równań bilansowych



Efektom rozpisania bilansów dla konkretnego układu współrzędnych jest macierz pasmowa (układ równań liniowych do rozwiązania)

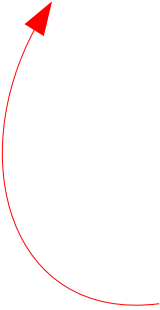


$$\int_S (\Phi \vec{v} \cdot \vec{n}) dS \longrightarrow \sum_{k=1}^4 \Phi_k \vec{v}_k \vec{n}_k$$

Domknięcie

Domknięcie jest to model matematyczny opisujący jednostkowe zjawisko lub proces, uzupełniający podstawowy układ równań bilansowych. Przykładami domknięć mogą być wzory na tensor naprężeń lepkich, tensor naprężeń turbulentnych, strumień ciepła, siły masowe itp.

$$\{\rho, \vec{v}, p, \vec{\tau}(\vec{\tau}^l + \vec{\tau}^t + \dots), \vec{s}_p, e, \vec{q}_s(\vec{q}_s^l, \vec{q}_s^t, \dots), s_e\}$$



niewiadomych jest znacznie więcej niż równań

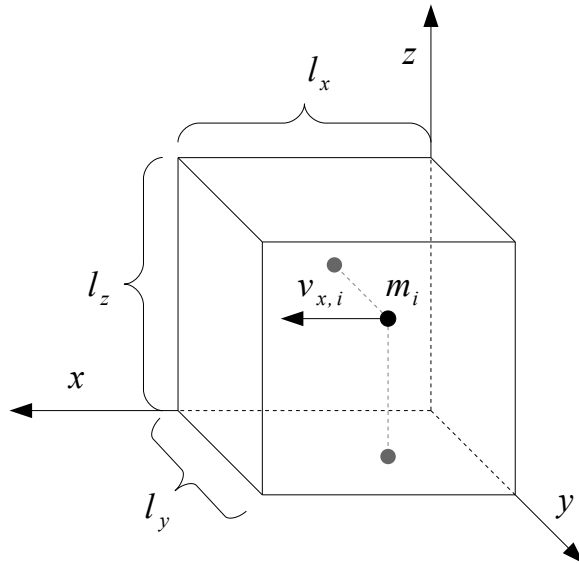
Rodzaje równań w MOS

- równania bilansowe (transportu) – opisują one bilans pewnej wielkości na poziomie makrostruktury (w obszarze pojedynczej komórki siatki). Przykładami są równania transportu masy, pędu, energii, entropii.
- równania ewolucji – opisują one bilans pewnej wielkości na poziomie mikrostruktury (w obszarze pojedynczej komórki siatki) i stanowią zazwyczaj uzupełnienie podstawowego układu równań. Przykładami mogą być równania ewolucji energii turbulencji, stopnia jej dyssypacji, wirowości czy też intermitencji.
- równanie kinematyki – opisuje własności kinematyczne płynu, w szczególności tzw. tensor prędkości deformacji elementu płynu.

Rodzaje równań w MOS

- równania konstytutywne – opisują właściwości płynu. Generalnie rozróżnia się cztery rodzaje równań konstytutywnych:
 - równanie stanu – opisują zależności pomiędzy podstawowymi parametrami termodynamicznymi (np. rów. Clapeyrona czy też rów. Van der Waalsa),
 - domknięcie na tensory naprężeń lepkich i turbulentnych – zawierają modele płynów oraz modele turbulencji,
 - domknięcie na wektor źródeł – opisują dodatkowe zjawiska występujące wewnątrz objętości skończonej (siły, generację masy, generację ciepła itp.),
 - domknięcia na przepływ masy i ciepła – opisują zasady wymiany masy i ciepła pomiędzy poszczególnymi składnikami przepływu i/lub otoczeniem.

Równanie stanu



Clapeyrona:

