



UNIVERSITY OF WARMIA AND MAZURY IN OLSZTYN
The Faculty of Technical Sciences
POLAND, 10-957 Olsztyn, M. Oczapowskiego 11
tel.: (48)(89) 5-23-32-40, fax: (48)(89) 5-23-32-55
URL: <http://www.uwm.edu.pl/edu/sobieski/> (in Polish)



Obliczeniowa Dynamika Płynów

Computational Fluid Dynamics – CFD

Przepływy Wielofazowe
(wersja skrócona)

wersja: 5 lutego 2026

Wojciech Sobieski

Olsztyn, 2003-2026

Mieszanina

Mieszanina – układ co najmniej dwóch różnych substancji lub różnych stanów skupienia tej samej substancji zmieszanych ze sobą w dowolnym stosunku i wykazujący indywidualne właściwości jako całość. Wyróżnia się:

- **Mieszaniny homogeniczne** – mieszaniny, których składniki mieszają się na poziomie molekularnym.
- **Mieszaniny heterogeniczne** – mieszaniny, w których składniki występują w postaci oddzielnych faz, np. ciała stałe w cieczy lub gazie.
- **Mieszaniny koloidalne** – mieszaniny, w których składniki występują w postaci drobnych cząstek rozproszonych w innej fazie. Cząstki te są na tyle małe, że nie da się ich odróżnić gołym okiem, ale nadal można je zaobserwować np. pod mikroskopem.
- **Mieszaniny emulsyjne** – mieszaniny, w których składniki występują w postaci dwóch nierozpuszczalnych w sobie cieczy.

Udział objętościowy składnika mieszaniny

Udział objętościowy – iloraz objętości danego składnika mieszaniny i sumy objętości wszystkich składników tejże mieszaniny.

$$\alpha_k = \frac{V_k}{\sum_{i=1}^{n_k} V_i}$$

$$0 < \alpha_k < 1$$

$$\sum_{k=1}^{n_k} \alpha_k = 1$$

α_k	- udział objętościowy	$[-]$
V_k	- objętość k-tego składnika mieszaniny	$[m^3]$
V_i	- objętość i-tego składnika mieszaniny	$[m^3]$
n_s	- liczba składników mieszaniny (>1)	$[-]$

$$\alpha_k = \epsilon_k \frac{\rho}{\rho_k} \quad \text{- związek między udziałem masowym a objętościowym}$$

Udział masowy składnika mieszaniny

Udział masowy – iloraz masy danego składnika mieszaniny i sumy mas wszystkich składników tejże mieszaniny.

$$\epsilon_k = \frac{m_k}{\sum_{i=1}^{n_k} m_i}$$

$$0 < \epsilon_k < 1$$

$$\sum_{k=1}^{n_k} \epsilon_k = 1$$

$$\epsilon_k \quad - \text{udział masowy} \quad [-]$$

$$m_k \quad - \text{masa k-tego składnika mieszaniny} \quad [kg]$$

$$m_i \quad - \text{masa i-tego składnika mieszaniny} \quad [kg]$$

$$n_s \quad - \text{liczba składników mieszaniny } (>1) \quad [-]$$

$$\epsilon_k = \alpha_k \frac{\rho_k}{\rho} \quad - \text{związek między udziałem objętościowym a masowym}$$

Równanie Bilansu Składnika Mieszanki

$$m_k = \epsilon_k m = \epsilon_k \bar{\rho} V$$

$$m = \bar{\rho} V$$

tak było w
przypadku jednego
składnika

$$m_k = \epsilon_k m = \int_V \epsilon_k \rho dV$$

$$m = \int_V \rho dV$$

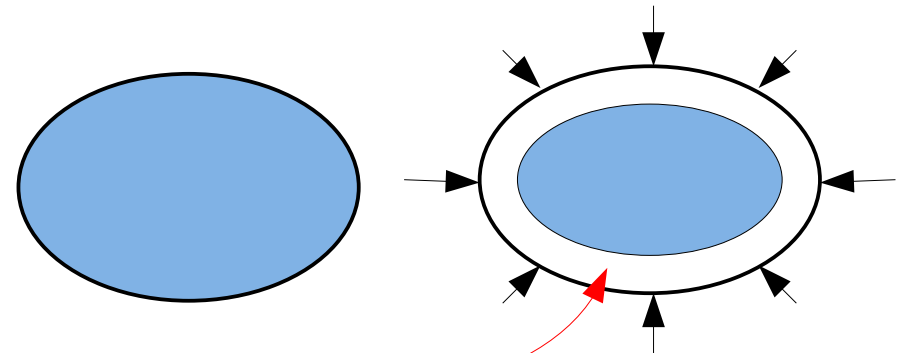
$$\frac{dm_k}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \epsilon_k \rho dV$$

lub:

podobnie jak poprzednio
interesują nas zmiany
masy w czasie

$$\frac{dm_k}{dt} = \int_V \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_k \rho) dV = \delta_{m_k}$$

tu jest gęstość mieszaniny



δ_{m_k}

- zmiana masy k-tego
składnika w objętości
kontrolnej w czasie dt

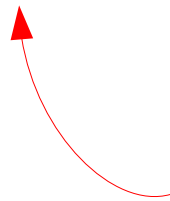
[kg]

Równanie Bilansu Składnika Mieszanki

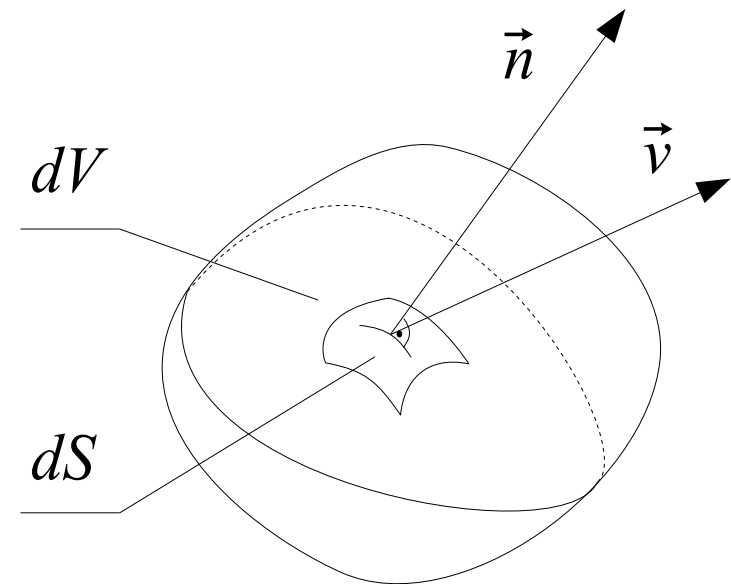
Masa k-tego składnika może się zmienić ze względu na:

- zmiany w koncentracji składników w wypadkowym strumieniu przepływającym przez objętość kontrolną (jest to tzw. człon konwekcyjny)

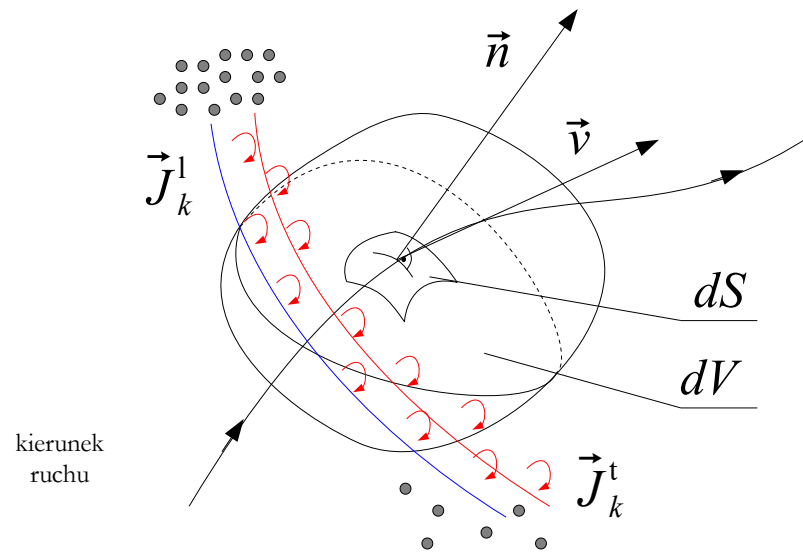
$$\delta_{m_k}^{\text{kon}} = - \int_S (\epsilon_k \rho) \vec{v} \cdot \vec{n} dS$$



w przypadku płynu
jednoskładnikowego
nie było innej możliwości



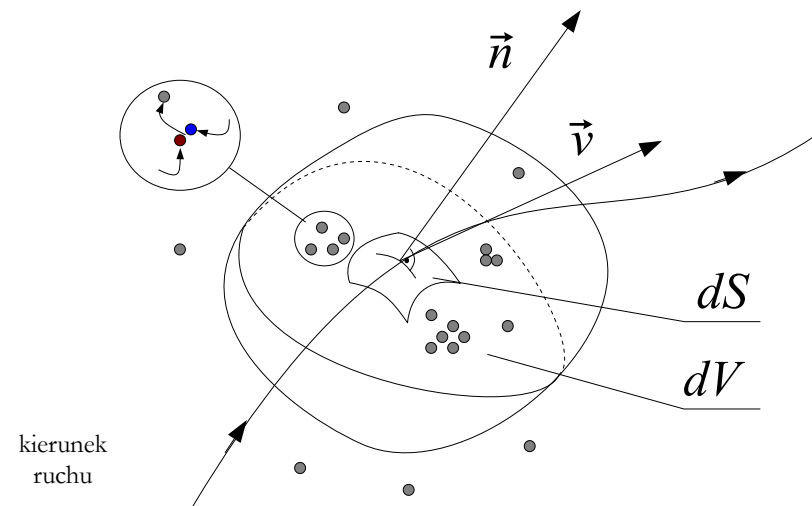
Równanie Bilansu Składnika Mieszanki



- zjawisko dyfuzji

$$\delta_{m_k}^{\text{dyf}} = \int_S (\vec{J}_k) \cdot \vec{n} dS = \int_S (\vec{J}_k^l + \vec{J}_k^t) \cdot \vec{n} dS$$

$$\vec{J} \quad - \text{strumień dyfuzji} \quad \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^2 \text{s}} \right]$$



- działanie tzw. źródeł

$$\delta_{m_k}^{\text{źr}} = \int_V \rho s_k dV$$

$$s_k \quad - \text{źródło masy} \quad \left[\frac{1}{\text{s}} \right]$$

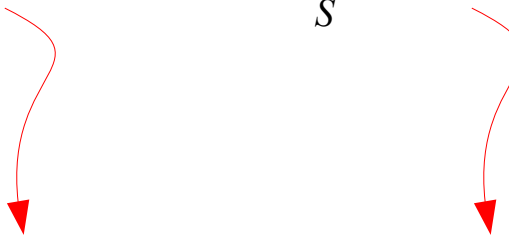
Równanie Bilansu Składnika Mieszanki

Ostatecznie:
$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_k \rho) dV = \delta_{m_k}^{\text{kon}} + \delta_{m_k}^{\text{dyf}} + \delta_{m_k}^{\text{źr}}$$

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_k \rho) dV = - \int_S (\epsilon_k \rho) \vec{v} \cdot \vec{n} dS + \int_S (\vec{J}_k^1 + \vec{J}_k^t) \cdot \vec{n} dS + \int_V \rho s_k dV$$

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_k \rho) dV + \int_S (\epsilon_k \rho) \vec{v} \cdot \vec{n} dS = \int_S (\vec{J}_k^1 + \vec{J}_k^t) \cdot \vec{n} dS + \int_V \rho s_k dV$$

tw. Greena-Gaussa-Ostrogradzkiego


$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_k \rho) dV + \int_V \operatorname{div} (\epsilon_k \rho \vec{v}) dV = \int_V \operatorname{div} (\vec{J}_k^1 + \vec{J}_k^t) dV + \int_V \rho s_k dV$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_k \rho) + \operatorname{div} (\epsilon_k \rho \vec{v}) = \operatorname{div} (\vec{J}_k^1 + \vec{J}_k^t) + \rho s_k$$

Równanie Bilansu Składnika Mieszaniny

$$\frac{\partial}{\partial t}(\epsilon_k \rho) + \operatorname{div}(\epsilon_k \rho \vec{v}) = \operatorname{div}(\vec{J}_k^1 + \vec{J}_k^t) + \rho s_k$$

