



UNIVERSITY OF WARMIA AND MAZURY IN OLSZTYN
The Faculty of Technical Sciences
POLAND, 10-957 Olsztyn, M. Oczapowskiego 11
tel.: (48)(89) 5-23-32-40, fax: (48)(89) 5-23-32-55
URL: <http://www.uwm.edu.pl/edu/sobieski/> (in Polish)



Obliczeniowa Dynamika Płynów

Computational Fluid Dynamics – CFD

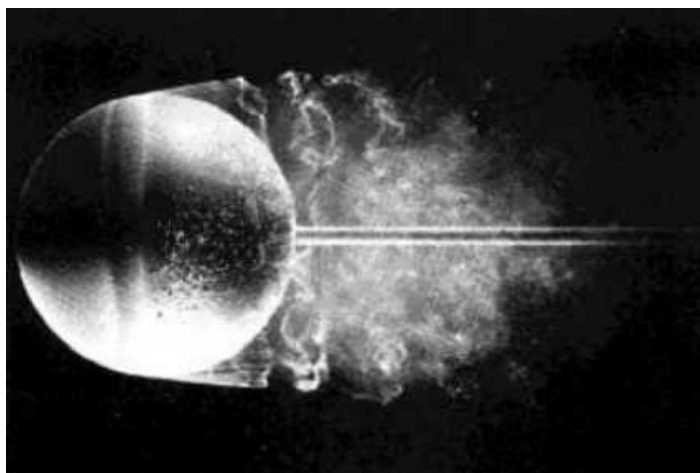
Modelowanie Turbulencji
(wersja skrócona)

wersja: 5 lutego 2026

Wojciech Sobieski

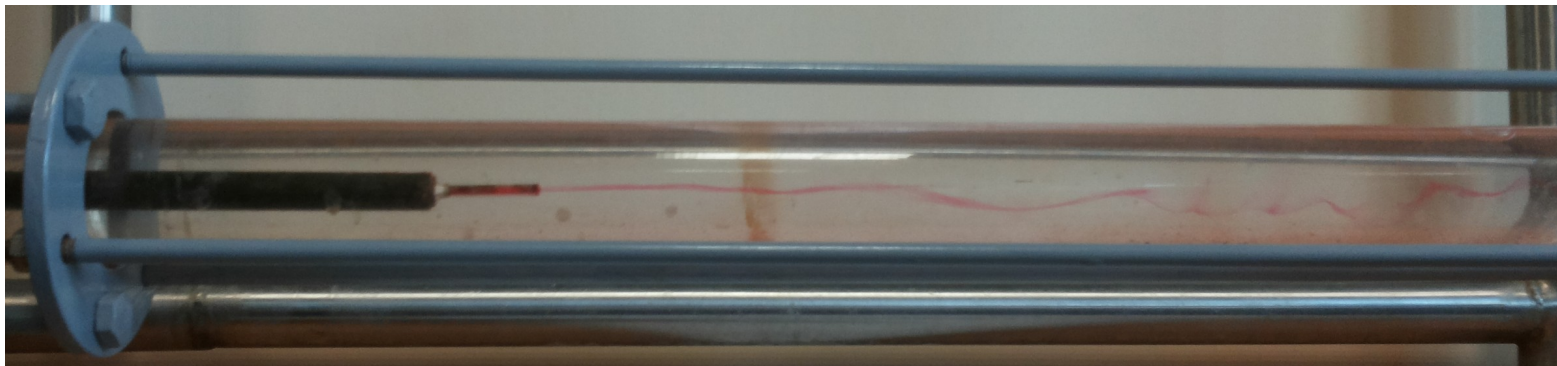
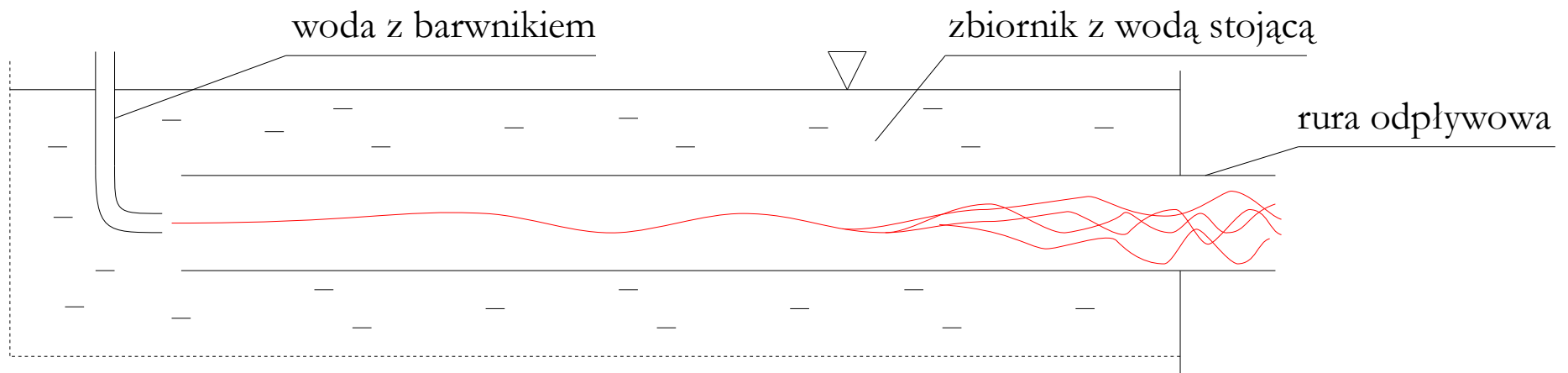
Olsztyn, 2003-2026

Turbulencja w przyrodzie

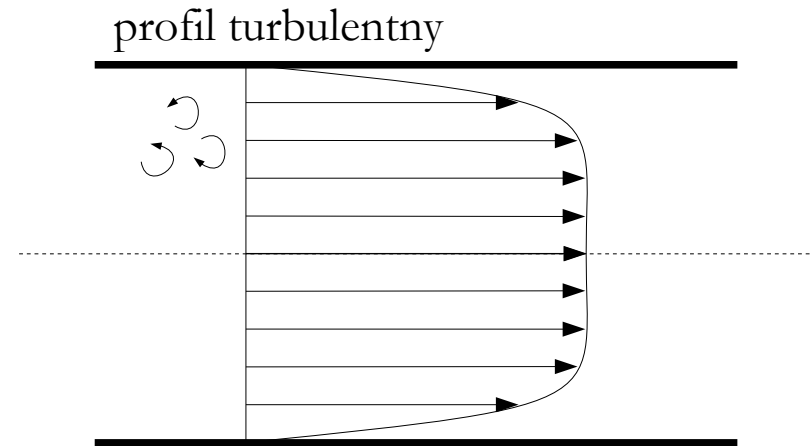
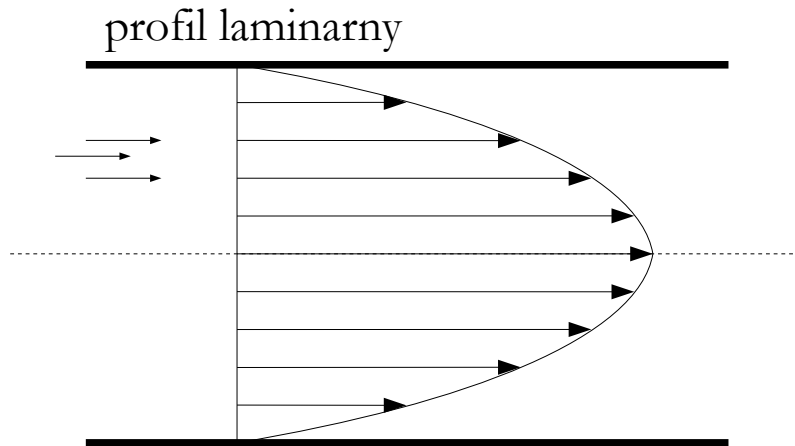


Doświadczenie Reynoldsa

Doświadczenie Reynoldsa – doświadczenie ukazujące zmianę charakteru ruchu po przekroczeniu pewnej umownej granicy, zwanej dolną krytyczną liczbą Reynoldsa.