$$pV = nR_u T$$

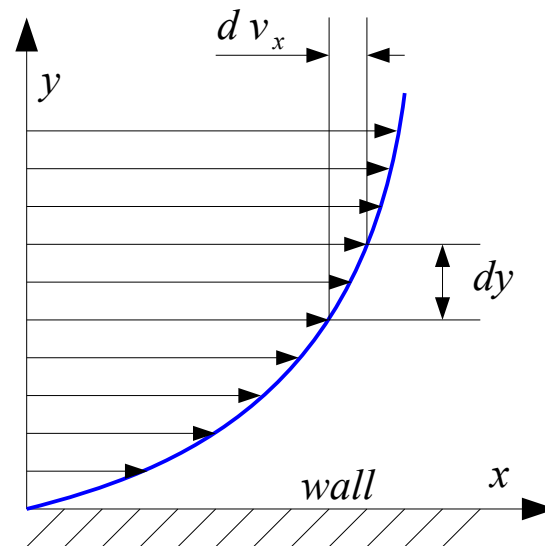
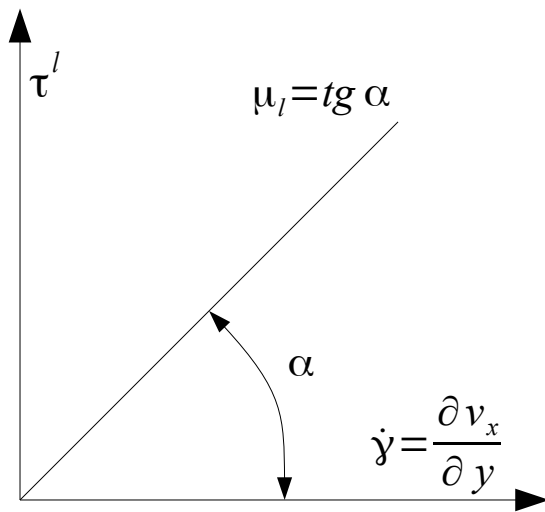
van der Waalsa:

$$\left(p + a \cdot \frac{n^2}{V_m^2} \right) \cdot (V_m - n \cdot b) = R_u \cdot T$$

p	- ciśnienie bezwzględne [Pa]
n	- liczba moli [mol]
V_m	- objętość molowa [m^3/mol]
R_u	- uniwersalna stała gazowa [$\text{J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$]
T	- temperatura bezwzględna [K]
a	- poprawka uwzględniająca przyciąganie cząsteczek gazu (a więc spadek ciśnienia)
b	- poprawka uwzględniająca objętość własną cząsteczek

Tensor naprężeń lepkich

Całkowity tensor naprężeń lepkich (w 3D) obejmuje naprężenia normalne (orientowane tensorem jednostkowym) oraz styczne, zależne od prędkości deformacji.



$$\tau_{xy}^l = \mu_l \frac{\partial v_x}{\partial y}$$

$$\begin{matrix} \leftrightarrow & \leftrightarrow & \leftrightarrow \\ T = a I + b D \end{matrix}$$

τ^l - tensor molekularnych naprężeń lepkich $[Pa]$

$\leftrightarrow$

I - tensor jednostkowy

$\leftrightarrow$

D - tensor prędkości deformacji

Tensor naprężień lepkich

$$\stackrel{\leftrightarrow}{I} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \stackrel{\leftrightarrow}{D} = \begin{vmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{vmatrix}$$

$$\stackrel{\leftrightarrow}{T} = a \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{vmatrix}$$

Tensor naprężeń lepkich

$$\begin{array}{c} \overleftrightarrow{T} \\ \left\{ \begin{array}{ccc} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{array} \right\} \end{array} = a \begin{array}{c} \overleftrightarrow{I} \\ \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right\} \end{array} + b \overbrace{\left\{ \begin{array}{ccc} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{array} \right\}}^{\overleftrightarrow{D}}$$

Tensory są sobie równe, gdy ich ślady (niezmienniki) są sobie równe:

$$\tau_{xx} + \tau_{yy} + \tau_{zz} = 3a + b \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)$$

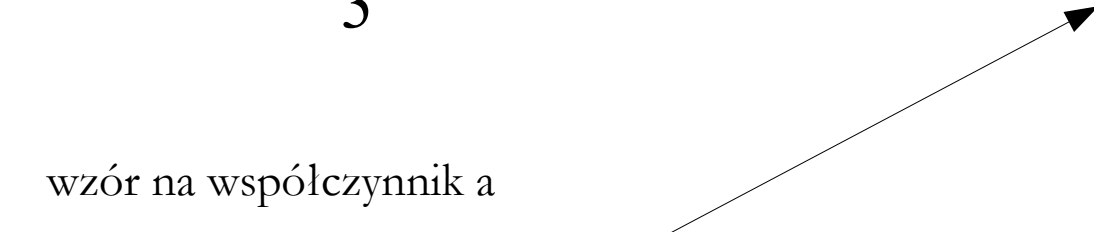
Tensor naprężeń lepkich

$$\tau_{xx} + \tau_{yy} + \tau_{zz} = 3a + b \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)$$

$$\underbrace{\frac{\tau_{xx} + \tau_{yy} + \tau_{zz}}{3}}_{-p} = a + \underbrace{\frac{1}{3} b \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)}_{\text{div}(v)}$$

$$-p = a + \frac{1}{3} b \text{div}(v) \quad \longrightarrow \quad a = -p - \frac{1}{3} b \text{div}(v)$$

wzór na współczynnik a



Tensor naprężeń lepkich

a czemu się równa współczynnik b?