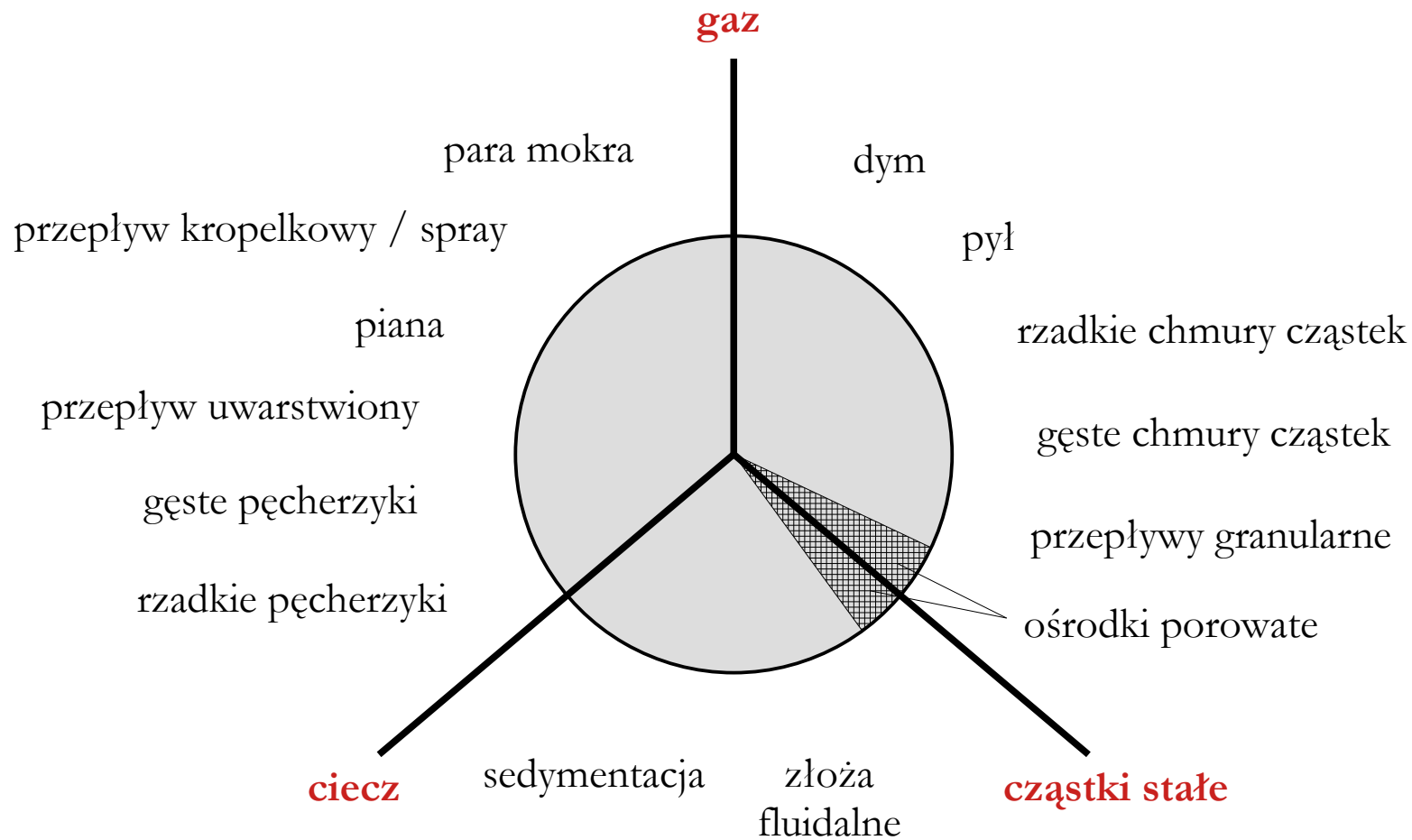
Gdy jest jeden składnik:

- udział masowy tego składnika jest równy 1
- nie ma zjawiska dyfuzji (nie ma co w czym dyfundować)
- nie mogą istnieć źródła (składnik nie ma z czego powstać ani w co się zamienić)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0$$

- równanie bilansu masy płynu jednoskładnikowego

Rodzaje przepływów wielofazowych



Wyjściowy model matematyczny

Równanie Bilansu Masy (RBM):

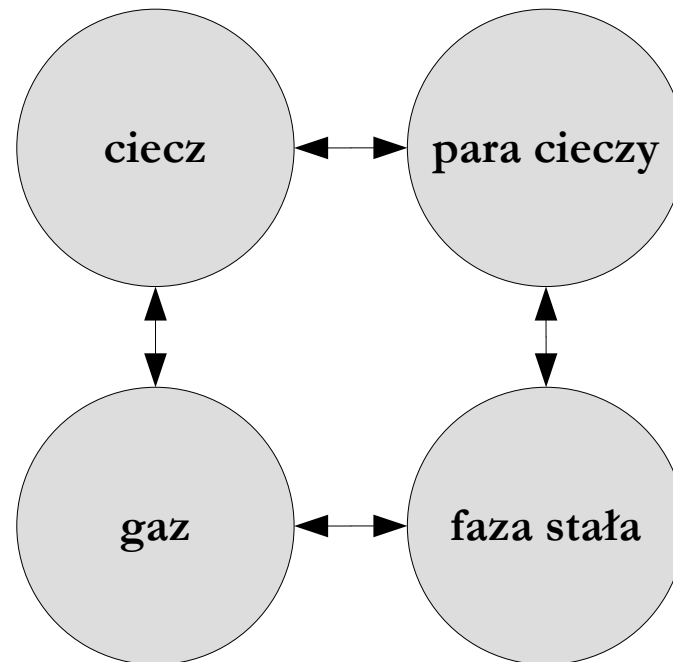
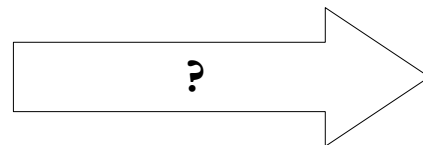
Równanie Bilansu Pędu (RBP):

Równanie Bilansu Energii (RBE):

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0$$

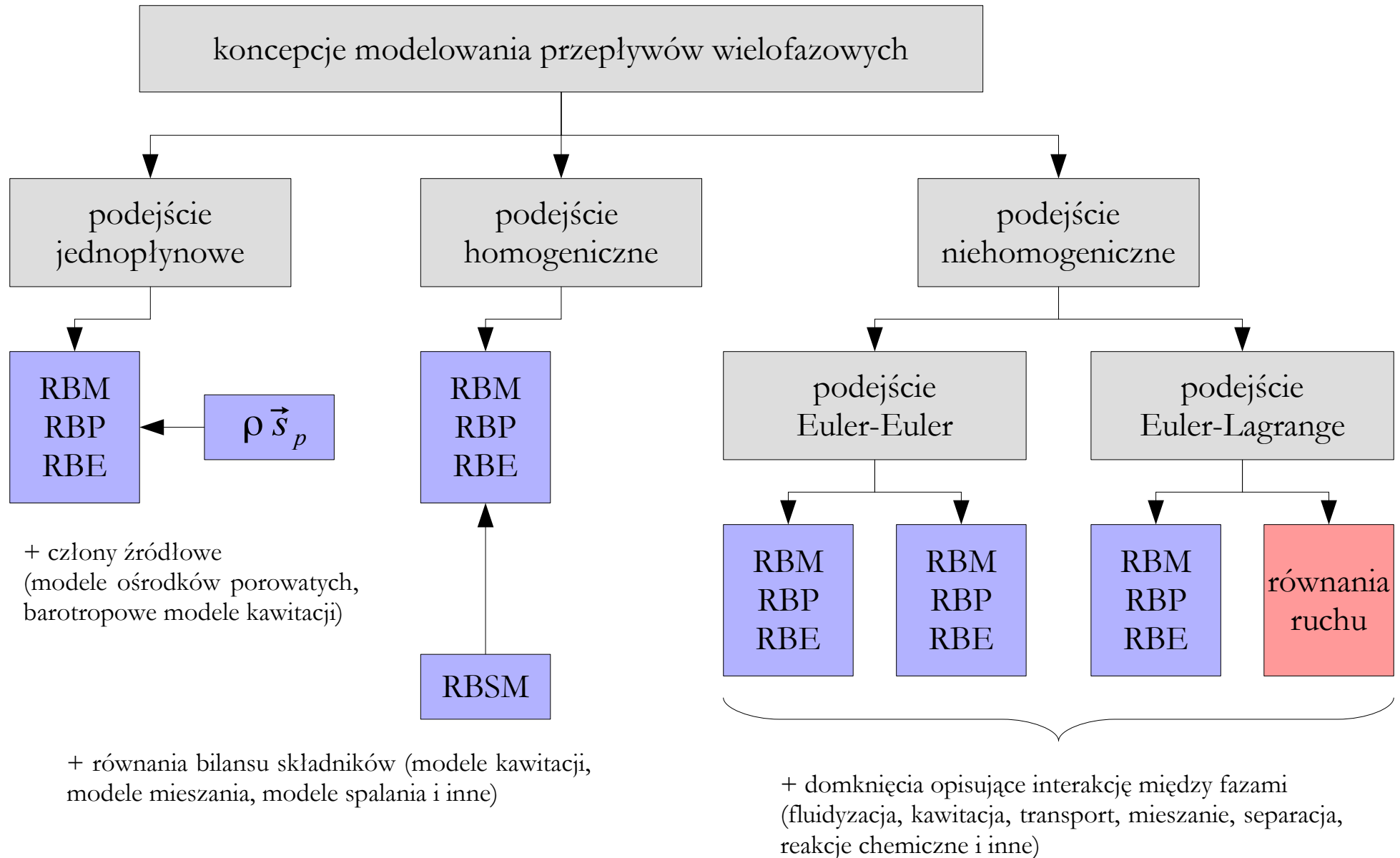
$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{v}) + \operatorname{div}(\rho \vec{v} \vec{v}) = \operatorname{div}(-p \vec{I} + \vec{\tau}) + \rho \vec{s}_p$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho e) + \operatorname{div}(\rho e \vec{v}) = \operatorname{div}((-p \vec{I} + \vec{\tau}) \vec{v} + \vec{q}) + \rho s_e$$



Jak zastosować układ równań bilansowych do modelowania przepływów mieszanin?

Konceptcje modelowania



Model Ośrodka Porowatego

Model Ośrodka Porowatego (Porous Media Model) – jednopłynowy model ośrodka wielofazowego. Ośrodek porowaty jest traktowany jako medium, które wprowadza do członu źródłowego równania bilansu pędu dodatkowy opór przepływu w postaci źródła sił masowych. Źródło to może być opisane prawem Darcy’ego, prawem Forchheimera lub innym. Opis odbywa się w ujęciu Eulera.

$$\begin{array}{lcl} \text{bilans masy:} & \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} \rho + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{v}) + \operatorname{div}(\rho \vec{v} \vec{v}) = \operatorname{div}(-p \overset{\leftrightarrow}{I} + \overset{\leftrightarrow}{\tau}) + \rho \vec{s}_p \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho e) + \operatorname{div}(\rho e \vec{v}) = \operatorname{div}((-\overset{\leftrightarrow}{p} \overset{\leftrightarrow}{I} + \overset{\leftrightarrow}{\tau}) \vec{v} + \vec{q}) + \rho s_e \end{array} \right. \\ \text{bilans pędu:} & & \\ \text{bilans energii:} & & \end{array}$$

Model Ośrodka Porowatego

Prawo Darcy'ego – prawo opisujące zależność między prędkością filtracji płynu przepływającego przez ośrodek porowaty, a występującym wzdłuż przepływu gradientem ciśnienia.

Prawo Forchheimera – rozszerzone prawo Darcy'ego, obowiązujące dla szerszego zakresu prędkości filtracji.

The diagram shows the Forchheimer equation:
$$-\frac{dp}{dx} = \frac{\mu}{K} \cdot \vec{v}_f + \beta \cdot \rho \cdot |\vec{v}_f| \vec{v}_f$$
 A green arrow labeled "Prawo Darcy'ego" points to the first term on the right. A red arrow labeled "Prawo Forchheimera" points to the second term on the right.

$\vec{v}_f$ - prędkość filtracji $\left[\frac{m}{s} \right]$

K - współczynnik przepuszczalności $\left[m^2 \right]$

β - współczynnik Forchheimera $\left[\frac{1}{m} \right]$

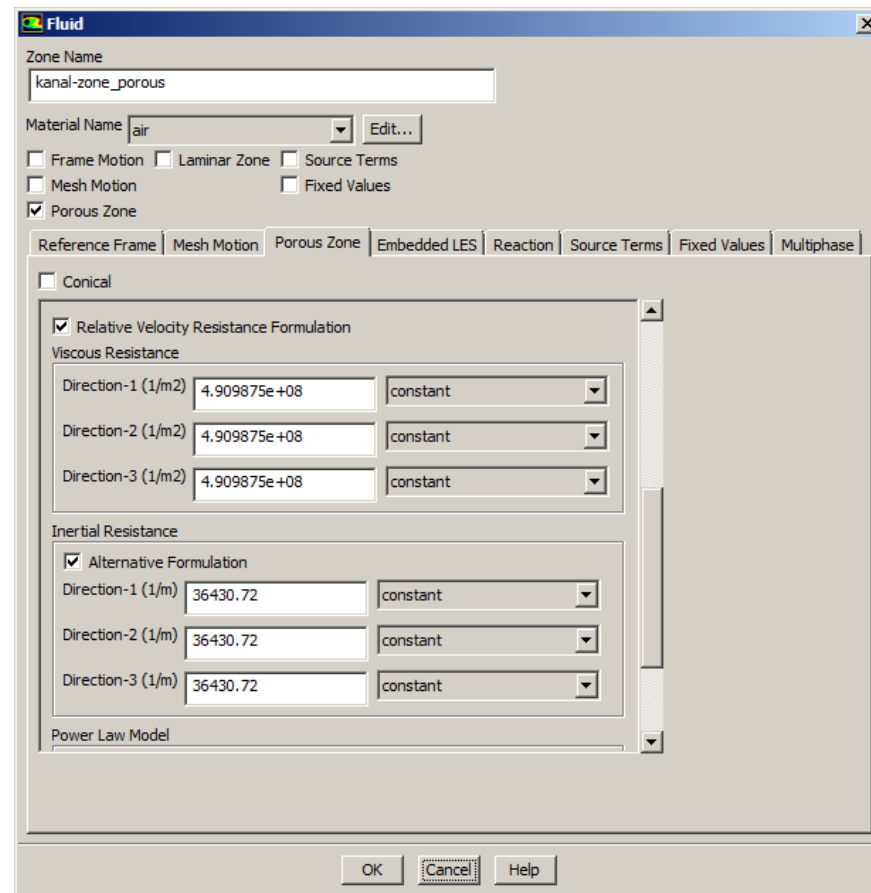
Model Ośrodka Porowatego

Wersja 3D prawa Forchheimera:

$$S_{i, inertial} = - \sum_{j=1}^3 D_{ij} \mu v_j - \sum_{j=1}^3 C_{ij} \frac{\rho |v| v_j}{2}$$

$$D_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{1}{K} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{K} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{K} \end{bmatrix}$$