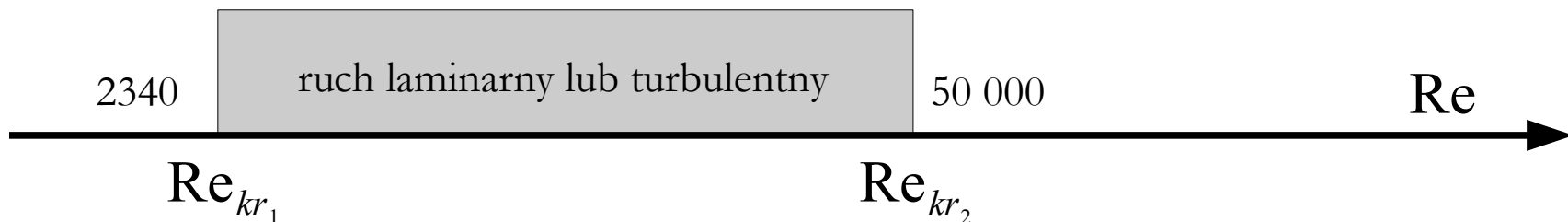
Ruch laminarny i turbulentny



$Re_{kr1} < 2340$ - przepływ laminarny

$Re_{kr1} > 2340$ - przepływ turbulentny

} dolna krytyczna liczba Reynoldsa



Liczba Reynoldsa

Liczba Reynoldsa – stosunek sił czynnych (sił bezwładności) do sił biernych związanych z tarciem wewnętrznym w płynie przejawiającym się w postaci lepkości.

$$\text{Re} = \frac{v \cdot l}{\nu}$$

$$v = \frac{\mu}{\rho}$$

$$\text{Re} = \frac{\rho \cdot v \cdot l}{\mu}$$

v - prędkość charakterystyczna (średnia) $\left[\frac{m}{s} \right]$

l - wymiar charakterystyczny $[m]$

ρ - gęstość $\left[\frac{kg}{m^3} \right]$

ν - kinematyczny współczynnik lepkości $\left[\frac{m^2}{s} \right]$

μ - współczynnik lepkości dynamicznej $[Pa \cdot s]$

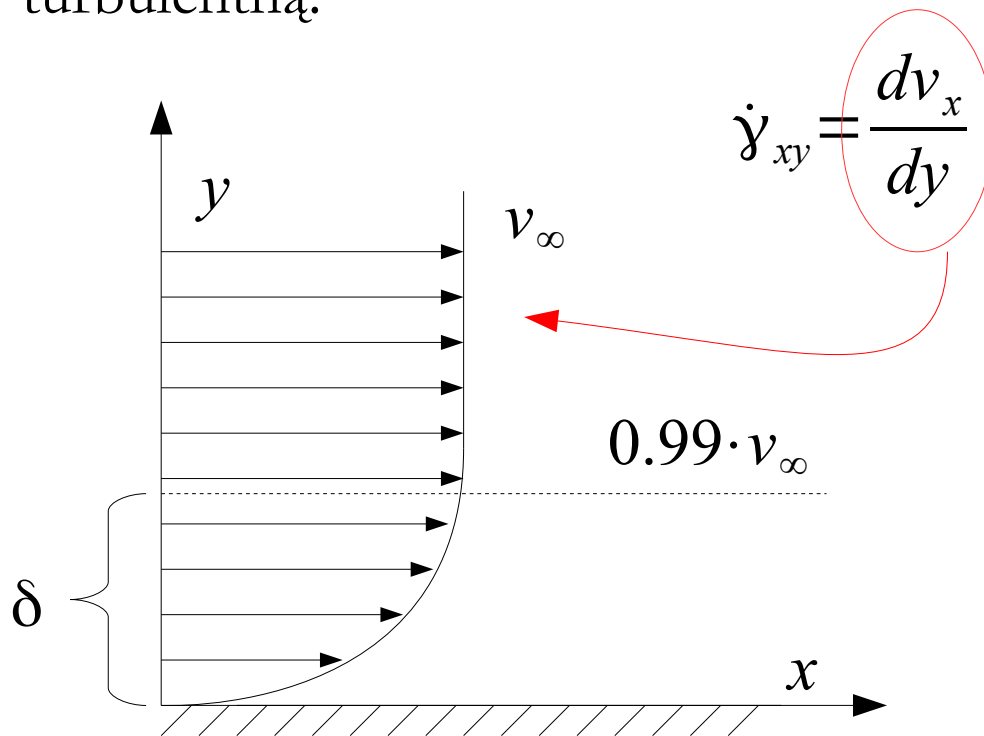
Dla przewodów kołowych: $l = d$

Dla pozostałych przewodów: $l = 4 \cdot r_h$

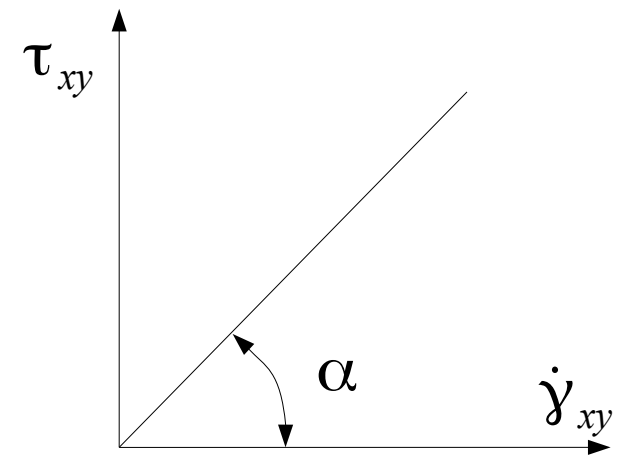
Dla rury kołowej
całkowicie zalanej: $\text{Re} = \frac{c \cdot d}{v}$

Warstwa przyścienna

Warstwa przyścienna – warstwa płynu znajdująca się bezpośrednio przy ścianie ciała opływanego. Rozróżnia się warstwę przyścienną laminarną i turbulentną.