$$\leftrightarrow T = a \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{vmatrix}$$

τ_{xy}^l

$$\tau_{xy}^l = \mu_l \frac{\partial v_x}{\partial y} \xrightarrow{v_y=0} \mu_l \frac{\partial v_x}{\partial y} = b \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \longrightarrow b = 2\mu_l$$

Tensor naprężeń lepkich

$$\overset{\leftrightarrow}{T} = a \overset{\leftrightarrow}{I} + b \overset{\leftrightarrow}{D} \quad \left\{ \begin{array}{l} a = -p - \frac{1}{3} b \operatorname{div}(\boldsymbol{v}) \\ b = 2\mu_l \end{array} \right.$$

$$\overset{\leftrightarrow}{T} = \left(-p - \frac{2}{3} \mu_l \operatorname{div}(\boldsymbol{v}) \right) \overset{\leftrightarrow}{I} + 2\mu_l \overset{\leftrightarrow}{D}$$

$$\overset{\leftrightarrow}{T} = -p \overset{\leftrightarrow}{I} - \frac{2}{3} \mu_l \operatorname{div}(\boldsymbol{v}) \overset{\leftrightarrow}{I} + 2\mu_l \overset{\leftrightarrow}{D} \quad \leftarrow \quad \lambda = -\frac{2}{3} \mu_l + \mu_l'$$

$$\overset{\leftrightarrow}{T} = -p \overset{\leftrightarrow}{I} + 2\mu_l \overset{\leftrightarrow}{D} - \frac{2}{3} \mu_l \operatorname{div}(\boldsymbol{v}) \overset{\leftrightarrow}{I} + \mu_l' \operatorname{div}(\boldsymbol{v}) \overset{\leftrightarrow}{I}$$

$$\overset{\leftrightarrow}{T} = -p \overset{\leftrightarrow}{I} + \tau^l$$

τ^l

Tensor naprężeń turbulentnych

$$\vec{\tau}^l = 2\mu_l \vec{D} - \frac{2}{3}\mu_l \operatorname{div}(\vec{v}) \vec{I} + \mu_l' \operatorname{div}(\vec{v}) \vec{I} \quad - \text{tensor naprężeń lepkich}$$

$$\vec{\tau}^t = 2\mu_t \vec{D} - \frac{2}{3}\mu_t \operatorname{div}(\vec{v}) \vec{I} + \mu_t' \operatorname{div}(\vec{v}) \vec{I} \quad - \text{tensor naprężeń turbulentnych (w ujęciu RANS):}$$

$\vec{D}$ - tensor prędkości deformacji [m/s]

$\vec{I}$ - tensor jednostkowy [-]

μ_l - współczynnik lepkości dynamicznej (wielkość fizyczna) [Pa·s]

μ_t - współczynnik lepkości turbulentnej (wielkość нефизyczna) [Pa·s]

Strumienie ciepła

$$\vec{q}^l = \lambda_l \text{grad}(T) = \frac{c_p \mu_l}{Pr_l} \text{grad}(T)$$

- molekularny strumień ciepła

$$\vec{q}^t = \lambda_t \text{grad}(T) = \frac{c_p \mu_t}{Pr_t} \text{grad}(T)$$

- turbulentny strumień ciepła
(w ujęciu RANS):

c_p - ciepło właściwe [J/(kg·K)]

μ - współczynnik lepkości dynamicznej [Pa·s]