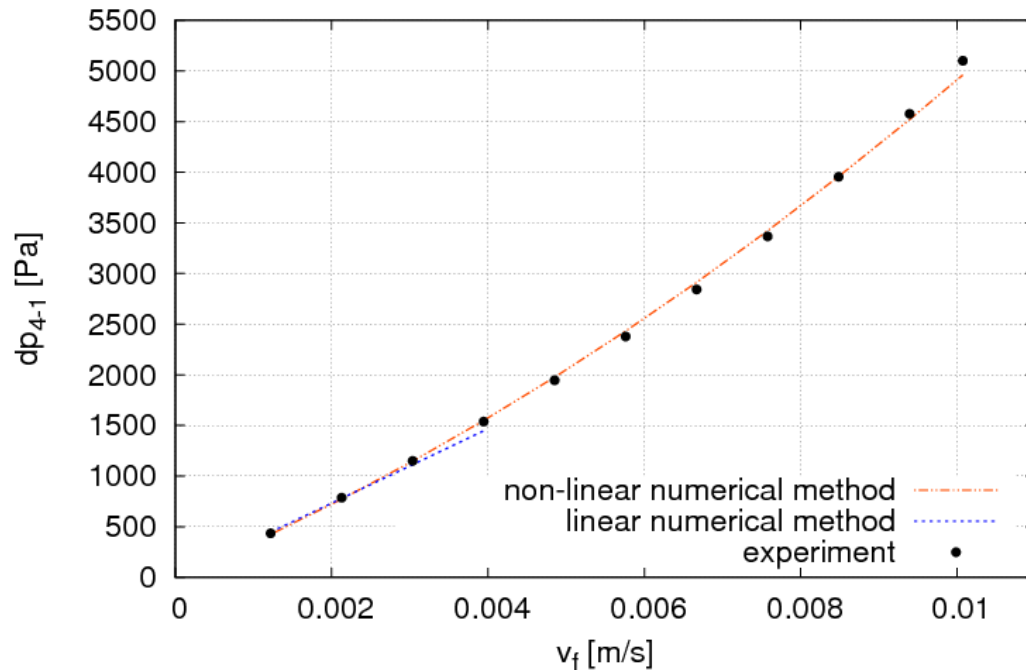
$$C_{ij} = \begin{bmatrix} 2\beta & 0 & 0 \\ 0 & 2\beta & 0 \\ 0 & 0 & 2\beta \end{bmatrix}$$



Okno definiowania parametrów strefy porowatej w ANSYS Fluent (trzeba jeszcze określić kierunki, na których ma działać źródło).

Model Ośrodka Porowatego

Comparison of numerical and experimental results

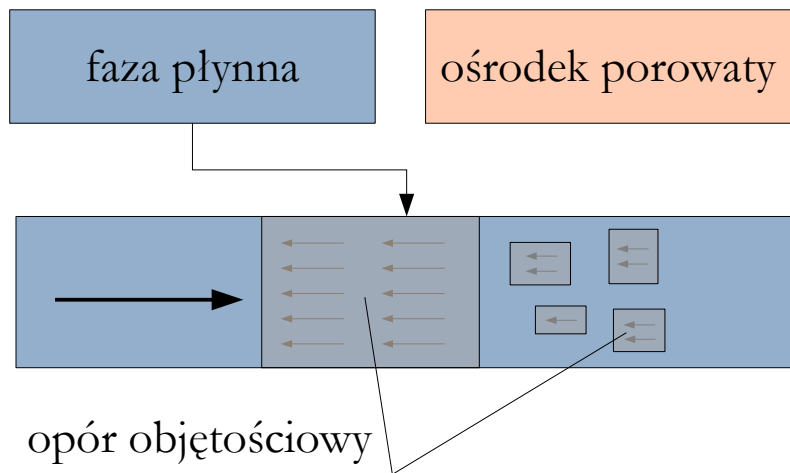


Przykład modelowania oporów przepływu przez jednowymiarową kolumnę filtracyjną [Wojciech Sobieski, ANSYS Fluent].

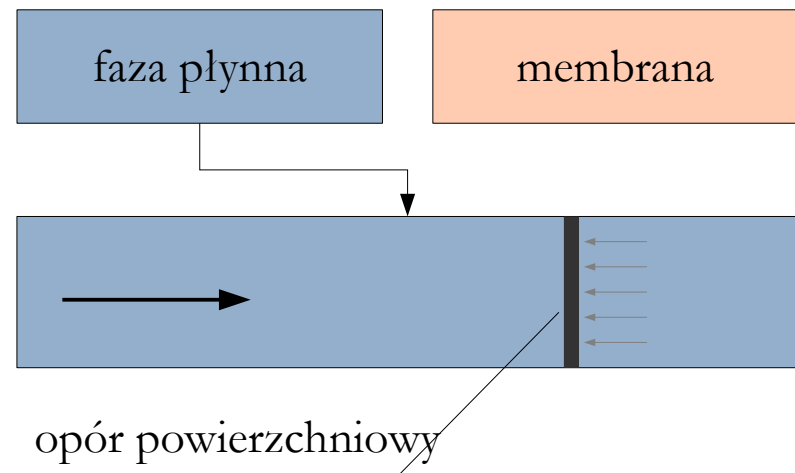


Model Uskoku Porowatego

Model Uskoku Porowatego (Porous Jump Model) – jednopłynowy model ośrodka wielofazowego podobny do Modelu Ośrodka Porowatego. Jedyna różnica polega na tym, że opory przypisywane są nie do objętości, ale do powierzchni. W efekcie uzyskuje się lokalny i skokowy wzrost oporów przepływu, który można wykorzystać do modelowania sit, membran itp.

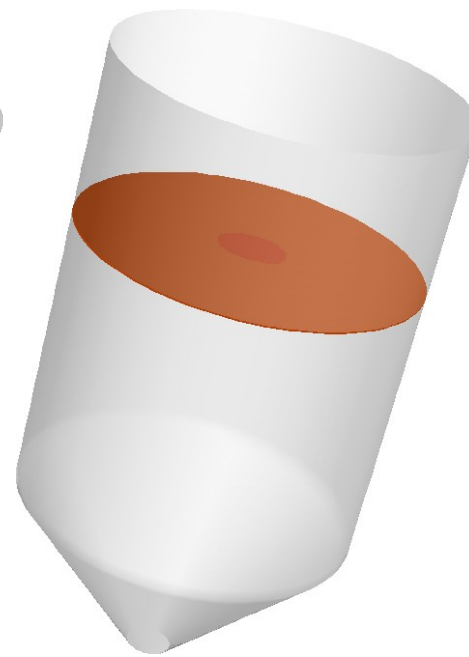
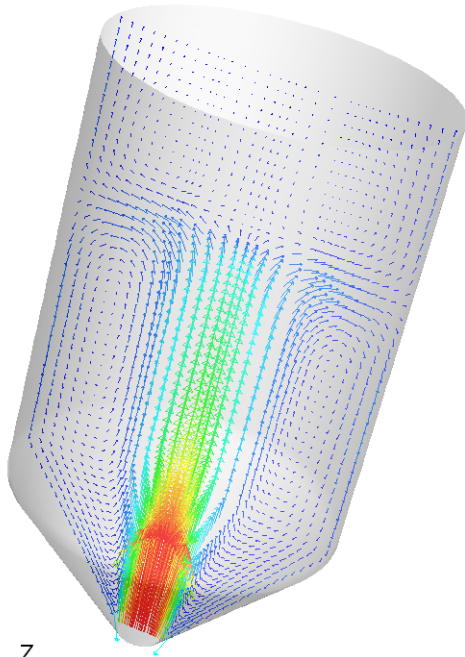
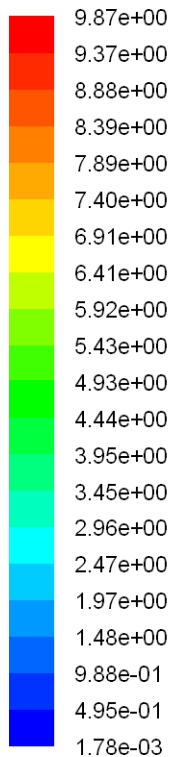


Porous Media Model



Porous Jump Model

Model Uskoku Porowatego



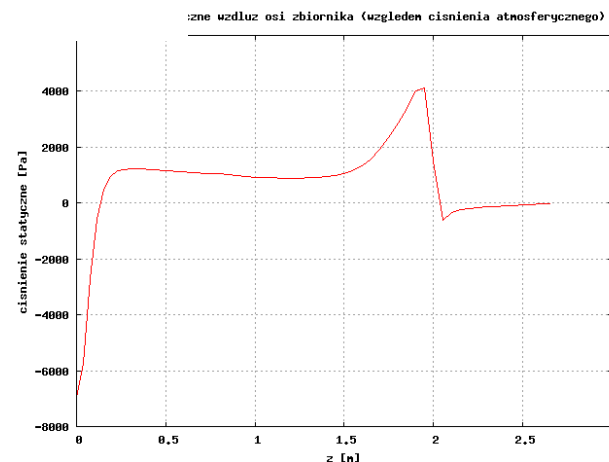
Porous Jump

Zone Name
membrana

Face Permeability (m²) 1.809727e-09

Porous Medium Thickness (m) 0.02

Pressure-Jump Coefficient (C2) (1/m) 0



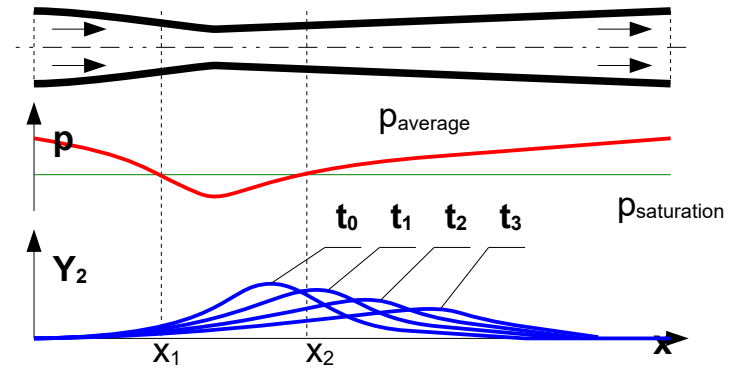
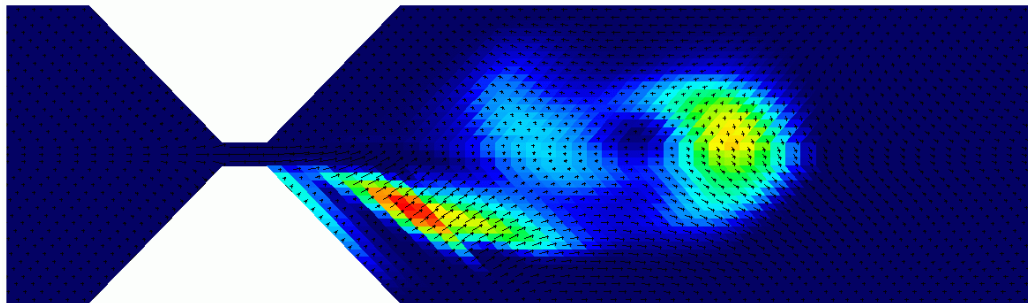
Przykład modelowania przepływu płynu w zbiorniku z membraną półprzepuszczalną [Wojciech Sobieski, ANSYS Fluent].

Model Homogeniczny

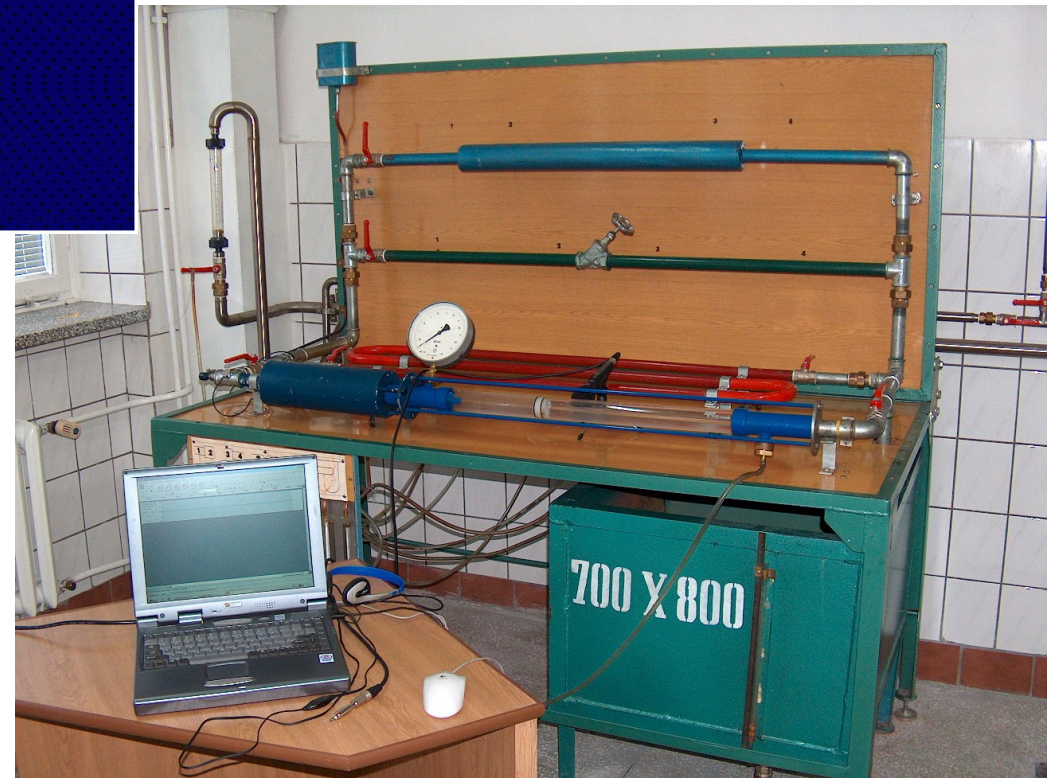
Model Homogeniczny (Mixture Model, Species Model) – model przeznaczony do opisu mieszanin jednorodnych dowolnej liczby faz: gazów, cieczy i cząstek stałych. Wszystkie fazy traktowane są jako mieszanina homogeniczna i posiadają jeden wspólny układ równań bilansowych. Dodatkowo każda z faz posiada własne równanie bilansu masy składnika. Opis mieszaniny odbywa się w ujęciu Eulera.

$$\begin{array}{l} \text{bilans masy:} \\ \text{bilans pędu:} \\ \text{bilans energii:} \\ \text{bilans udziału składnika:} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} \rho + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{v}) + \operatorname{div}(\rho \vec{v} \vec{v}) = \operatorname{div}(-p \vec{I} + \vec{\tau}) + \rho \vec{s}_p \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho e) + \operatorname{div}(\rho e \vec{v}) = \operatorname{div}((-p \vec{I} + \vec{\tau}) \vec{v} + \vec{q}) + \rho s_e \\ \frac{\partial}{\partial t}(\epsilon_k \rho) + \operatorname{div}(\epsilon_k \rho \vec{v}) = \operatorname{div}(\vec{J}_k^1 + \vec{J}_k^t) + \rho s_k \quad k = 1, \dots, n_s \end{array} \right.$$

Model Homogeniczny

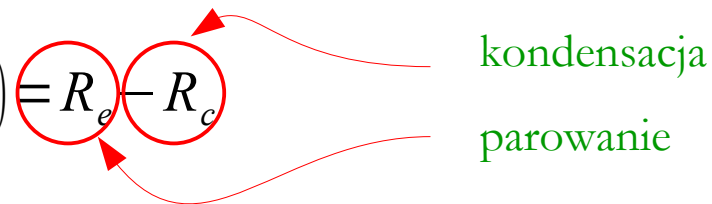


Modelowanie kavitacji kłębiastej
w rurze z przewężeniem
[Wojciech Sobieski, Multi Flower 2D].