δ - grubość warstwy przyściennej

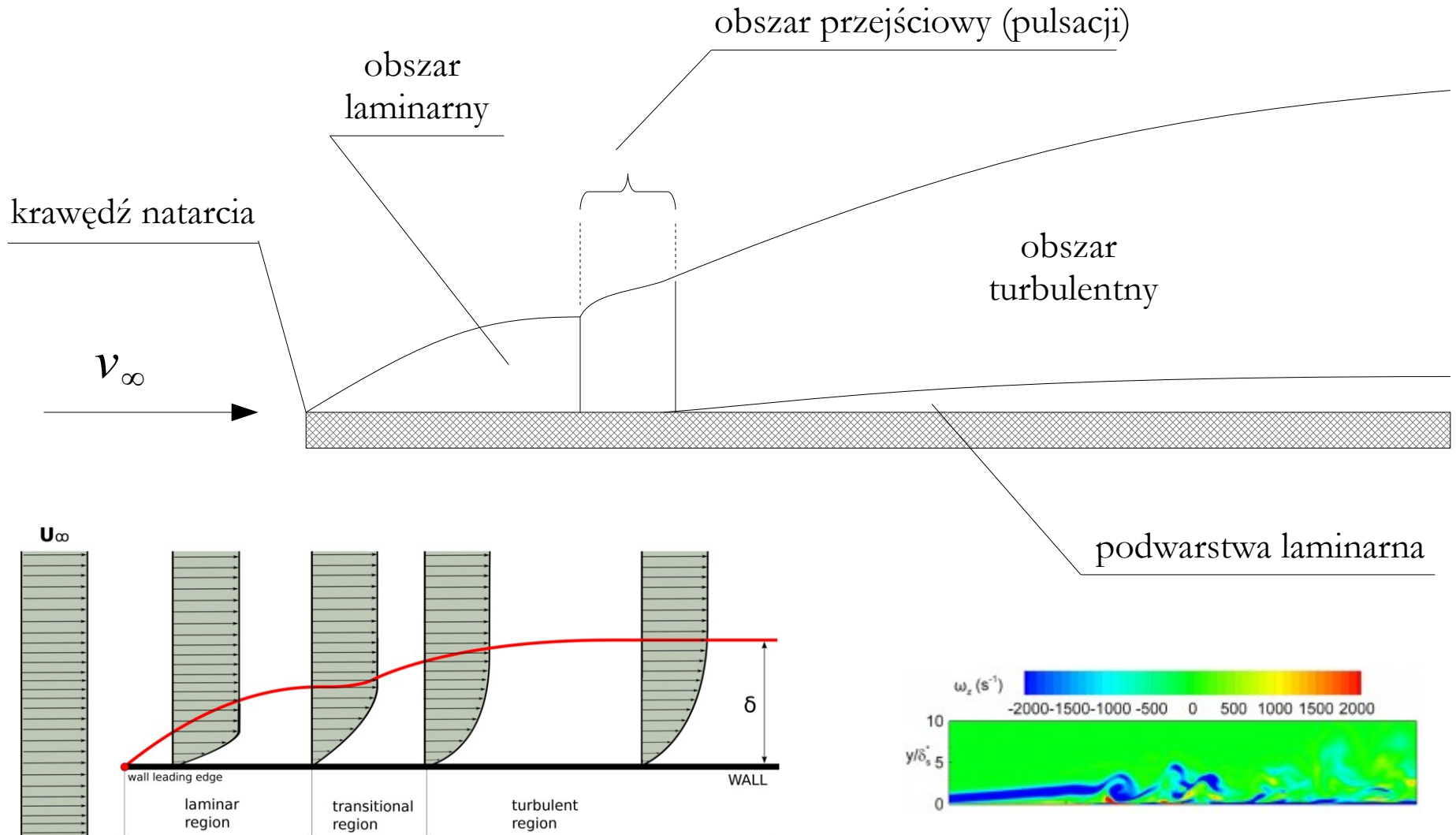


$$\mu = \tan \alpha$$

$$\tau_{xy} = \mu \dot{\gamma}_{xy} \quad [Pa]$$

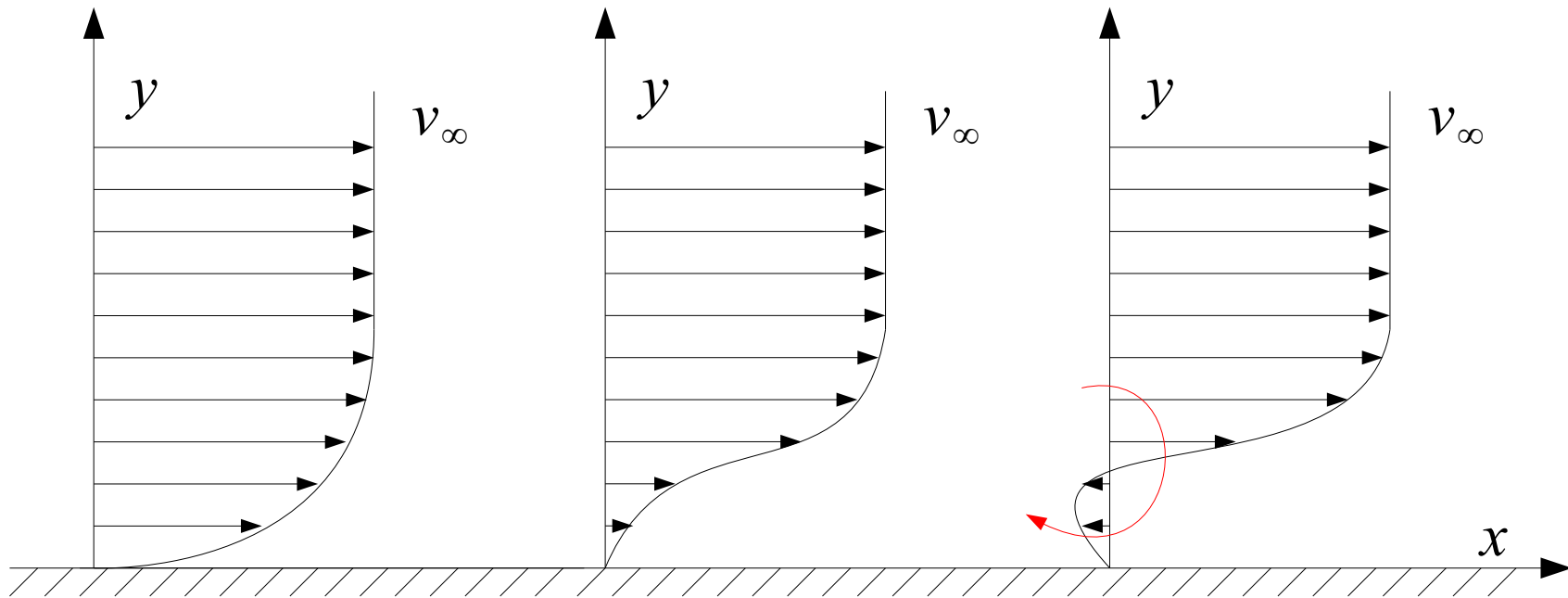
płyn newtonowski

Rozwój warstwy przyściennej na ścianie

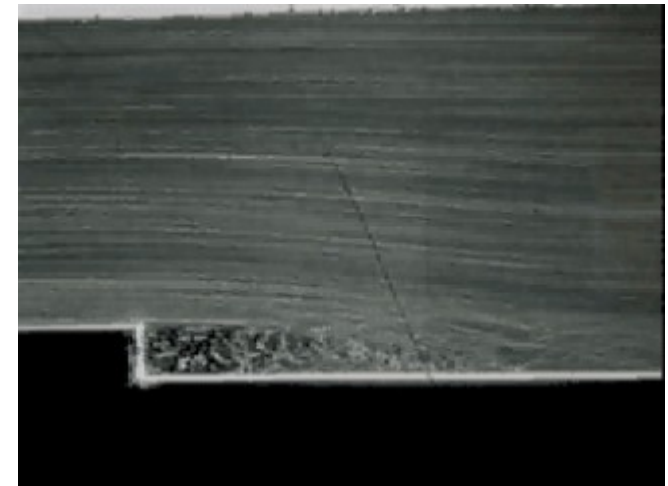
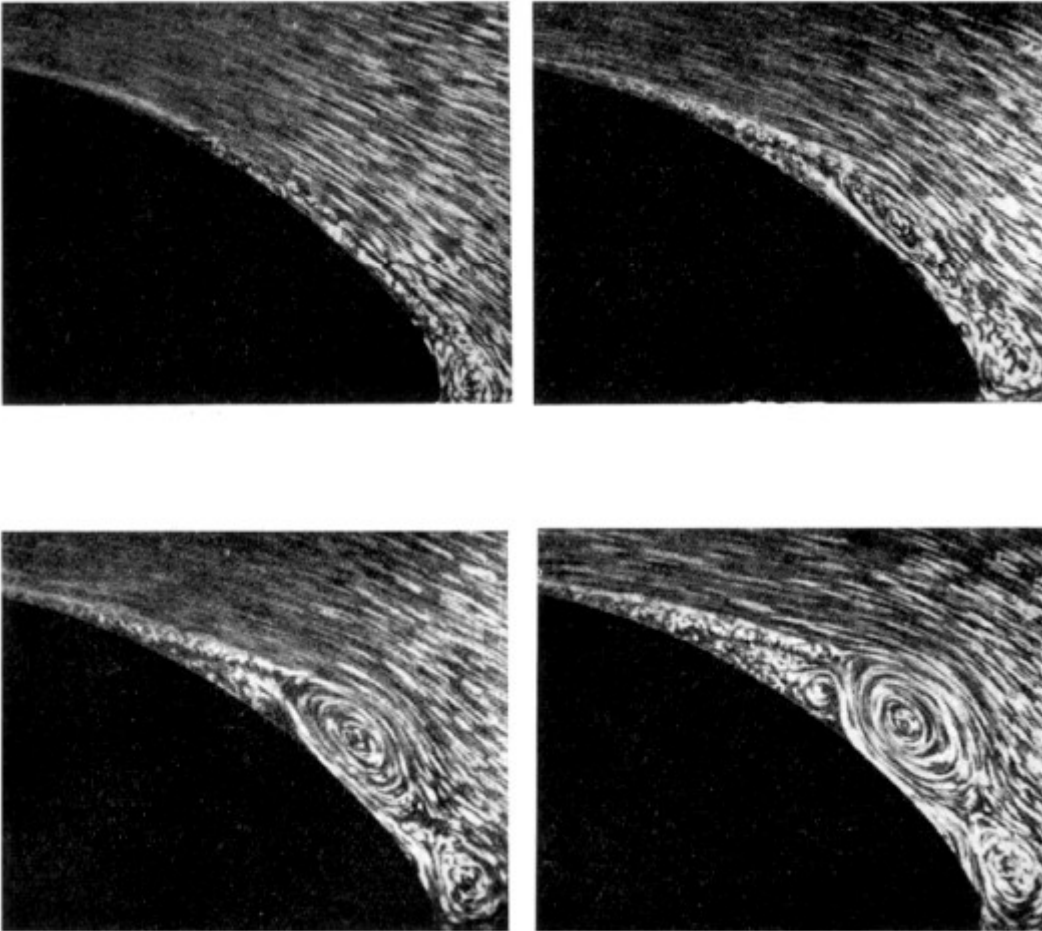


Zjawisko oderwania

Zjawisko oderwania – stopniowe wytracanie energii w warstwie przyściennej prowadzące do powstania wirów i ich propagacji w kierunku rdzenia przepływu.



Zjawisko oderwania



Zjawisko oderwania na profilu kołowym (z lewej) oraz na nagłym uskoku (z prawej).

Wpływ lepkości na warstwę przyścienną



$$\mu = 100 \left[\frac{mPa}{s} \right]$$

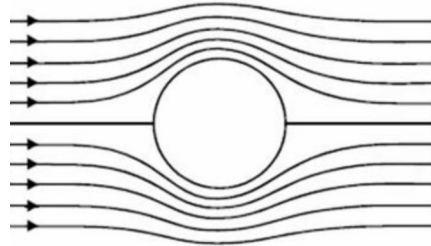


$$\mu = 10 \left[\frac{mPa}{s} \right]$$

Eksperyment ilustrujący wpływ lepkości na grubość warstwy przyściennej – im większa lepkość, tym grubsza warstwa przyścienna.

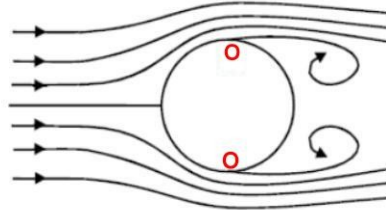
Wiry spływowe

$Re < 2$



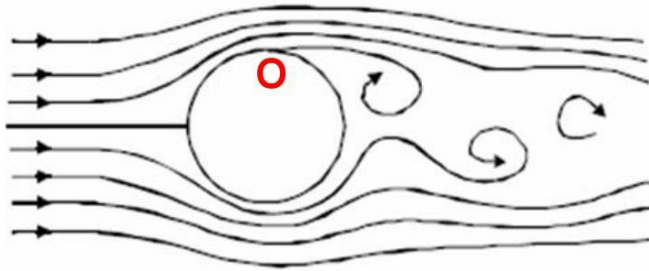
siły bezwładności płynu nie są w stanie pokonać sił lepkości – warstwa przyścienna nie ulega oderwaniu, a płyn w sposób laminarny opływa dookoła praktycznie całą przeszkodę

$2 < Re < 40$



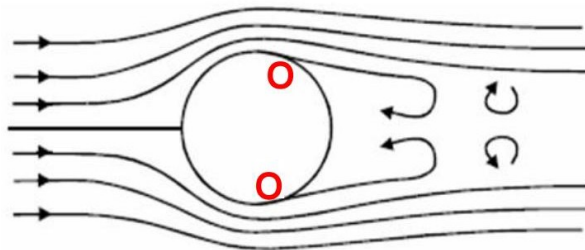
pojawia się oderwanie, ale pęd oraz bezwładność przepływającej strugi są zbyt małe, aby mogły oderwać powstałe wiry – obraz przepływu jest symetryczny