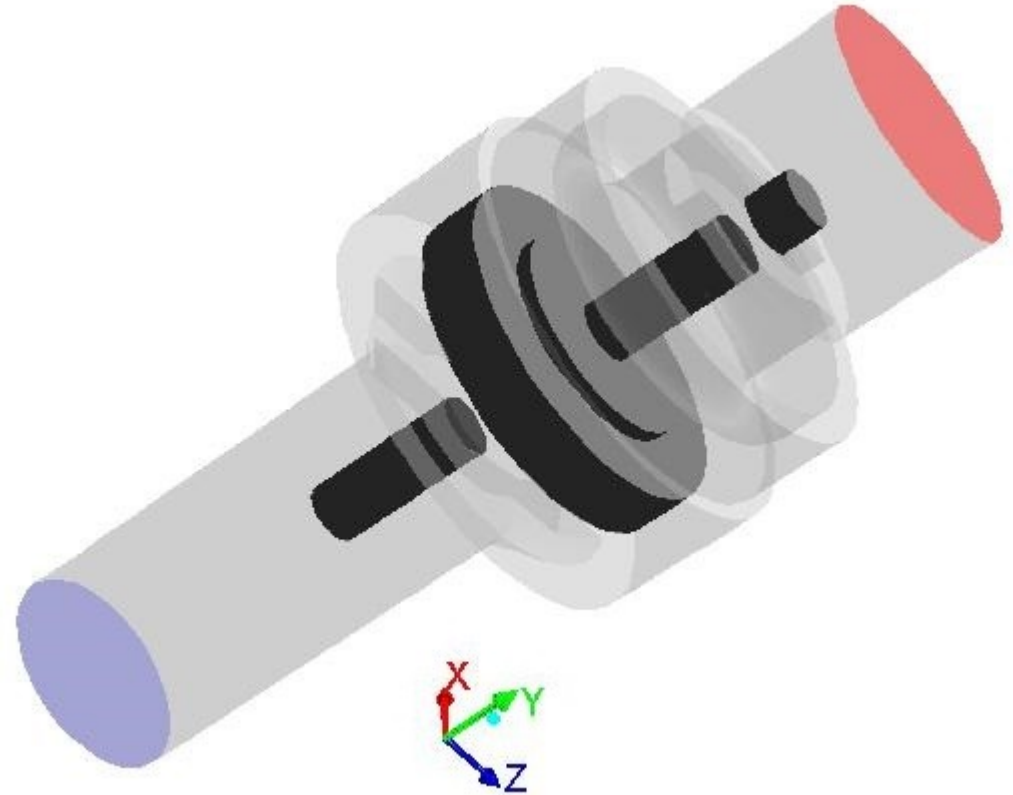
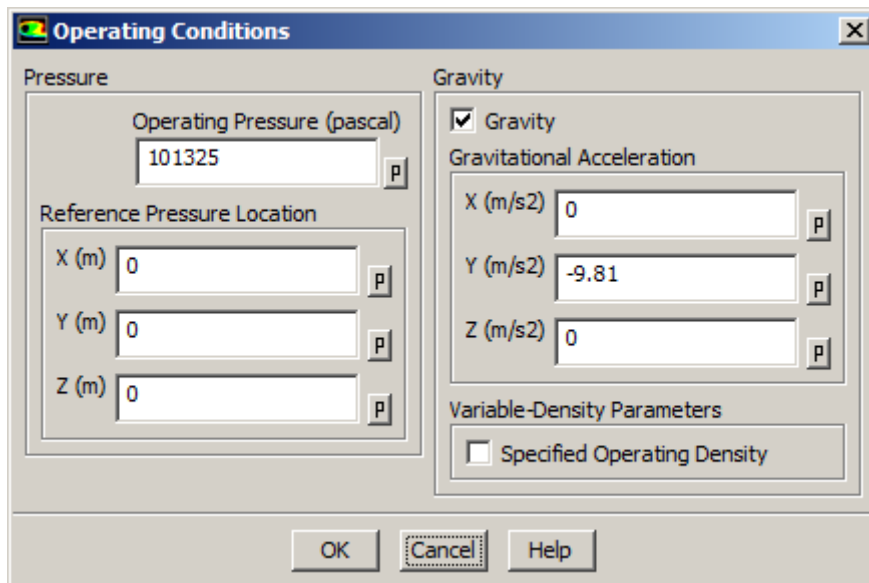
λ_l - laminarny współczynnik przewodności cieplnej [W/(m·K)]

λ_t - turbulentny współczynnik przewodności cieplnej [W/(m·K)]

Źródła

$s_p = \pm g$ - źródło pędu

g - przyspieszenie ziemskie [m/s^2]
(znak zależy od przyjętego układu współrzędnych).



W modelach CFD orientację przestrzenną obiektu ustala się na podstawie składowych wektora przyspieszenia!



UNIVERSITY OF WARMIA AND MAZURY IN OLSZTYN
The Faculty of Technical Sciences
POLAND, 10-957 Olsztyn, M. Oczapowskiego 11
tel.: (48)(89) 5-23-32-40, fax: (48)(89) 5-23-32-55
URL: <http://www.uwm.edu.pl/edu/sobieski/> (in Polish)



Dziękuję za uwagę

Wojciech Sobieski

Olsztyn, 2003-2026