Homogeniczny Model Kawitacji

Homogeniczny Model Kawitacji – model kawitacji zakładający istnienie dwóch faz: cieczy (l) i jej pary (v). Oprócz podstawowych równań bilansu masy, pędu i energii rozwiązywane jest równanie bilansu masy fazy parowej. Opis wszystkich faz odbywa się w ujęciu Eulera.

$$\frac{\partial}{\partial t}(\epsilon_k \rho) + \nabla \cdot (\epsilon_k \rho \vec{v}) = R_e - R_c$$


kondensacja

parowanie

$$p \leq p_{sat}$$

$$R_e = \frac{\rho_l \rho_v}{\rho} \alpha_v (1 - \alpha_v) \frac{3}{R} \sqrt{\frac{2}{3} \frac{p_{sat} - p}{\rho_l}}$$

$$p > p_{sat}$$

$$R_c = \frac{\rho_l \rho_v}{\rho} \alpha_v (1 - \alpha_v) \frac{3}{R} \sqrt{\frac{2}{3} \frac{p - p_{sat}}{\rho_l}}$$

Model Schnerr-Zauer.

$$R_e = C_e \frac{3 \alpha_{nuc} (1 - \alpha_v) \rho_v}{R} \sqrt{\frac{2}{3} \frac{p_{sat} - p}{\rho_l}}$$

$$R_c = C_c \frac{3 \alpha_v \rho_v}{R} \sqrt{\frac{2}{3} \frac{p - p_{sat}}{\rho_l}}$$

$$R = 6 \cdot 10^{-6}$$

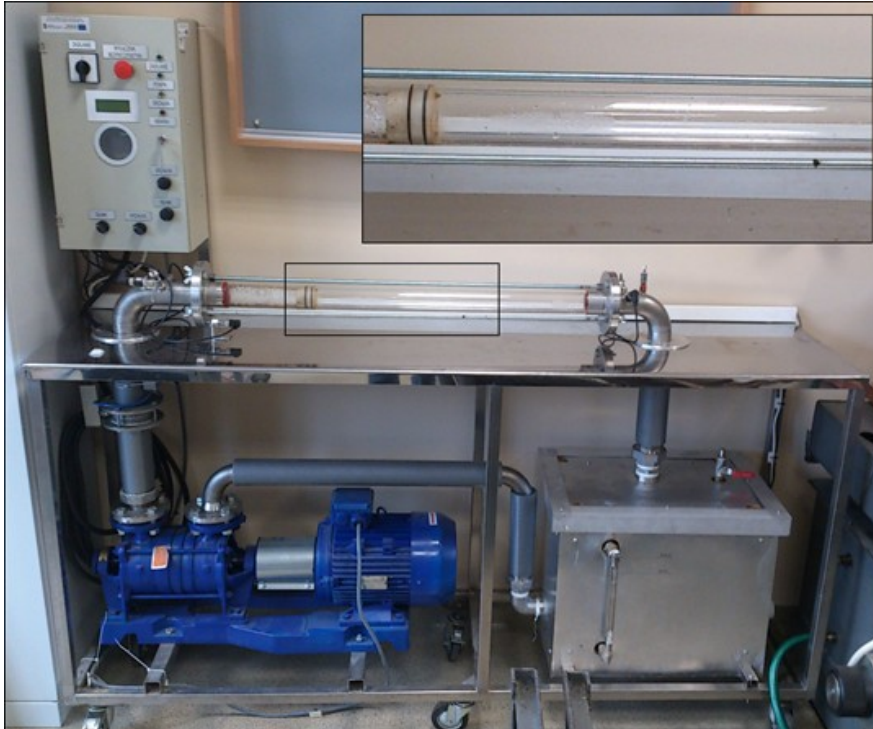
$$\alpha_{nuc} = 5 \cdot 10^{-4}$$

$$C_e = 50$$

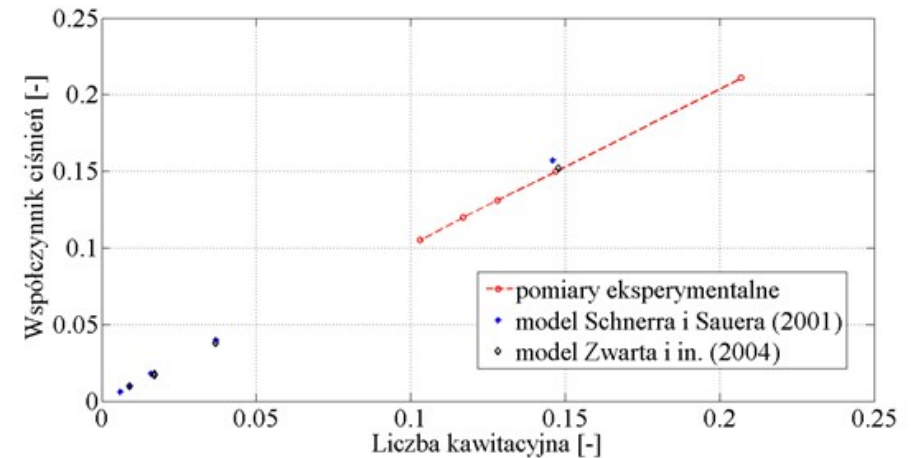
$$C_c = 0.01$$

Model Zwart-Gerber-Belamri.

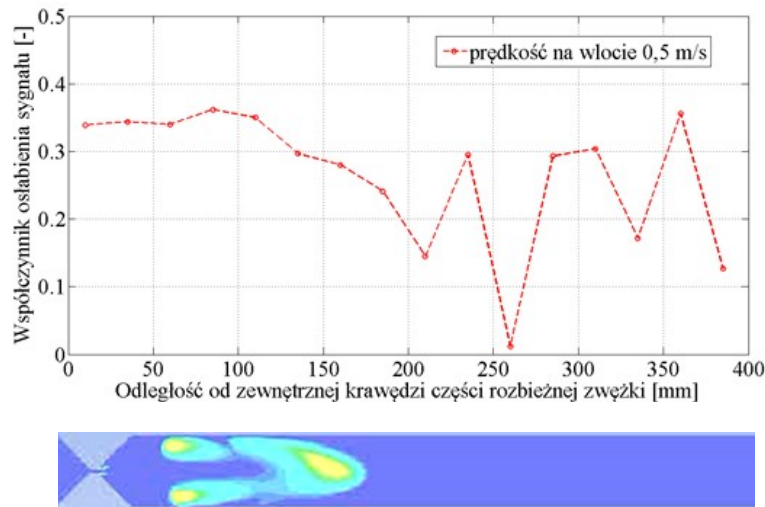
Homogeniczny Model Kawitacji



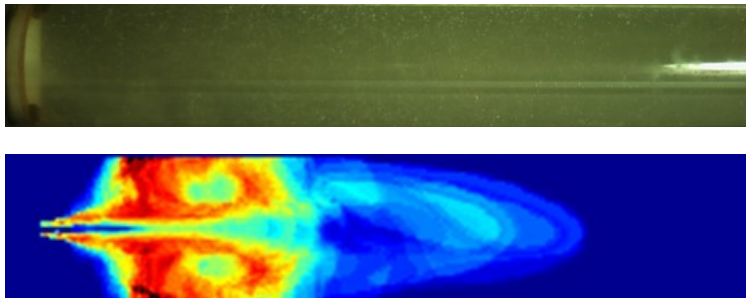
Badania kawitacji w zwężce zbieżno-rozbieżnej
(rozprawa doktorska Pani Agnieszki Niedźwiedzkiej).



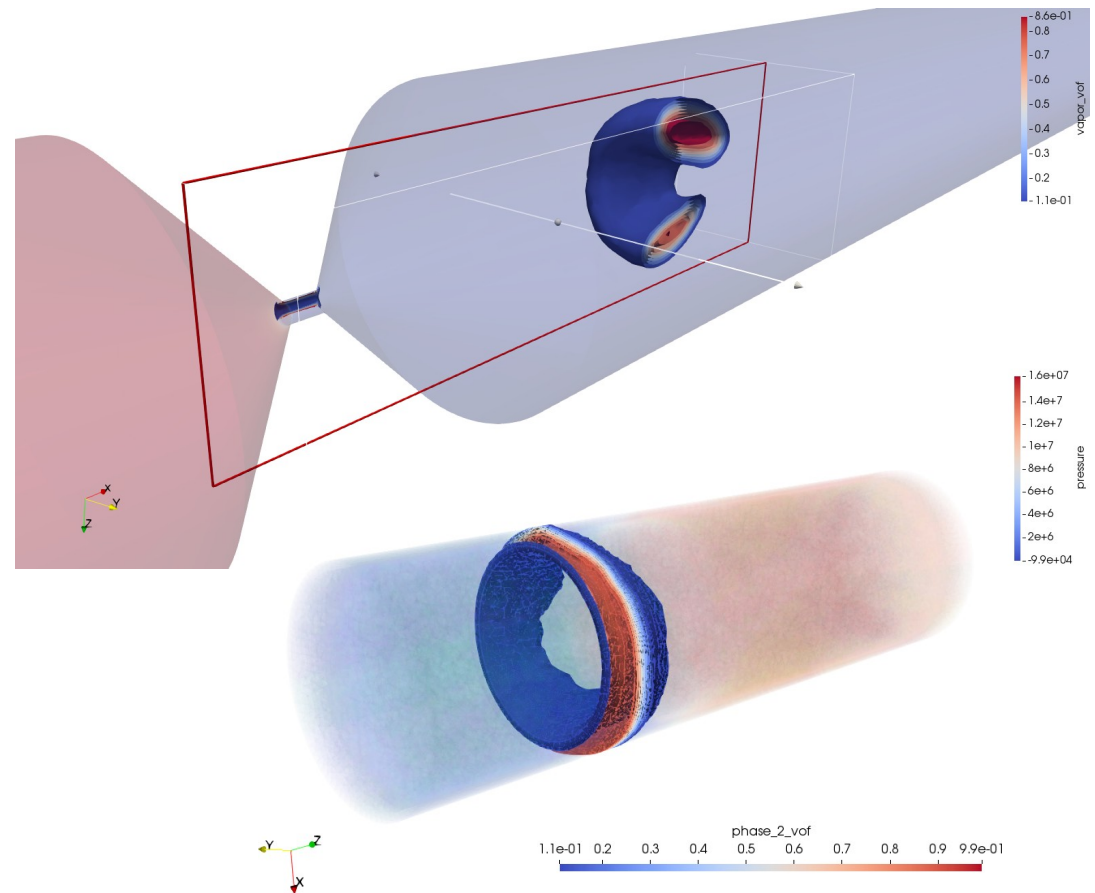
Homogeniczny Model Kawitacji



Wyniki pomiaru intensywności kavitacji systemem optoelektronicznym.



Przykład zastosowania statystycznej analizy obrazu.



Niestacjonarne, trójwymiarowe modelowanie kavitacji w zwężce zbieżno-rozbieżnej – model Schnerr-Zauera (rozprawa doktorska Pani Agnieszki Niedźwiedzkiej).