$40 < Re < 10^5$



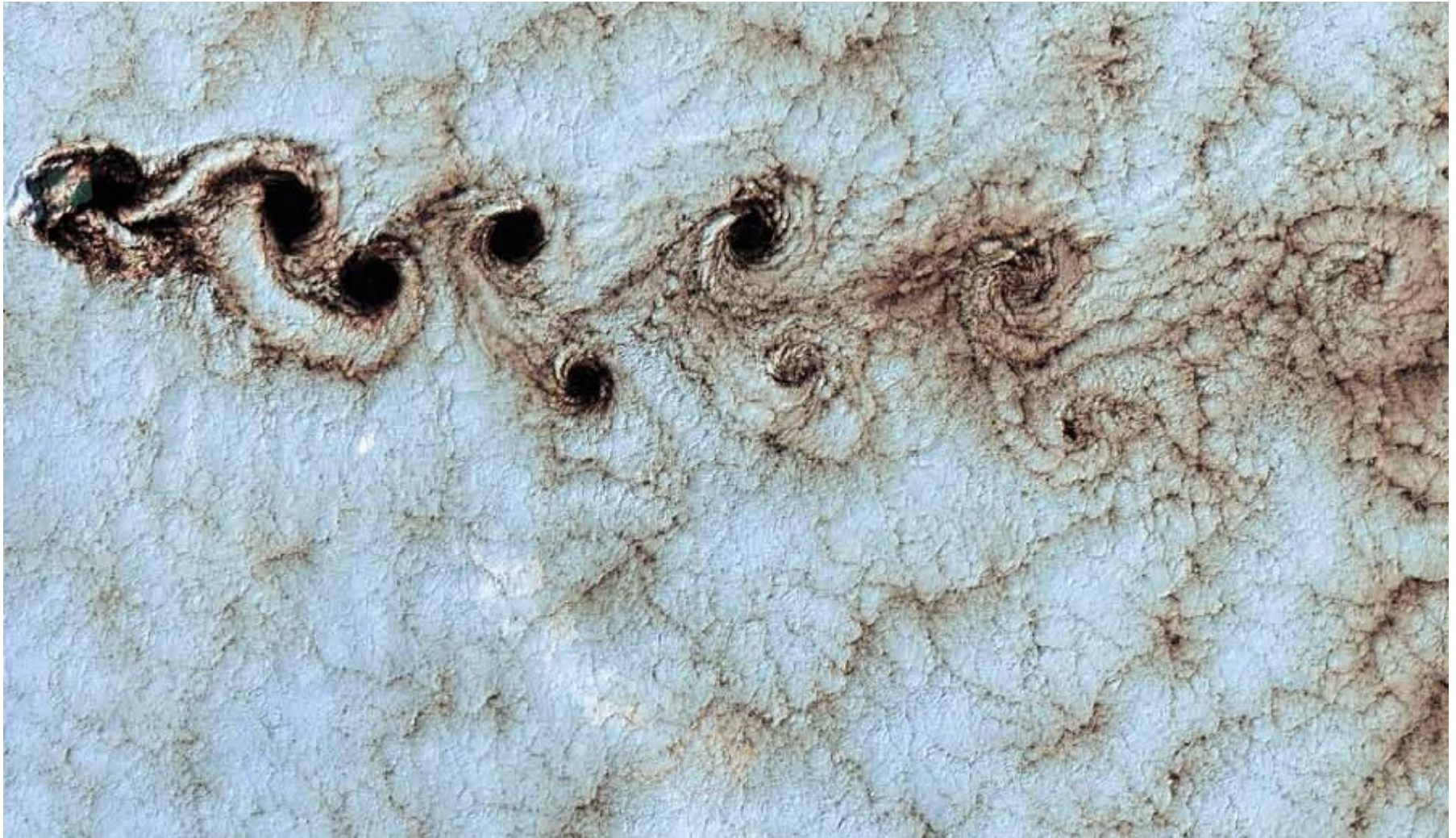
pojawia się oderwanie, a pęd oraz bezwładność przepływającej strugi zrywają naprzemienne tworzące się wiry – układ wirów za ciałem zwany jest **ścieżką** (lub wirami) **von Karmana**

$Re > 10^5$



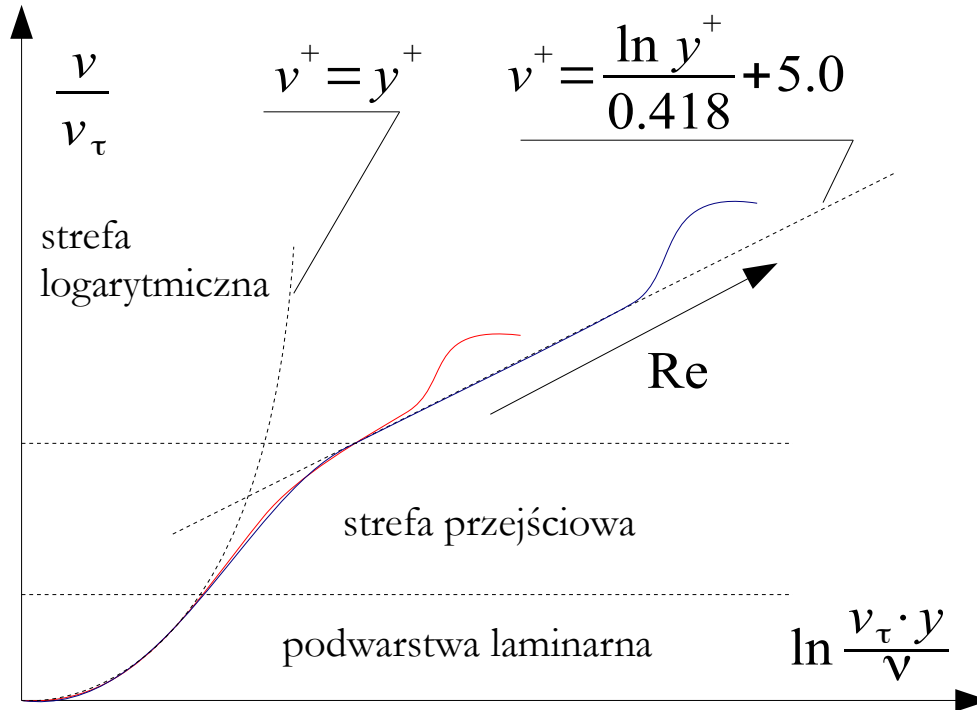
pojawia się oderwanie, a pęd strugi tłumi przepływ i uniemożliwia rozprzestrzenianie się wirów (brak jest na nie miejsca) – obraz przepływu staje się quasi-symetryczny

Ścieżka von Karmana



ścieżka wirów von Karmana w atmosferze ziemskiej (opływ wokół wyspy)

Turbulentna warstwa przyścienna



von Karman wprowadził bezwymiarowe wielkości pozwalające na opis profili prędkości w warstwie przyściennej.

ρ - gęstość płynu

ν - kinematyczny współczynnik lepkości

τ_w - naprężenia styczne na ścianie

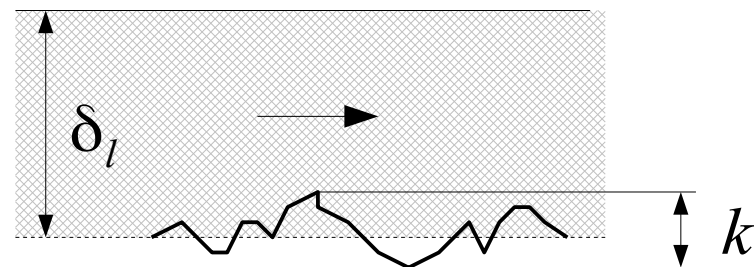
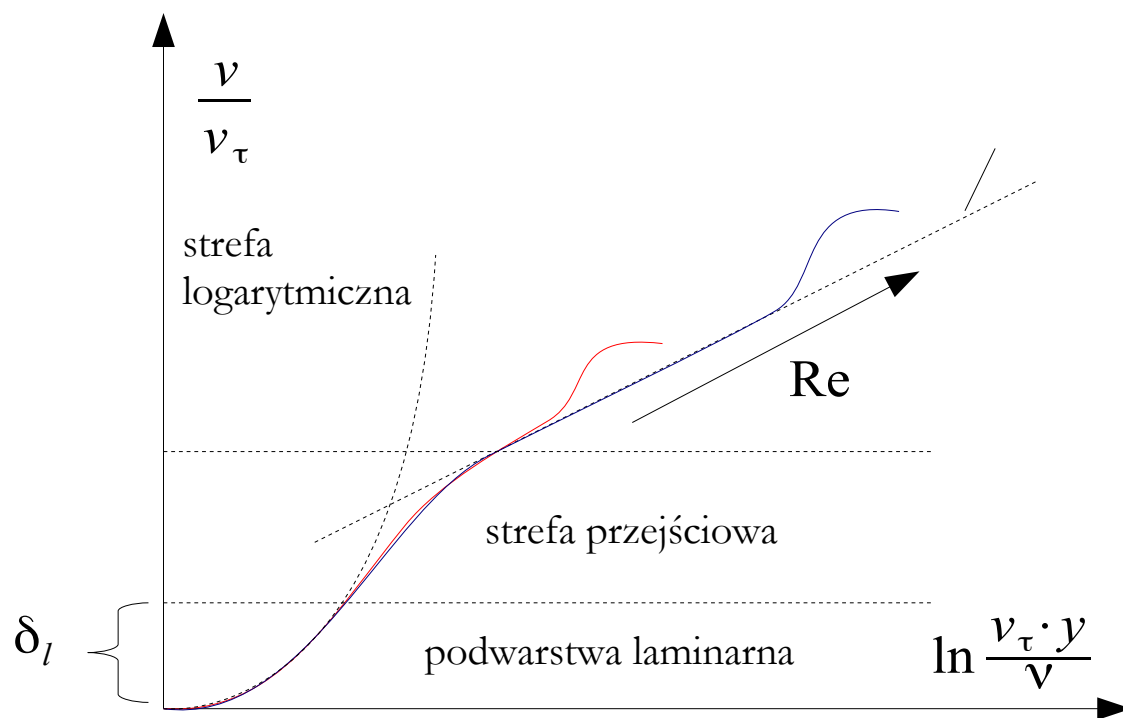
$$y^+ = \frac{y \cdot v_\tau}{\nu} \quad - \text{bezwymiarowa odległość od ściany}$$