Pełny Model Kawitacji

Pełny Model Kawitacji (Full Cavitation Model) – homogeniczny model kawitacji zakładający istnienie trzech faz: cieczy (l), jej pary (v) oraz rozpuszczonego w cieczy gazu (g). Oprócz podstawowych równań bilansu masy, pędu i energii rozwiązywane jest równanie bilansu masy fazy parowej. Opis wszystkich faz odbywa się w ujęciu Eulera.

$$\frac{\partial}{\partial t}(\epsilon_k \rho) + \nabla(\epsilon_k \rho \vec{v}) = \nabla(\Gamma \nabla \epsilon_k) + R_e - R_c$$

kondensacja
parowanie

$$p \leq p_{sat}$$

$$R_e = C_e \frac{\max(1.0, \sqrt{k})}{\sigma} \rho_l \rho_v \sqrt{\frac{2}{3} \frac{p_{sat} - p}{\rho_l}} (1 - \epsilon_v - \epsilon_g) \quad C_e = 0.02$$

$$p > p_{sat}$$

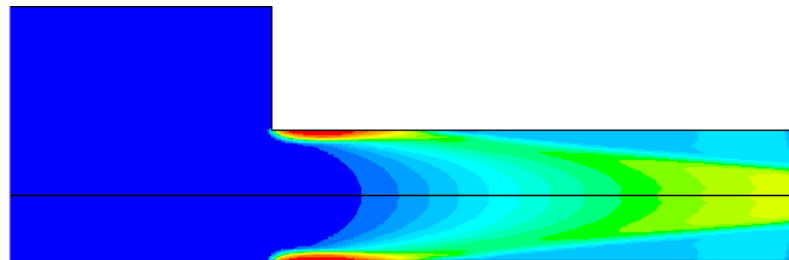
$$R_c = C_c \frac{\max(1.0, \sqrt{k})}{\sigma} \rho_l \rho_l \sqrt{\frac{2}{3} \frac{p - p_{sat}}{\rho_l}} \epsilon_v \quad C_c = 0.01$$

Γ - współczynnik dyfuzji

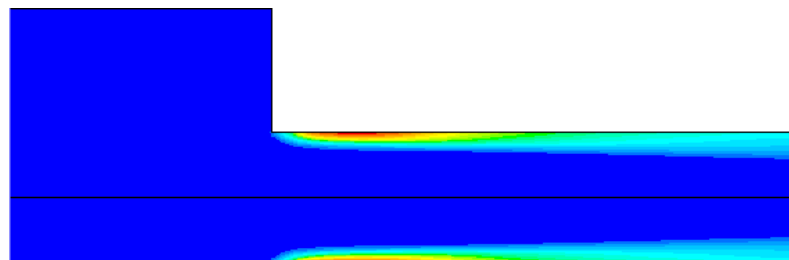
σ - napięcie powierzchniowe

Model Singhala.

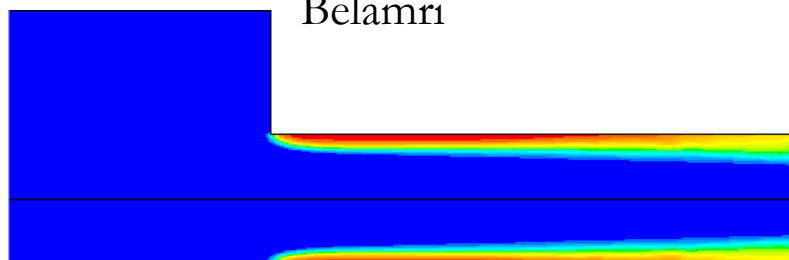
Pełny Model Kawitacji



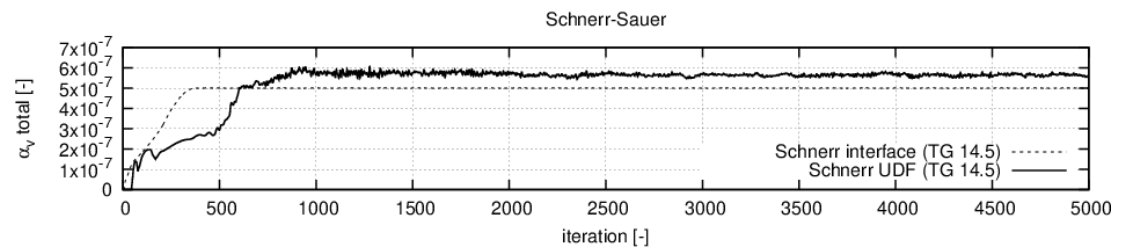
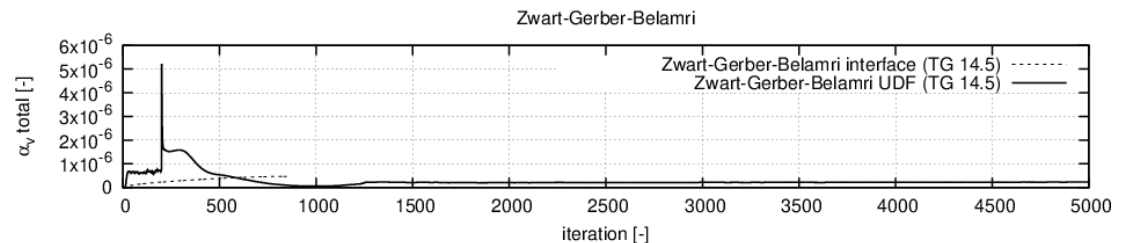
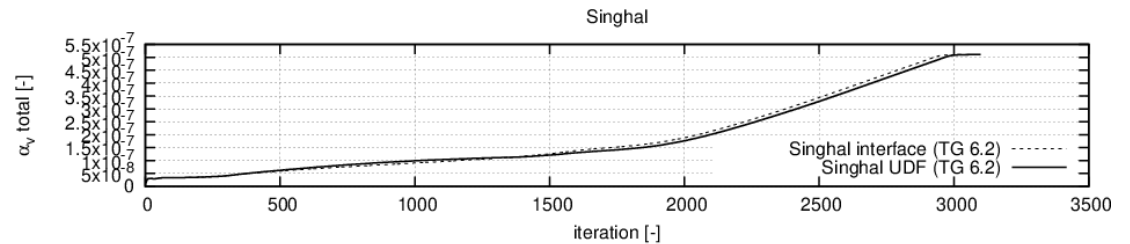
Singhal



Zwart-Gerber-Belamri



Schnerr-Sauer



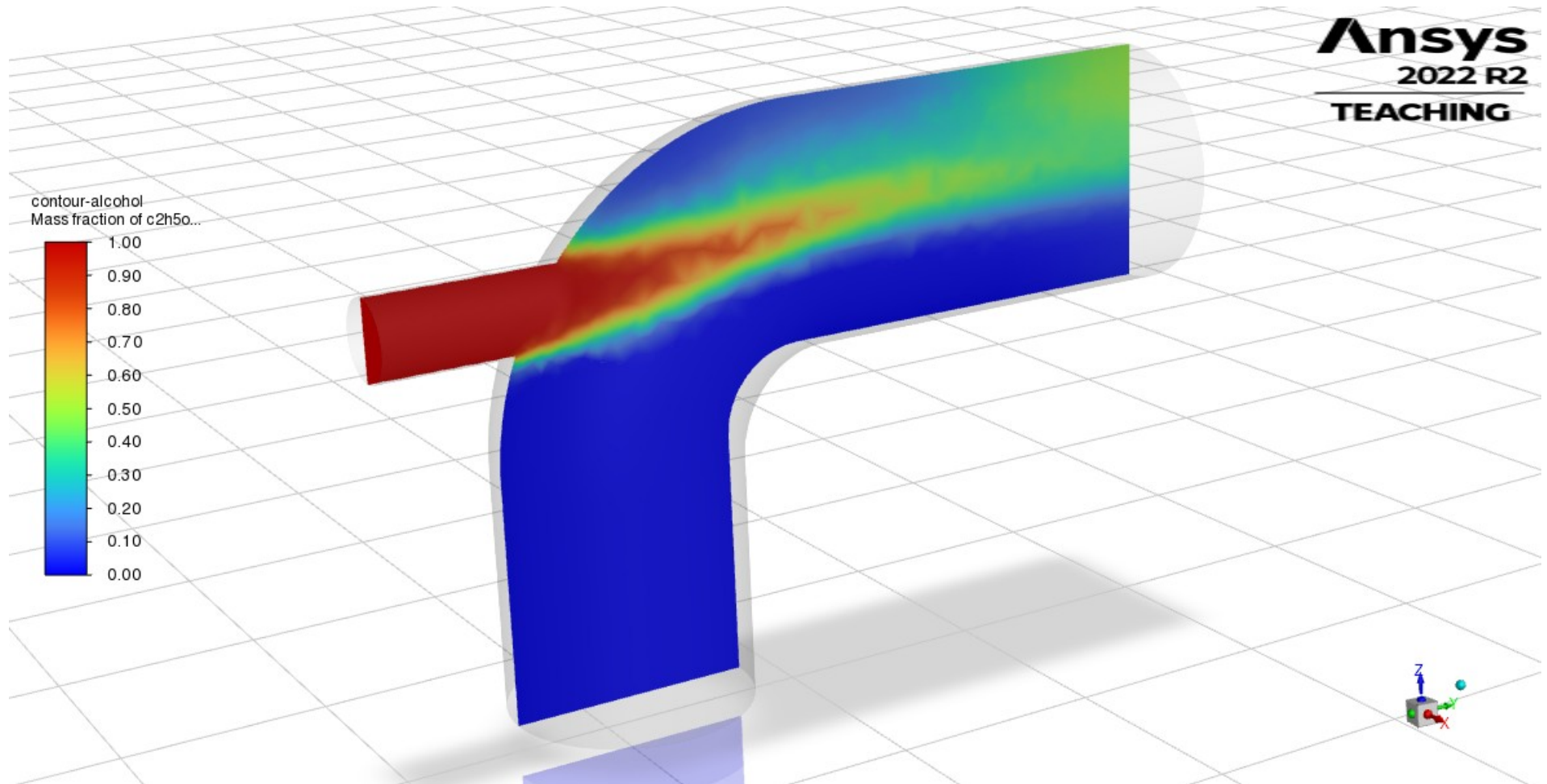
Przykład testu porównawczego bazującego na samodzielnie zaimplementowanych modelach kawitacji [Wojciech Sobieski, ANSYS Fluent].

Species Model

Species Model (SM) – model o tych samych właściwościach co Model Homogeniczny (Model Mieszany), ale przeznaczony specjalnie dla układów, w których zachodzą reakcje chemiczne (choć nie muszą), np. w procesach spalania. W takich przypadkach liczba komponentów może być stosunkowo duża. Opis wszystkich faz odbywa się w ramach Eulera.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{bilans masy:} \\ \text{bilans pędu:} \\ \text{bilans energii:} \\ \text{bilans udziału składnika:} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} \rho + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{v}) + \operatorname{div}(\rho \vec{v} \vec{v}) = \operatorname{div}(-p \vec{I} + \vec{\tau}) + \rho \vec{s}_p \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho e) + \operatorname{div}(\rho e \vec{v}) = \operatorname{div}((-p \vec{I} + \vec{\tau}) \vec{v} + \vec{q}) + \rho s_e \\ \frac{\partial}{\partial t}(\epsilon_k \rho) + \operatorname{div}(\epsilon_k \rho \vec{v}) = \operatorname{div}(\vec{J}_k^m + \vec{J}_k^t) + \rho s_k \quad k = 1, \dots, n_s \end{array} \right.$$

Species Model



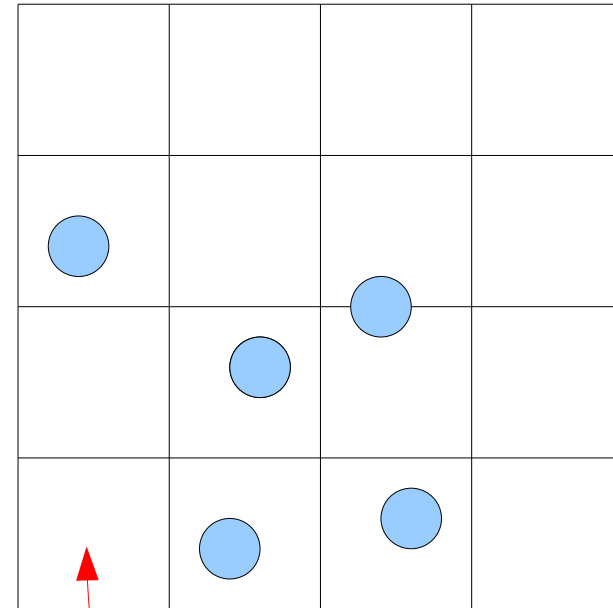
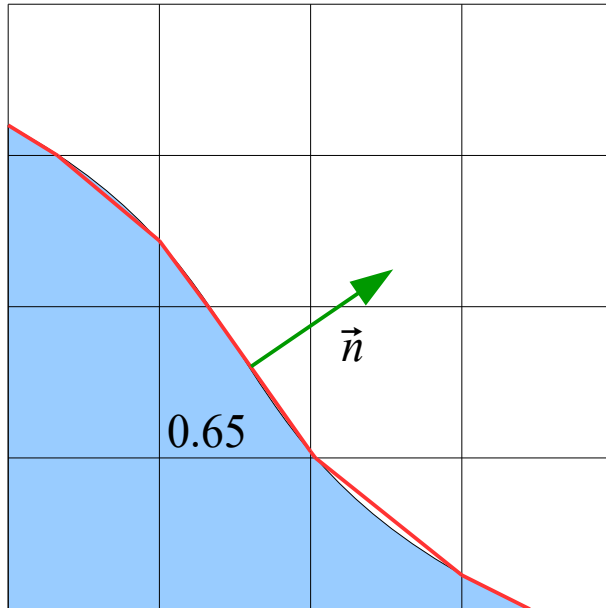
Przykład mieszania etanolu z wodą w kanale z kolankiem
[Wojciech Sobieski, ANSYS Fluent].

Volume of Fluid

Volume of Fluid (VOF) – model przeznaczony do opisu przepływów z powierzchnią swobodną lub przepływów niemieszających się płynów. Oprócz pojedynczego układu równań bilansowych rozwiązywane są dodatkowe równania ciągłości poszczególnych faz – dzięki nim możliwe jest „śledzenie” kształtu powierzchni rozdziału faz. Opis faz odbywa się w ujęciu Eulera.

bilans masy:	{	$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0$
bilans pędu:		$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{v}) + \operatorname{div}(\rho \vec{v} \vec{v}) = \operatorname{div}(-p \overset{\leftrightarrow}{I} + \overset{\leftrightarrow}{\tau}) + \rho \vec{s}_p$
bilans energii:		$\frac{\partial}{\partial t}(\rho e) + \operatorname{div}(\rho e \vec{v}) = \operatorname{div}((-\overset{\leftrightarrow}{p} \overset{\leftrightarrow}{I} + \overset{\leftrightarrow}{\tau}) \vec{v} + \vec{q}) + \rho s_e$
bilans udziału składnika:		$\frac{1}{\rho_q} \left[\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_q \rho_q) + \operatorname{div}(\alpha_q \rho_q \vec{v}_q) \right] = S_{\alpha_q} + \sum_{p=1}^{n_s} (m_{pq} - m_{qp})$

Volume of Fluid

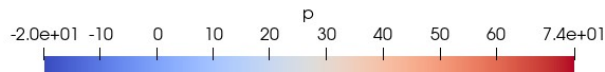
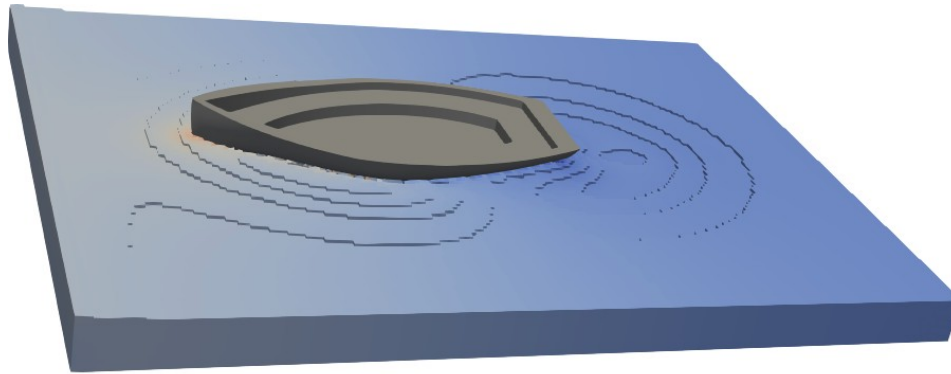


tu siatka jest za rzadka, aby dało się śledzić orientację powierzchni międzyfazowej.

Model Volume of Fluid:

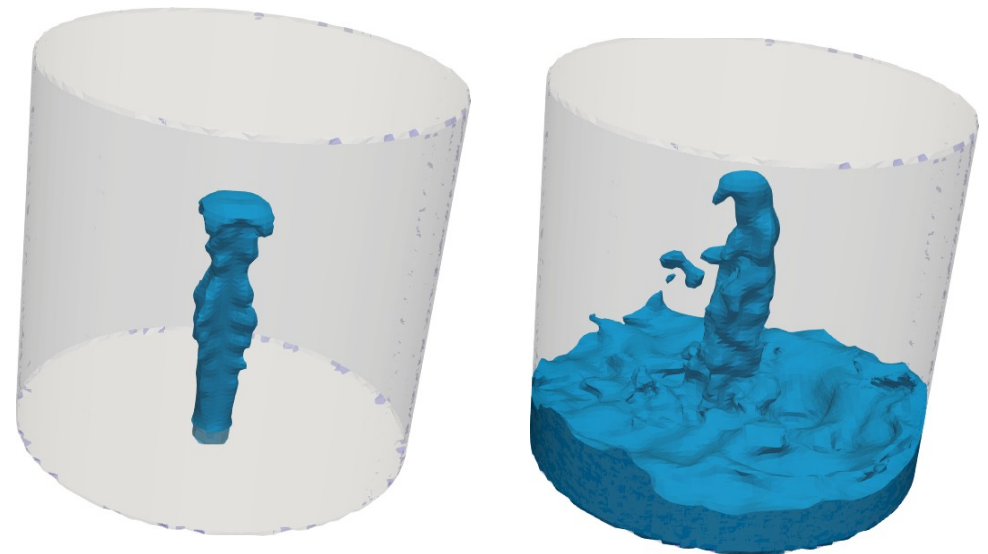
- analizuje informacje o udziale faz,
- tam, gdzie udziały faz są inne niż 0 lub 1, algorytm odtwarza kształt powierzchni międzyfazowej.

Volume of Fluid

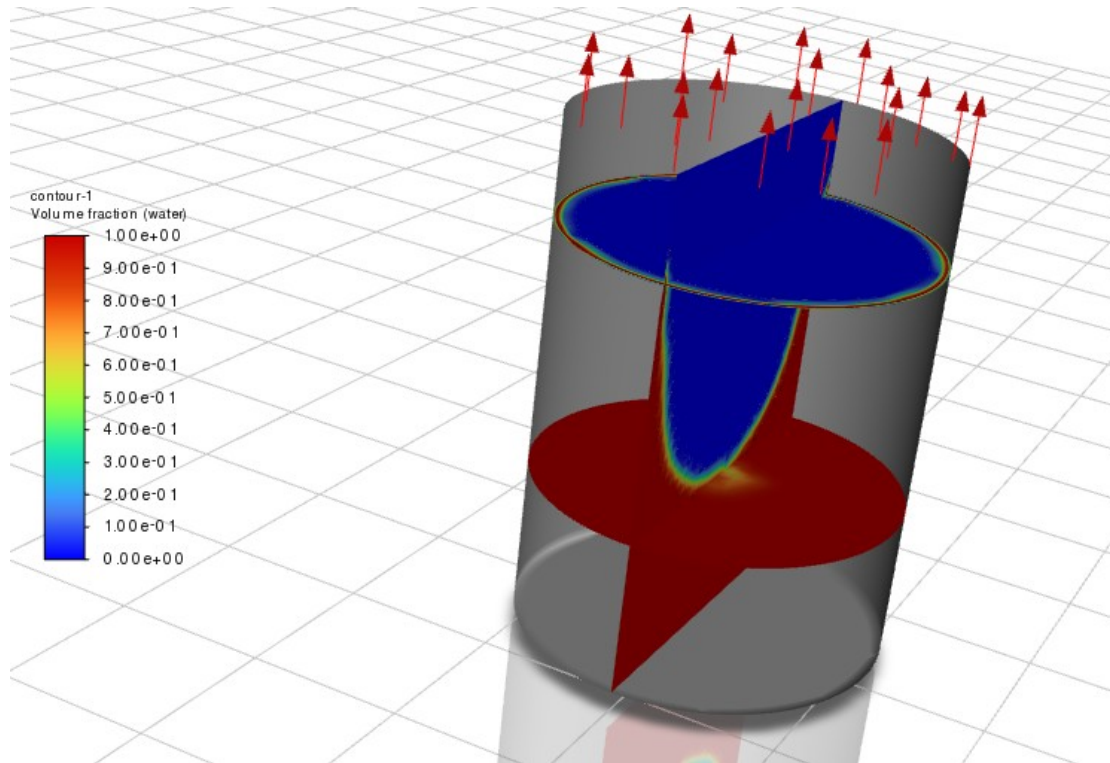


Przykład modelowania
opływu wokół przeszkody
[Wojciech Sobieski, OpenFOAM].

Przykład modelowania
napelniania zbiornika cieczą
[Wojciech Sobieski, OpenFOAM].

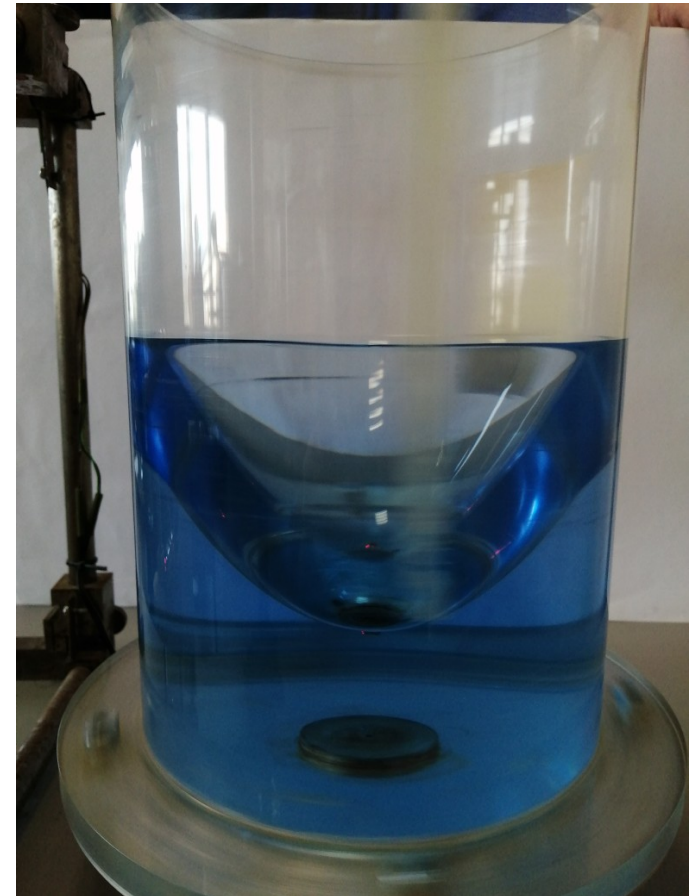


Volume of Fluid



Przykład modelowania
powierzchni swobodnej cieczy w naczyniu wirującym
[Wojciech Sobieski, Fluent].

prędkość: 160 [obr/min]
wysokość paraboloidy: 0.117 [m]



Wielofazowy Model Eulera

Wielofazowy Model Eulera (Eulerian Multiphase Model, Two-Fluid Model) – niehomogeniczny model przeznaczony do opisu mieszanin dowolnej liczby faz: gazów, cieczy i cząstek stałych. Dla każdej z faz rozwiązywany jest oddzielny układ równań bilansowych. Sprzęganie faz odbywa się poprzez ciśnienie oraz międzyfazowe współczynniki wymiany masy, pędu i energii. Opis interakcji zależy w głównej mierze od rodzaju przepływu: *fluid-fluid* czy też *fluid-solid*.

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_q \rho_q) + \text{div}(\alpha_q \rho_q \vec{v}_q) = \sum_{p=1}^{n_s} (\dot{m}_{pq} - \dot{m}_{qp}) + S_{m,q}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_q \rho_q \vec{v}_q) + \text{div}(\alpha_q \rho_q \vec{v}_q \vec{v}_q) = \text{div}(\vec{\tau}_q^c - \alpha_q p \vec{I} - p_s \vec{I}) + \vec{R} + \vec{S}_{F,q}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_q \rho_q h_q) + \text{div}(\alpha_q \rho_q h_q \vec{v}_q) = \text{div}(\vec{\tau}_q^c \vec{v}_q - \alpha_q p \vec{I}) + \text{div}(\vec{q}_q) + \vec{Q} + S_{h,q}$$

Wielofazowy Model Eulera

W Wielofazowym Modelu Eulera:

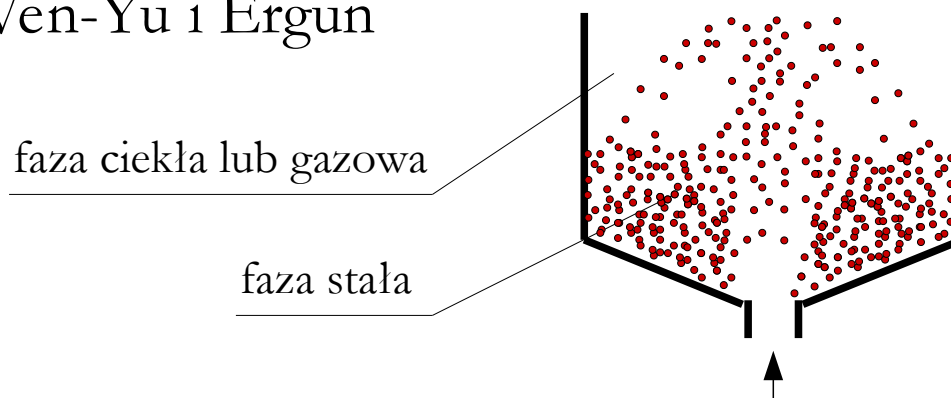
- cząstki są traktowane jako obiekty sferyczne:
 - kropelki,
 - pęcherzyki,
 - cząstki stałe (można dodatkowo zdefiniować współczynnik kształtu).
- każda faza rozproszona posiada własną charakterystyczną średnicę,
- istnieje możliwość modyfikacji rozkładu średnic, np. stosując równanie bilansu populacji, ale powoduje to istotny wzrost nakładów obliczeniowych.

Wielofazowy Model Eulera wymaga zdefiniowania wielu domknięć.