$$v^+ = \frac{v}{v_\tau} \quad - \text{bezwymiarowa prędkość przepływu}$$

$$v_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$$

Powierzchnia hydraulicznie gładka

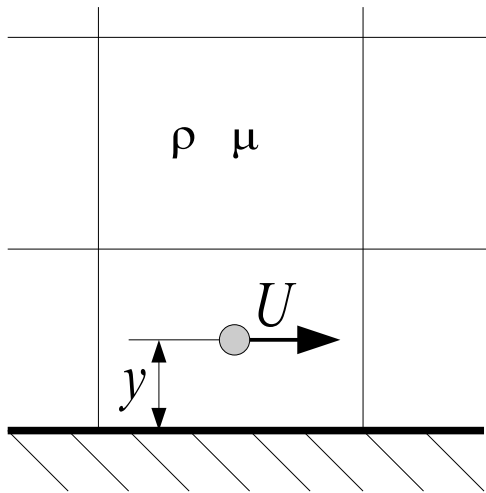
Powierzchnia hydraulicznie gładka – powierzchnia, dla której średnia wysokość chropowatości mieści się w podwarstwie laminarnej. Jeżeli tak jest, to chropowatość nie wpływa na kształt profilu prędkości



y^+

y^+ – parametr używany do określenia, czy dany model numeryczny jest dostosowany do symulacji przepływu w warstwie przyściennej.

- Przepływ laminarny: $y^+ \lesssim 1$
- Przepływ turbulentny z funkcjami przyściennymi: $y^+ \approx 30-100$
- Przepływ turbulentny z bez funkcji przyściennych (np. k- ω SST): $y^+ \approx 1$



$$y^+ = \frac{\rho \cdot U \cdot y}{\mu}$$

ρ - gęstość płynu

U - prędkość płynu w pierwszej warstwie komórek

y - odległość środka pierwszej komórki od ściany

μ - lepkość dynamiczna płynu

Funkcje przyścienne

Funkcje przyścienne – uproszczone modele matematyczne używane w symulacjach CFD, aby opisać zachowanie przepływu bardzo blisko ściany, bez konieczności ekstremalnego zagęszczania siatki w tej strefie.

Standard Wall Functions (SWF):

- zakłada klasyczny logarytmiczny profil prędkości
- wymaga y^+ z zakresu od ~ 30 do 200
- najczęściej używany z modelami $k-\epsilon$ standard / realizable / RNG
- daje dobre efekty przy pełnej turbulencji i prostej geometrii

Funkcje przyścienne

Enhanced Wall Treatment (EWT):

- zakłada dwa zakresy pracy:
 - tuż przy ścianie – rozwiązuje warstwę lepkościową ($y^+ \approx 1$)
 - dalej – stosuje modyfikowane wall functions
- wymaga $y^+ \approx 1$ (maksymalnie 5)
- często używany w skomplikowanych geometriach

Non-Equilibrium Wall Functions (NEWF):

- uwzględnia oddziaływanie odkształcenia (strain)
- uwzględnia wpływ gradientu ciśnienia
- lepiej odwzorowuje przyspieszanie/zwalnianie przepływu
- wymaga y^+ z zakresu od ~ 30 do 200 (jak SWF)
- lepsze dla zakrzywionych ścian, dyfuzorów, konfuzorów, zjawisk separacji
- typowo stosowany z modelami $k-\epsilon$ realizable oraz $k-\epsilon$ RNG

Reynolds-Averaged Navier-Stokes

Reynolds-Averaged Navier-Stokes (RANS) – grupa metod symulacji przepływów turbulentnych polegająca na wykorzystaniu koncepcji dekompozycji pola prędkości Reynoldsa, w której **pola prędkości i ciśnienie** rozkładane są na wartość średnią i składową fluktuacyjną.

Koncepcje modelowania turbulencji w RANS:

- **bazujące na dynamicznym współczynniku lepkości turbulentnej** – w tym ujęciu naprężenia turbulentne są proporcjonalne do prędkości deformacji, analogicznie do naprężeń lepkich (tensor naprężeń turbulentnych jest pewnego rodzaju „korektą” tensora naprężeń lepkich).
- **nie bazujące na dynamicznym współczynniku lepkości turbulentnej** – w tym ujęciu składowe tensora naprężeń turbulentnych są wyliczane bezpośrednio z dodatkowych równań – algebraicznych (ASM), różniczkowych (RSM) lub ewolucji – uwzględniających procesy generacji, dyfuzji, konwekcji i dyssypacji.

Reynolds-Averaged Navier-Stokes

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \bar{\vec{v}}) + \text{div}(\rho \bar{\vec{v}} \bar{\vec{v}} + \bar{p} \bar{\vec{I}}) = \text{div}(\bar{\vec{\tau}}^l) + \bar{\vec{s}}_b \quad \leftarrow \text{Równanie bilansu pędu płynu lepkiego.}$$

$$\vec{v} = \bar{\vec{v}} + \vec{v}' \quad p = \bar{p} + p'$$

tensor naprężeń lepkich

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho(\bar{\vec{v}} + \vec{v}')) + \text{div}(\rho(\bar{\vec{v}} + \vec{v}')(\bar{\vec{v}} + \vec{v}') + (\bar{p} + p') \bar{\vec{I}}) = \text{div}(\bar{\vec{\tau}}^l) + \bar{\vec{s}}_b$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho(\bar{\vec{v}} + \cancel{\vec{v}'})) + \text{div}(\rho(\bar{\vec{v}} \bar{\vec{v}} + \cancel{\bar{\vec{v}} \vec{v}'} + \cancel{\vec{v}' \bar{\vec{v}}} + \vec{v}' \vec{v}') + (\bar{p} + p') \bar{\vec{I}}) = \text{div}(\bar{\vec{\tau}}^l) + \bar{\vec{s}}_b$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \bar{\vec{v}}) + \text{div}(\rho(\bar{\vec{v}} \bar{\vec{v}} + \overline{\vec{v}' \vec{v}'} + (\bar{p} + p') \bar{\vec{I}})) = \text{div}(\bar{\vec{\tau}}^l) + \bar{\vec{s}}_b$$

p' - ciśnienie turbulentne

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \bar{\vec{v}}) + \text{div}(\rho(\bar{\vec{v}} \bar{\vec{v}} + \bar{p} \bar{\vec{I}})) = \text{div}(\bar{\vec{\tau}}^l - \rho \overline{\vec{v}' \vec{v}'} - p' \bar{\vec{I}}) + \bar{\vec{s}}_b$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \bar{\vec{v}}) + \text{div}(\rho(\bar{\vec{v}} \bar{\vec{v}} + \bar{p} \bar{\vec{I}})) = \text{div}(\bar{\vec{\tau}}^l + \bar{\vec{\tau}}^t) + \bar{\vec{s}}_b$$

$$p' = \frac{2}{3} \rho k$$

Reynolds-Averaged Navier-Stokes

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho e) + \text{div}(\rho e \vec{v} + \overleftrightarrow{p} I) = \text{div}[(\overleftrightarrow{\tau}^l) \vec{v} + \vec{q}_s] + \rho s_e$$

$$v = \bar{v} + v' \quad p = \bar{p} + p'$$

Równanie bilansu energii płynu lepkiego.

analogiczne przekształcenia

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho e) + \text{div}(\rho e \bar{v} + \bar{p} I) = \text{div}[(\overleftrightarrow{\tau}^l + \overleftrightarrow{\tau}^t - p' I) \bar{v} + \vec{q}_s^l + \vec{q}_s^t] + \rho s_e$$

$$p' = \frac{2}{3} \rho k$$

tenson naprężeń turbulentnych

$$\overleftrightarrow{\tau}^t = - \begin{vmatrix} \rho v'_x v'_x & \rho v'_x v'_y & \rho v'_x v'_z \\ \rho v'_y v'_x & \rho v'_y v'_y & \rho v'_y v'_z \\ \rho v'_z v'_x & \rho v'_z v'_y & \rho v'_z v'_z \end{vmatrix}$$

Reynolds-Averaged Navier-Stokes

przepływ laminarny

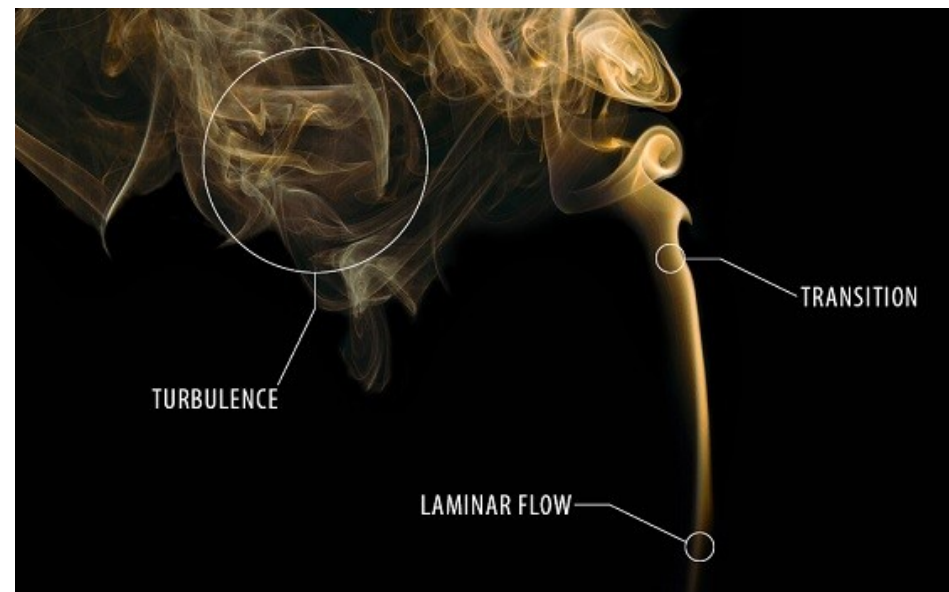
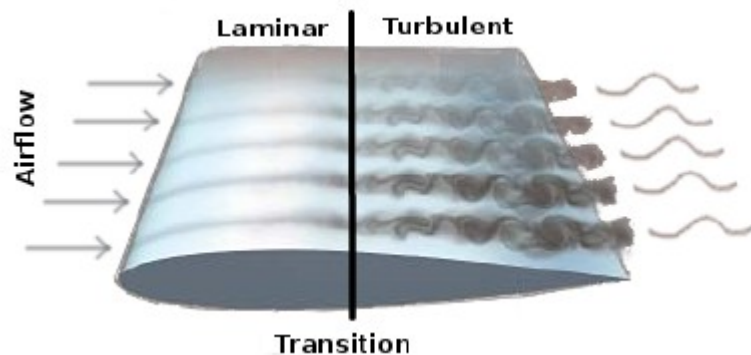
przepływ przejściowy

przepływ turbulentny

$$\overline{\tau}^l \gg \overline{\tau}^t$$

$$\overline{\tau}^l \approx \overline{\tau}^t$$

$$\overline{\tau}^l \ll \overline{\tau}^t$$



Reynolds-Averaged Navier-Stokes

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \bar{v}) + \text{div}(\rho(\bar{v} \bar{v} + \bar{p} \vec{I})) = \text{div}(\boxed{\vec{\tau}^l + \vec{\tau}^t}) + \vec{s}_b$$

korekta tensora naprężeń

Koncepcja traktowania turbulencji jako „korekty” przypadku laminarnego nie obejmuje wirów o większych skalach!

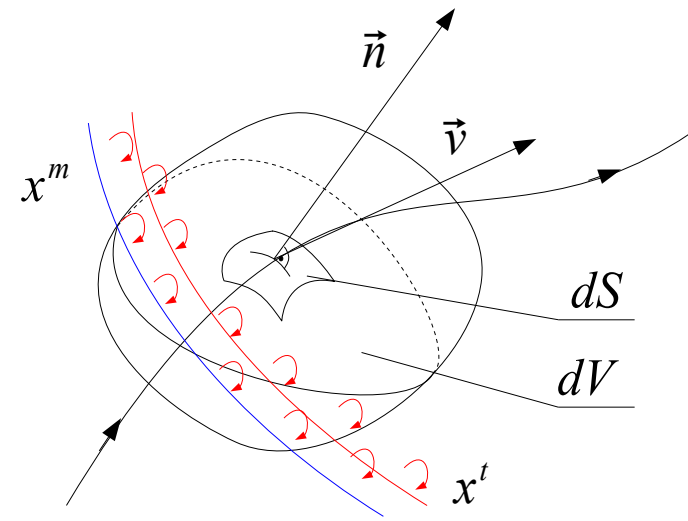
$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho e) + \text{div}(\rho e \bar{v} + \bar{p} \vec{I}) = \text{div}\left[\left(\boxed{\vec{\tau}^l + \vec{\tau}^t} - p' \vec{I}\right) \bar{v} + \boxed{\vec{q}_s^l + \vec{q}_s^t}\right] + \rho s_e$$

korekta tensora naprężeń

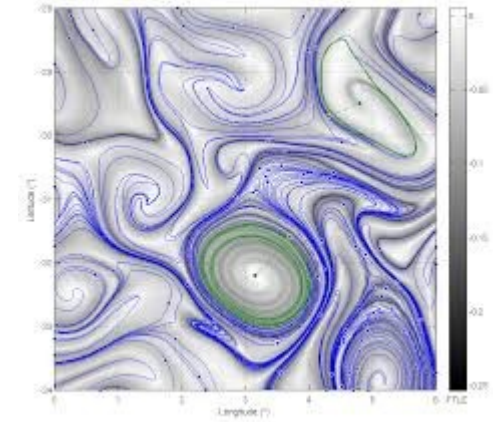
korekta strumienia ciepła

$$\frac{\partial}{\partial t}(\epsilon_k \rho) + \text{div}(\epsilon_k \rho \bar{v}) = \text{div}(\boxed{\vec{J}_k^l + \vec{J}_k^t}) + \rho s_k$$

korekta strumienia dyfuzji

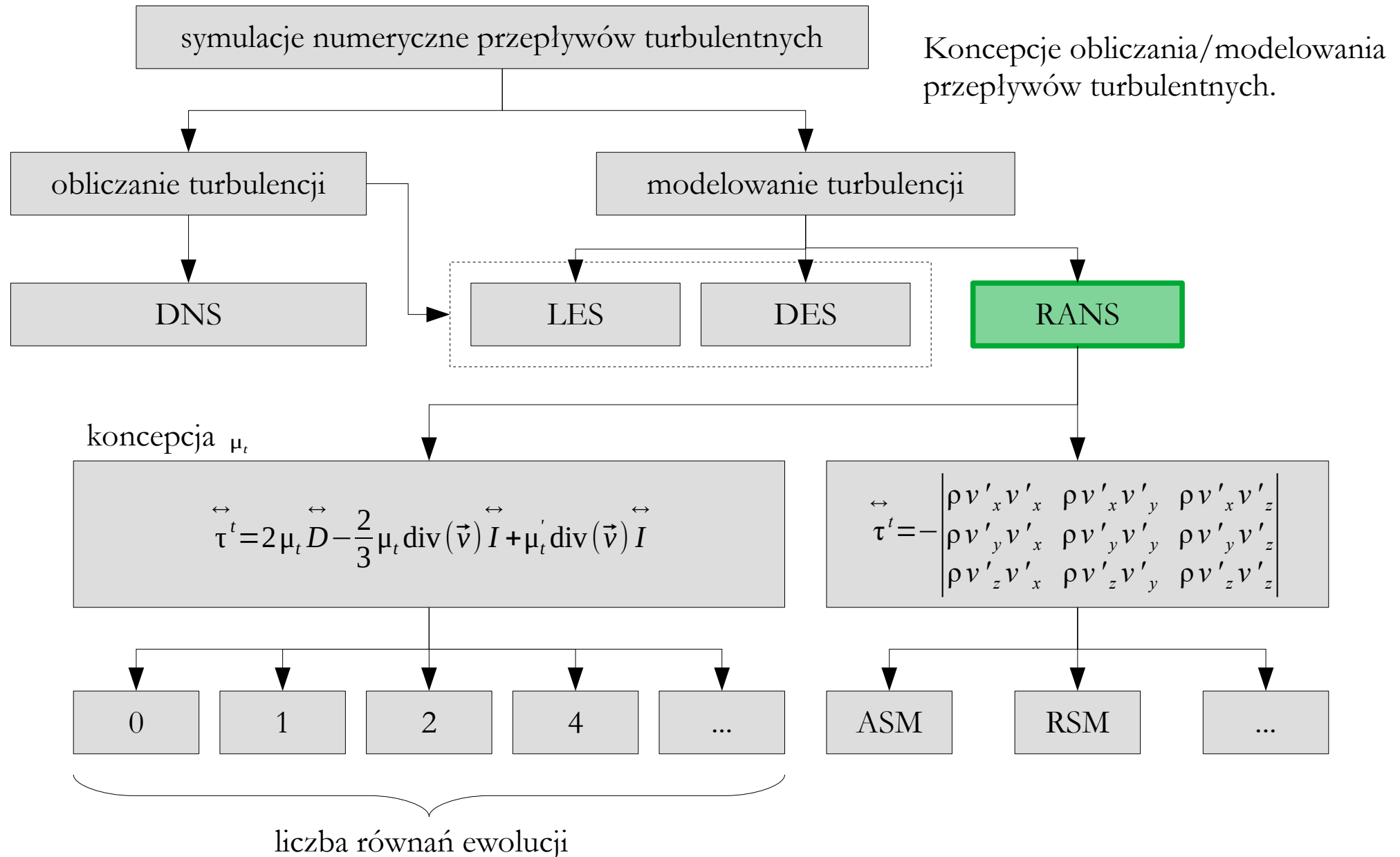


Struktury koherentne



Przykłady struktur koherentnych.