Wielofazowy Model Eulera

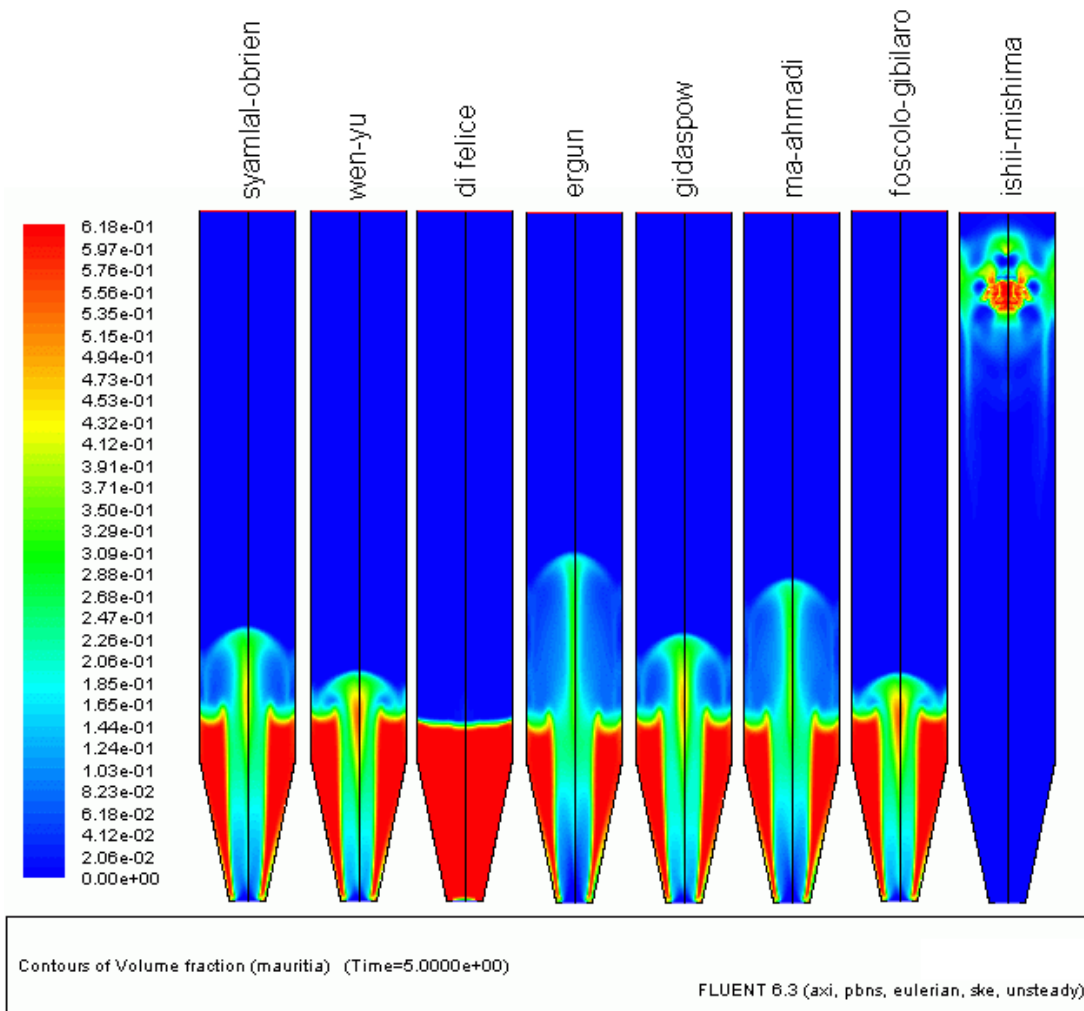
Model Gidaspowa (dla przepływów typu Fluid – Solid)

- pierwsza faza jest fazą ciągłą, druga fazą rozproszoną
- model przeznaczony dla gęstych, zwartych układów (złoża fluidalne)
- model przewiduje występowanie kolizji cząstek
- model bazuje na teorii gazu doskonałego
- kombinacja modeli Wen-Yu i Ergun



$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_q \rho_q \vec{v}_q) + \text{div}(\alpha_q \rho_q \vec{v}_q \vec{v}_q) = \text{div}(\vec{\tau}_q^c - \alpha_q p \vec{I} - p_s \vec{I}) + \vec{R} + \vec{S}_{F,q}$$

Wielofazowy Model Eulera



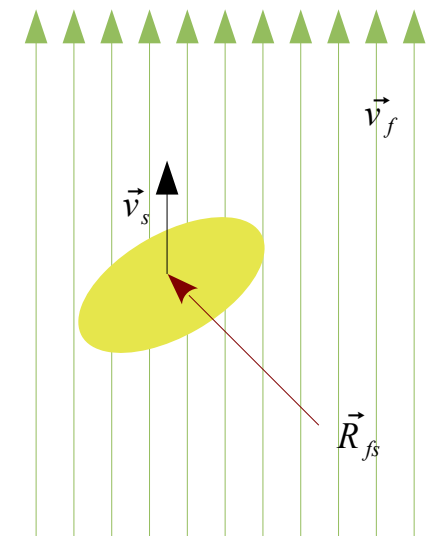
$$\vec{R}_{fs} = \beta_{fs} (\vec{v}_f - \vec{v}_s)$$

$$\beta_{fs(\text{Ergun})}^{\alpha_{fluid} \leq 0.8} = 150 \frac{\alpha_s (1 - \alpha_f) \mu_f}{\alpha_f d_s^2} + 1.75 \frac{\rho_f \alpha_s |\vec{v}_s - \vec{v}_f|}{d_s}$$

$$\beta_{fs(\text{Wen-Yu})}^{\alpha_{fluid} > 0.8} = \frac{3}{4} C_D \frac{\alpha_s \alpha_f \rho_f |\vec{v}_s - \vec{v}_f|}{d_s} f_{C_D}^{cor}(\alpha_f)$$

Model Gidaspowa

f – fluid, *s* – solid



Modelowanie fontannowej suszarki do ziarna

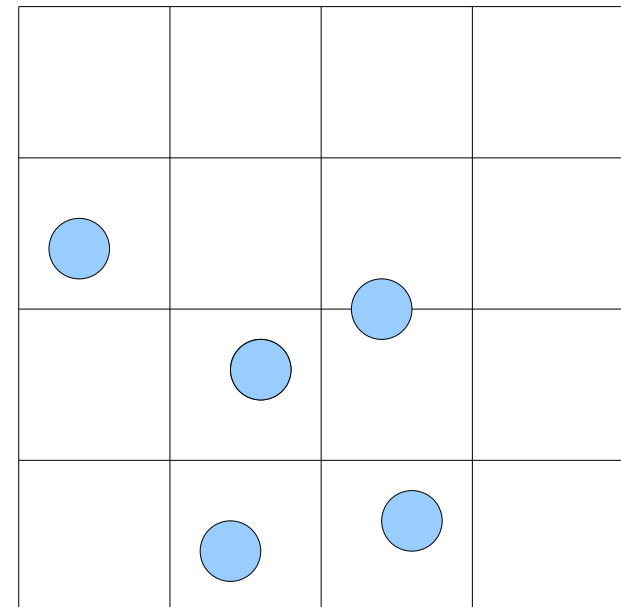
– testy różnych modeli wymiany pędu [Wojciech Sobieski, ANSYS Fluent].

Model Fazy Dyskretnej

Model Fazy Dyskretnej (Discrete Phase Model) – grupa modeli przeznaczonych do opisu układów składających się z fazy ciągłej, w której rozproszone są sferyczne cząsteczki stałe, pęcherzyki lub krople innego płynu, traktowane jako masy punktowe. Faza rozproszona może wymieniać z fazą ciągłą masę, pęd i energię. Faza tła opisywana jest w ujęciu Eulera, zaś fazy rozproszone w ujęciu Lagrange'a. Rozróżnia się:

- interakcję jednostronną (realizowaną na etapie postprocesingu),
- interakcję dwustronną (realizowaną na etapie symulacji).

DPM stosuje się głównie dla układów rzadkich, gdy udział objętościowy wynosi maksymalnie ~ 0.1 .



Model Fazy Dyskretnej

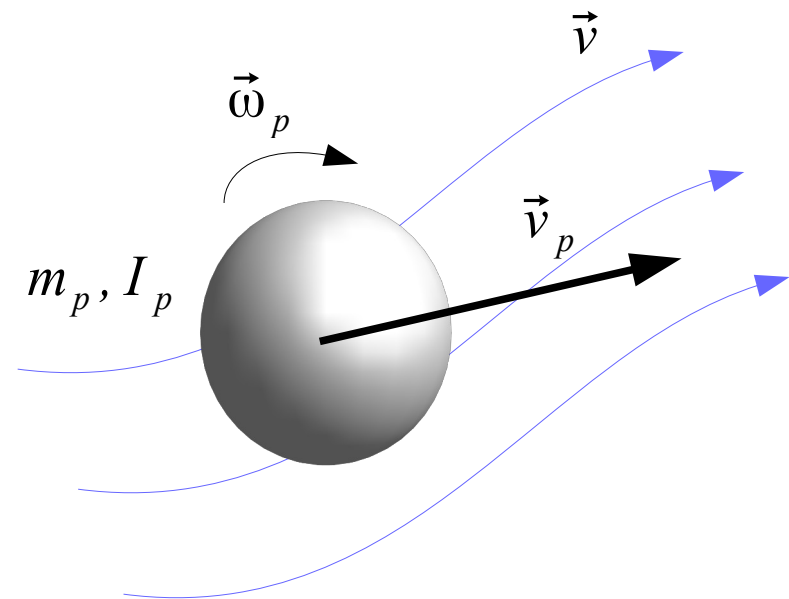
Równania ruchu cząstek:

- ruch postępowy cząstek:

$$m_p \frac{d \vec{v}_p}{dt} = \boxed{\vec{F}_{drag}} + \vec{F}_{pressure} + \vec{F}_{virtual\ mass} + \vec{F}_{gravitation} + \vec{F}_{Magnus\ lift} + \vec{F}_{collision} + \vec{F}_{other}$$

- ruch obrotowy cząstek:

$$I_p \frac{d \vec{\omega}_p}{dt} = \vec{T}_{rotational\ drag} + \vec{T}_{collision}$$



Model Fazy Dyskretnej

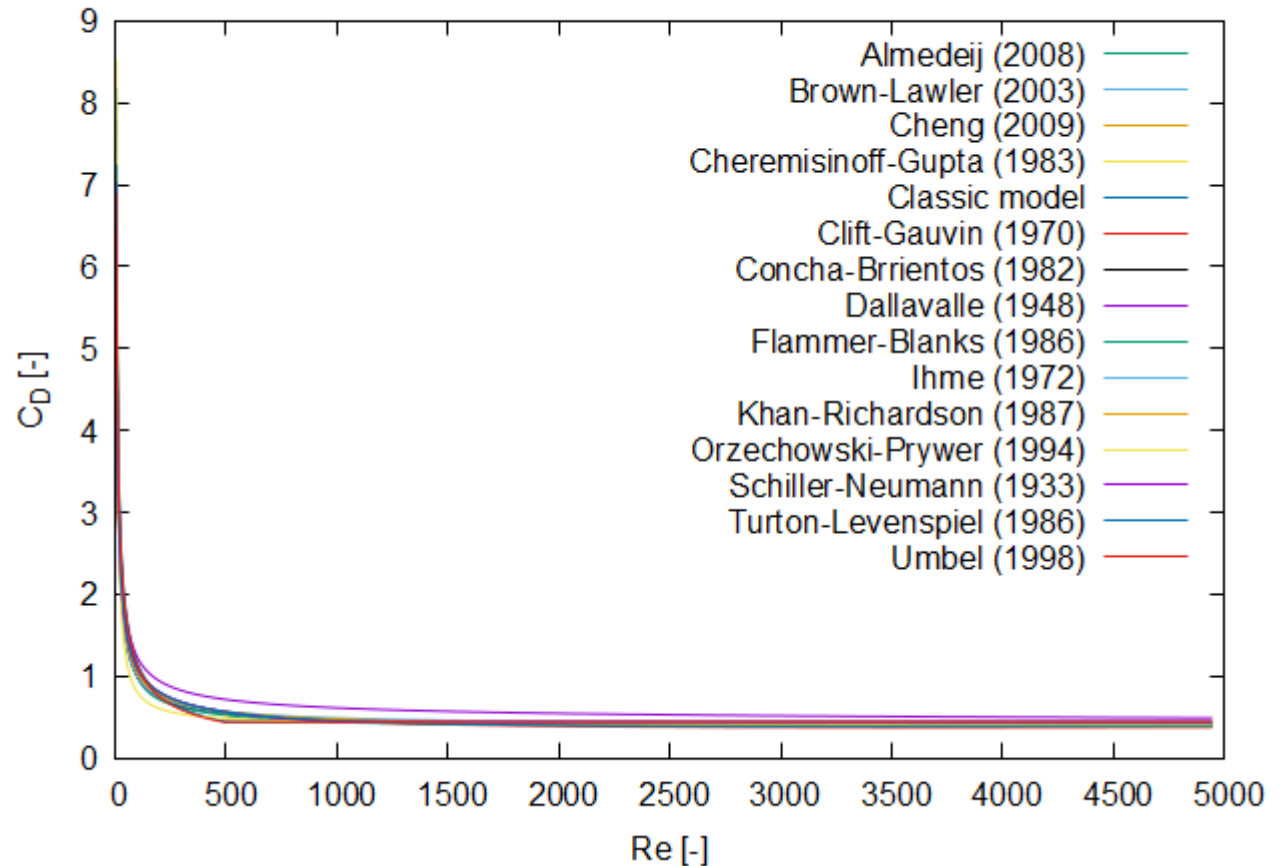
Siła oporu:

$$\vec{F}_{drag} = m_p \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_p}{\tau_p}$$

$$\tau_r = \frac{24}{C_D Re} \frac{\rho_p d_p^2}{18 \mu_f}$$

$$Re = \frac{\rho_f d_p |\vec{v}_f - \vec{v}_p|}{\mu_f}$$

Formuły opisujące wartość współczynnika oporu cząstki sferycznej



w podejściu DPM można zadawać dowolne rozkłady wielkości cząstek i wprowadzać dowolną liczbę grup cząstek.