Podstawowa klasyfikacja podejść



Model k-ε (1972)

$$\mu_t = C_\mu \rho \frac{k^2}{\epsilon}$$

k - energia kinetyczna turbulencji

ϵ - prędkość dyssypacji k

równania ewolucji:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho k) + \nabla(\rho k \vec{v}) = \nabla \left(\left(\mu_l + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla k \right) + P_k - \rho \epsilon$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \epsilon) + \nabla(\rho \epsilon \vec{v}) = \nabla \left(\left(\mu_l + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \nabla \epsilon \right) + C_{\epsilon,1} \frac{\epsilon}{k} P_k - C_{\epsilon,2} \rho \frac{\epsilon^2}{k}$$

stałe modelu:

$$C_\mu = 0.09$$

$$C_{\epsilon,1} = 1.44$$

$$C_{\epsilon,2} = 1.92$$

$$\sigma_k = 1.0$$

$$\sigma_\epsilon = 1.3$$

człon konwekcyjny

produkcja

dyssypacja

człon dyfuzyjny

człon czasowy

P_k - produkcja energii kinetycznej turbulencji

Model k- ϵ (1972)

Podstawowe warianty modelu k- ϵ :

- **standardowy:**
 - Stabilny i prosty w użyciu, dobrze sprawdza się w przepływach w pełni turbulentnych.
 - Ograniczona skuteczność w przepływach z separacją (utrata przylegania warstwy przyściennej do powierzchni), silnymi gradientami ciśnienia oraz zawirowaniami.
- **„realizable”:**
 - Zapewnia lepszą stabilność i wierniejsze odwzorowanie naprężeń Reynoldsa, dzięki czemu skuteczniej radzi sobie z separacją i recyrkulacją.
 - Może wymagać drobniejszej siatki w pobliżu ściany dla uzyskania optymalnej dokładności.
- **RNG:**
 - Lepiej sprawdza się w przepływach wymuszonych, przy silnym ścinaniu i dużych gradientach.
 - Może wykazywać gorszą zbieżność niż warianty standardowy i realizable; nie zawsze jest dokładniejszy od realizable.

Model k- ω (1988)

$$\mu_t = \rho \frac{k}{\omega}$$

k - energia kinetyczna turbulencji

ω - prędkość dyssypacji k

równania ewolucji:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho k) + \nabla(\rho k \vec{v}) = \nabla \left(\left(\mu_t + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla k \right) + P_k - \beta' \rho k \omega$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \omega) + \nabla(\rho \omega \vec{v}) = \nabla \left(\left(\mu_t + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \nabla \epsilon \right) + \alpha \frac{\omega}{k} P_k - \beta \rho \omega^2$$

stałe modelu:

$$\beta = \frac{3}{40}$$

$$\beta' = 0.09$$

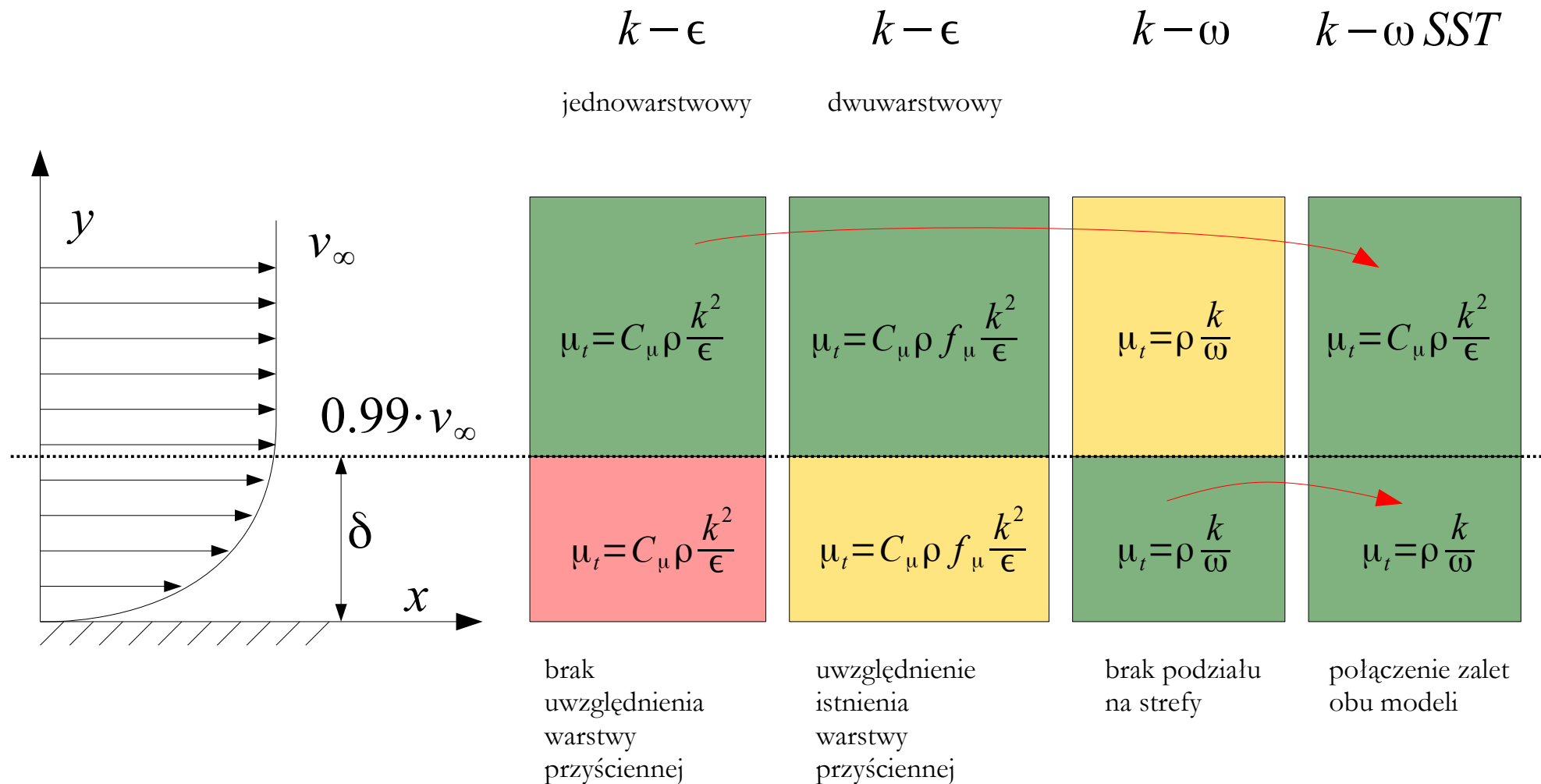
$$\alpha = \frac{5}{9}$$

$$\sigma_k = 2.0$$

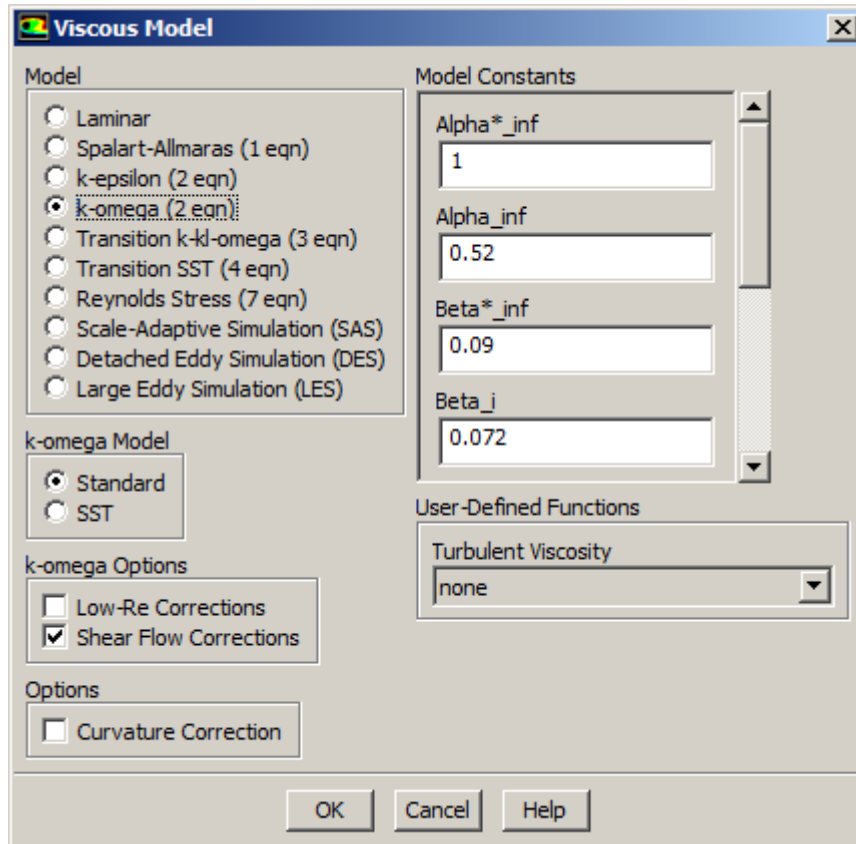
$$\sigma_\omega = 2.0$$

Model turbulencji k- ω charakteryzuje się wysoką, w porównaniu do modeli z grupy k- ϵ , skutecznością symulacji zjawisk zachodzących w warstwie przyściennej, zaburzeń przepływów i przepływów przy niskich wartościach liczby Reynoldsa. Model gorzej sobie radzi w przepływie w pełni turbulentnym.

Model SST $k-\omega$ (1993)



Model SST k- ω (1993)



Modele z grupy k- ϵ i k- ω dają niezadowolające wyniki:

- w przepływach o wysokim stopniu anizotropii turbulencji,
- w przepływach o skomplikowanej krzywiznie linii prądu,
- w przepływach ze strefami recyrkulacji,
- w przepływach z rotacją.

Okno definiowania parametrów modelu k- ω w pakiecie ANSYS Fluent (wersja 14.5).

Szacowanie wartości k - ϵ - ω na wlocie

$$k = \frac{3}{2} (v_{inlet} \cdot I_{\%})^2$$

$$\epsilon = 0.09^{0.75} \cdot \frac{k^{1.5}}{l}$$

$$\omega = \frac{k^{0.5}}{0.09^{0.25} \cdot l}$$

Dla rury o przekroju kołowym
całkowicie wypełnionej płynem:

$$I_{\%} = 0.16 \cdot \text{Re}_{d_h}^{-\frac{1}{8}}$$

$$l = 0.07 \cdot d_h$$

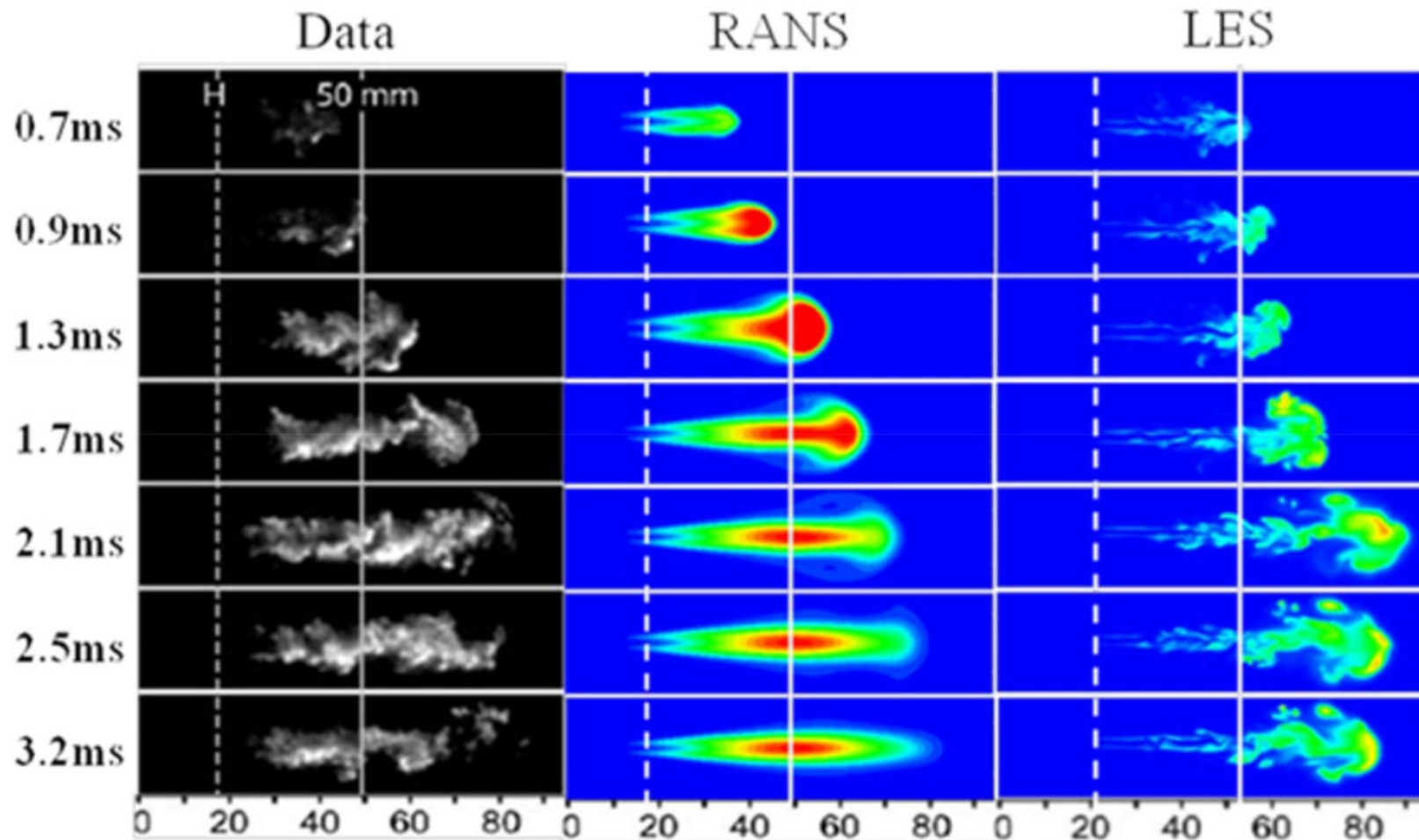
k - energia kinetyczna turbulencji

v_{inlet} - prędkość odniesienia (np. prędkość na wlocie do rury)

$I_{\%}$ - intensywność turbulencji w procentach (zazwyczaj 2-5 %)

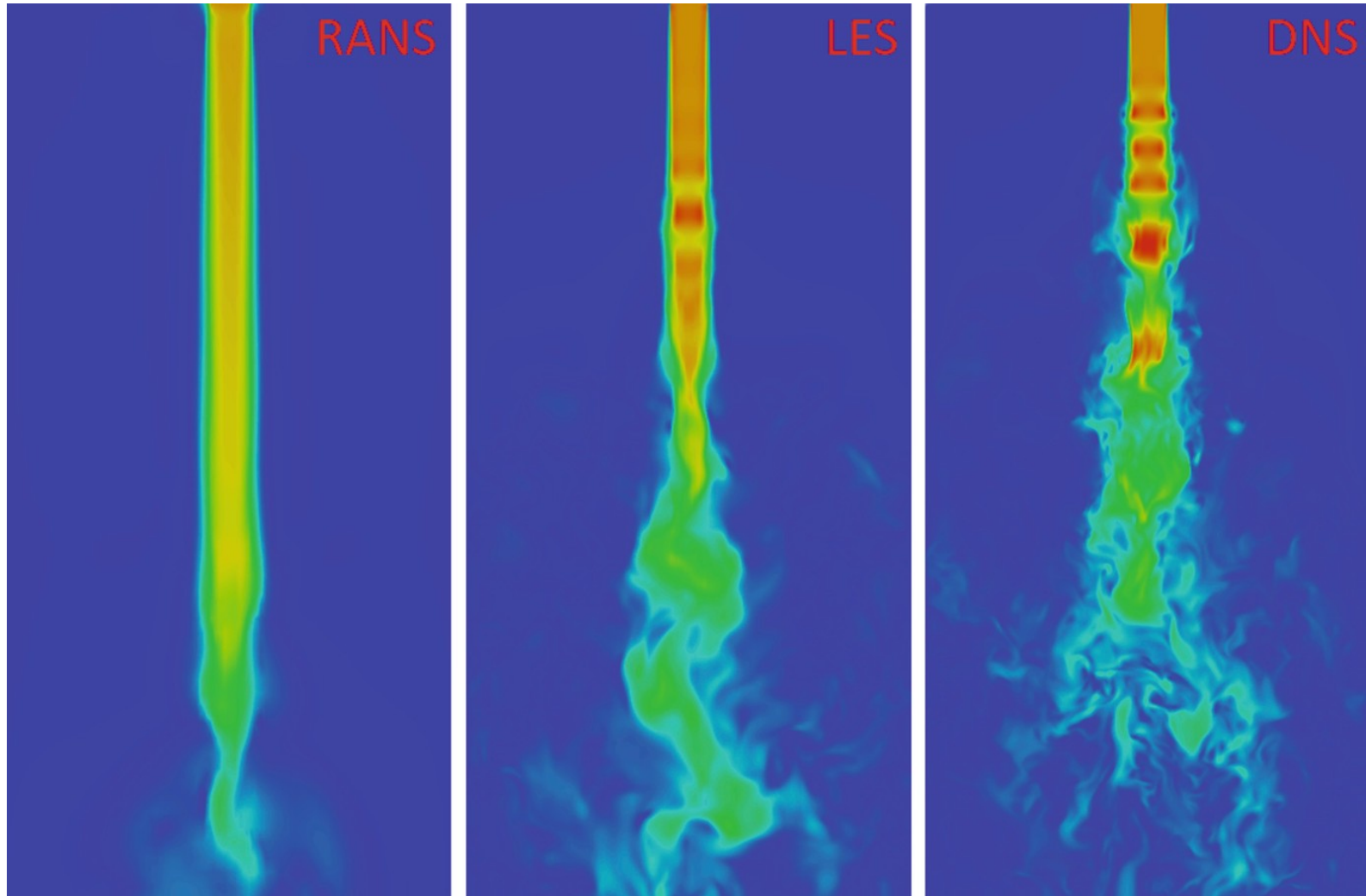
d_h - średnica hydrauliczna

Przykłady porównań modeli turbulencji



Porównanie RANS z innymi metodami obliczania/modelowania turbulencji.

Przykłady porównań modeli turbulencji



Porównanie RANS z innymi metodami obliczania/modelowania turbulencji.



UNIVERSITY OF WARMIA AND MAZURY IN OLSZTYN
The Faculty of Technical Sciences
POLAND, 10-957 Olsztyn, M. Oczapowskiego 11
tel.: (48)(89) 5-23-32-40, fax: (48)(89) 5-23-32-55
URL: <http://www.uwm.edu.pl/edu/sobieski/> (in Polish)



Dziękuję za uwagę

Wojciech Sobieski

Olsztyn, 2003-2026