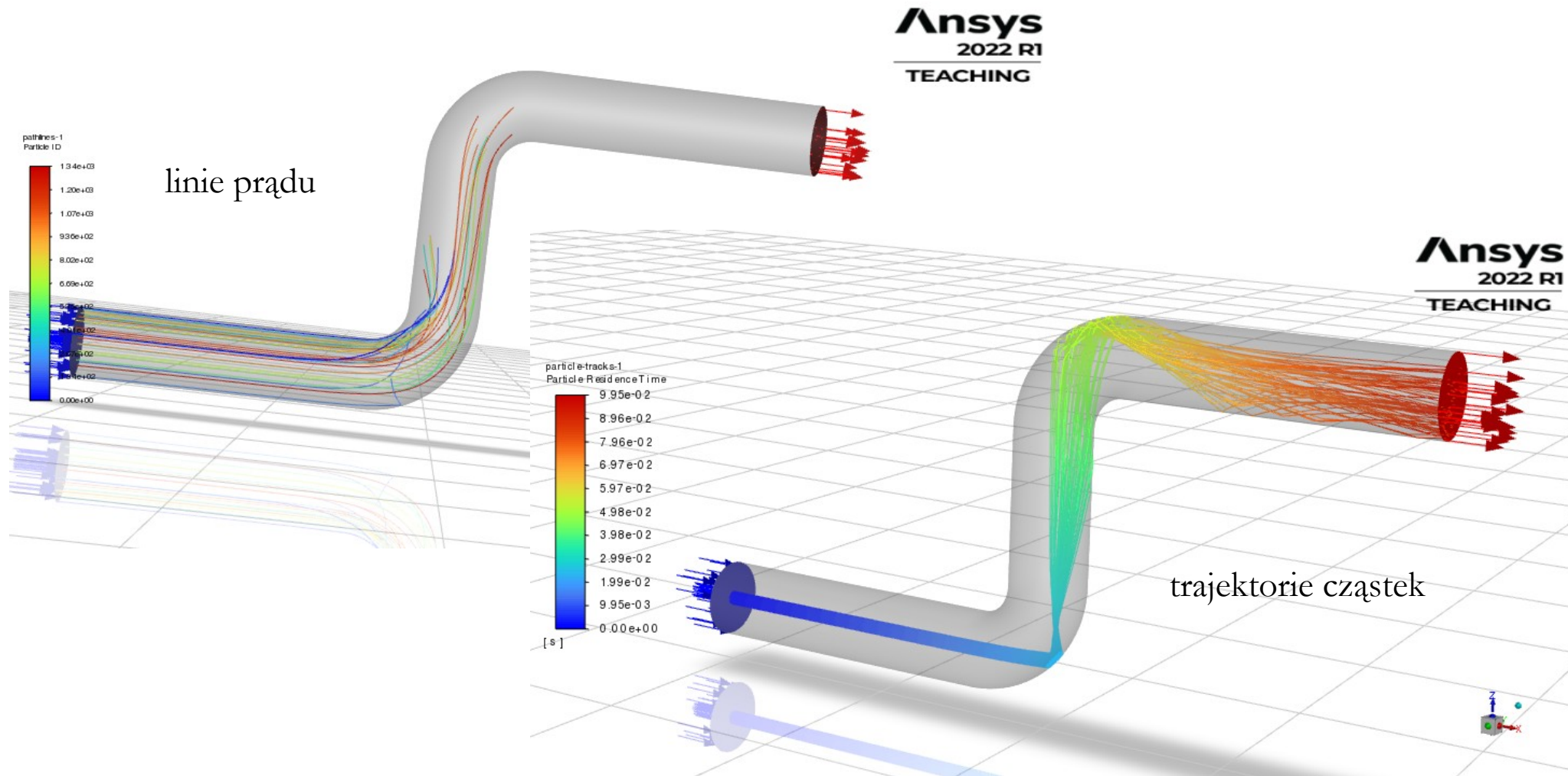
Model Fazy Dyskretnej

Dodatkowe efekty fizyczne:

- **działanie źródeł** – wpływ grawitacji, pól elektromagnetycznych, itp.
- **termoforeza** – ruch wywołany gradientem temperatur,
- **ruchy Browna** – ruch wywołany zderzeniami z cząstkami płynu,
- **efekt Saffmana** – powstawanie siły prostopadłej do głównego kierunku ruchu spowodowane lokalnym gradientem prędkości,
- **efekt Magnusa** – powstawanie siły prostopadłej do głównego kierunku ruchu spowodowane rotacją cząstki,
- **masa wirtualna** – uwzględnienie faktu, że poruszające się cząstki muszą przemieścić pewną masę otaczającego je płynu,
- **kolizja cząstek**:
 - fizyczne (jak w Metodzie Elementów Dyskretnych),
 - stochastyczne,
- **zmiana masy cząstek** – zanikanie lub przyrost masy,
- **rozpad cząstek**.

Pewne elementy teorii są takie same lub podobne do tych, które stosuje się w Wielofazowym Modelu Eulera lub też w Metodzie Elementów Dyskretnych.

Model Fazy Dyskretnej

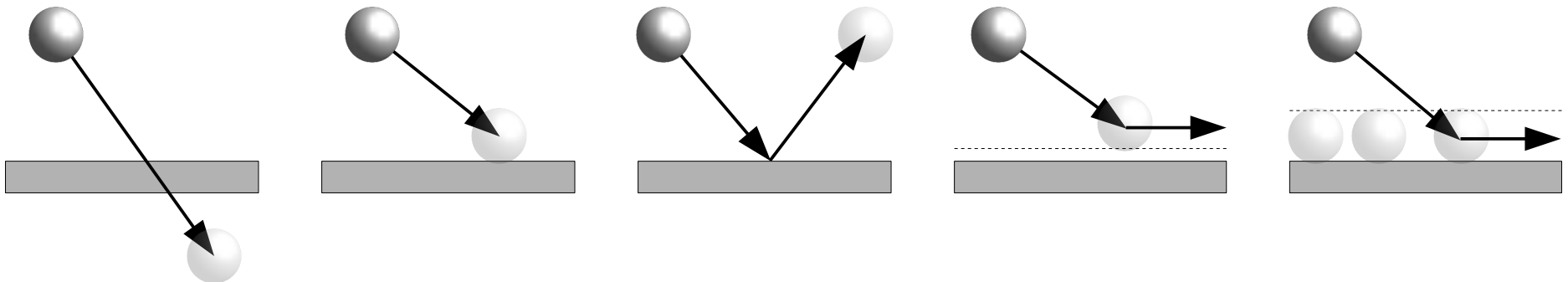


Przykład modelowania metodą DPM (interakcja jednokierunkowa) [Wojciech Sobieski, Fluent].

Model Fazy Dyskretnej

Warunki brzegowe Modelu Fazy Dyskretnej:

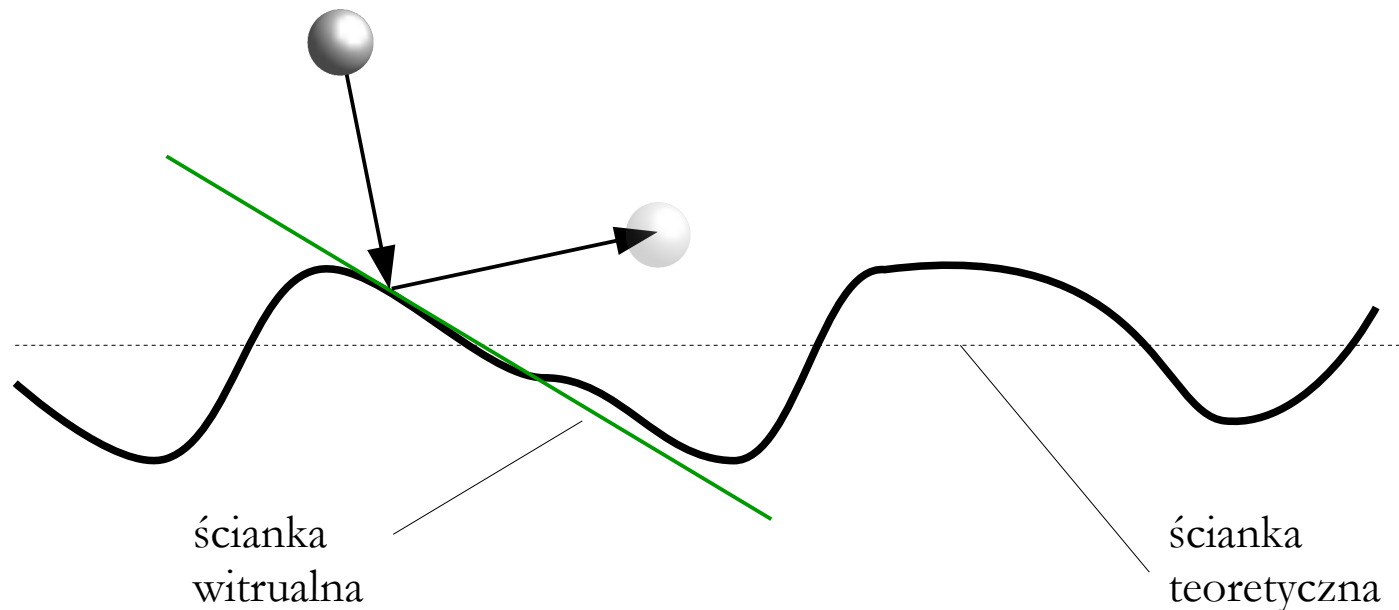
- **escape** – przejście cząstki przez ścianę bez reakcji,
- **trap** – przyklejenie się cząsteczki do ściany,
- **reflect** – odbicie od ściany bez tłumienia (warunek domyślny) lub z tłumieniem (trzeba podać współczynnik restytucji),
- **wall jet** – ślizganie się cząstek po ścianie (np. na skutek wystąpienia poduszki parowej na kropli stykającej się z gorącą ścianą),
- **wall film** – tworzenie i dołączanie cząstek do filmu na ścianie.



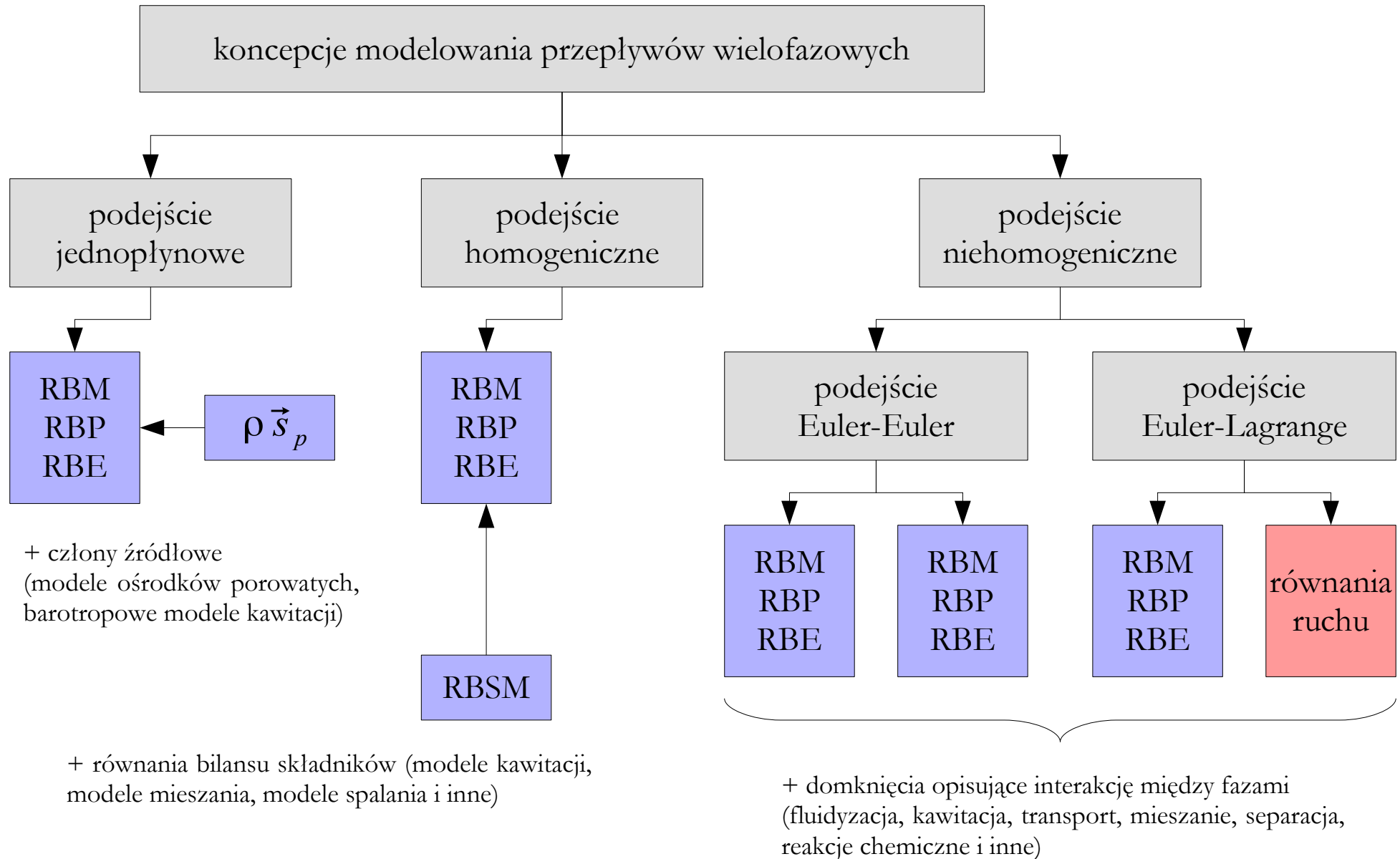
Model Fazy Dyskretnej

Warunki brzegowe Modelu Fazy Dyskretnej:

- **chropowatość ścian** – model pozwalający na szacowanie lokalnego kąta odbicia na podstawie parameterów chropowatości.



Konceptcje modelowania – przypomnienie



Jaki model zastosować do poszczególnych zagadnień?



tylko domknięcia na
współczynnik wymiany pędu
i tylko dla układów fluid-solid



UNIVERSITY OF WARMIA AND MAZURY IN OLSZTYN
The Faculty of Technical Sciences
POLAND, 10-957 Olsztyn, M. Oczapowskiego 11
tel.: (48)(89) 5-23-32-40, fax: (48)(89) 5-23-32-55
URL: <http://www.uwm.edu.pl/edu/sobieski/> (in Polish)



Dziękuję za uwagę

Wojciech Sobieski

Olsztyn, 2003-2026