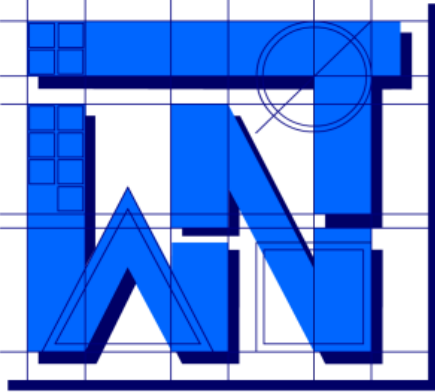


Wydział Nauk Technicznych



UNIVERSITY OF WARMIA AND MAZURY IN OLSZTYN
The Faculty of Technical Sciences
POLAND, 10-957 Olsztyn, M. Oczapowskiego 11
tel.: (48)(89) 5-23-32-40, fax: (48)(89) 5-23-32-55
URL: <http://www.uwm.edu.pl/edu/sobieski/> (in Polish)



Numeryczne Metody Obliczeniowe

Metoda Różnic Skończonych

wersja: 13 lutego 2024

Wojciech Sobieski

Olsztyn, 2003-2024

Metody numeryczne w mechanice

Metody numeryczne w Mechanice Płynów (siatkowe i bezsiatkowe):

- **metody siatkowe:**
 - **Metoda Różnic Skończonych (Finite Difference Method)**
 - Metoda Elementów Skończonych (Finite Element Method)
 - Metoda Objętości Skończonych (Finite Volume Method)
 - Metoda Zanurzonego Brzegu (Immersed Boundary Method)
 - Metoda gazu sieciowego Boltzmanna (Lattice Boltzmann Method)
 - ...
- **metody bezsiatkowe:**
 - Metoda Elementów Dyskretnych (Discrete Element Method)
 - Metoda Elementów Brzegowych (Boundary Element Method)
 - Metoda Cząstek Wygładzonych (Smoothed Particle Hydrodynamics)
 - ...
- **metody hybrydowe:**
 - Metoda Cząstek w Siatce (Particle/Fluid in Cell Model)
 - ...



Computational Fluid Dynamics (CFD).



Metoda Różnic Skończonych

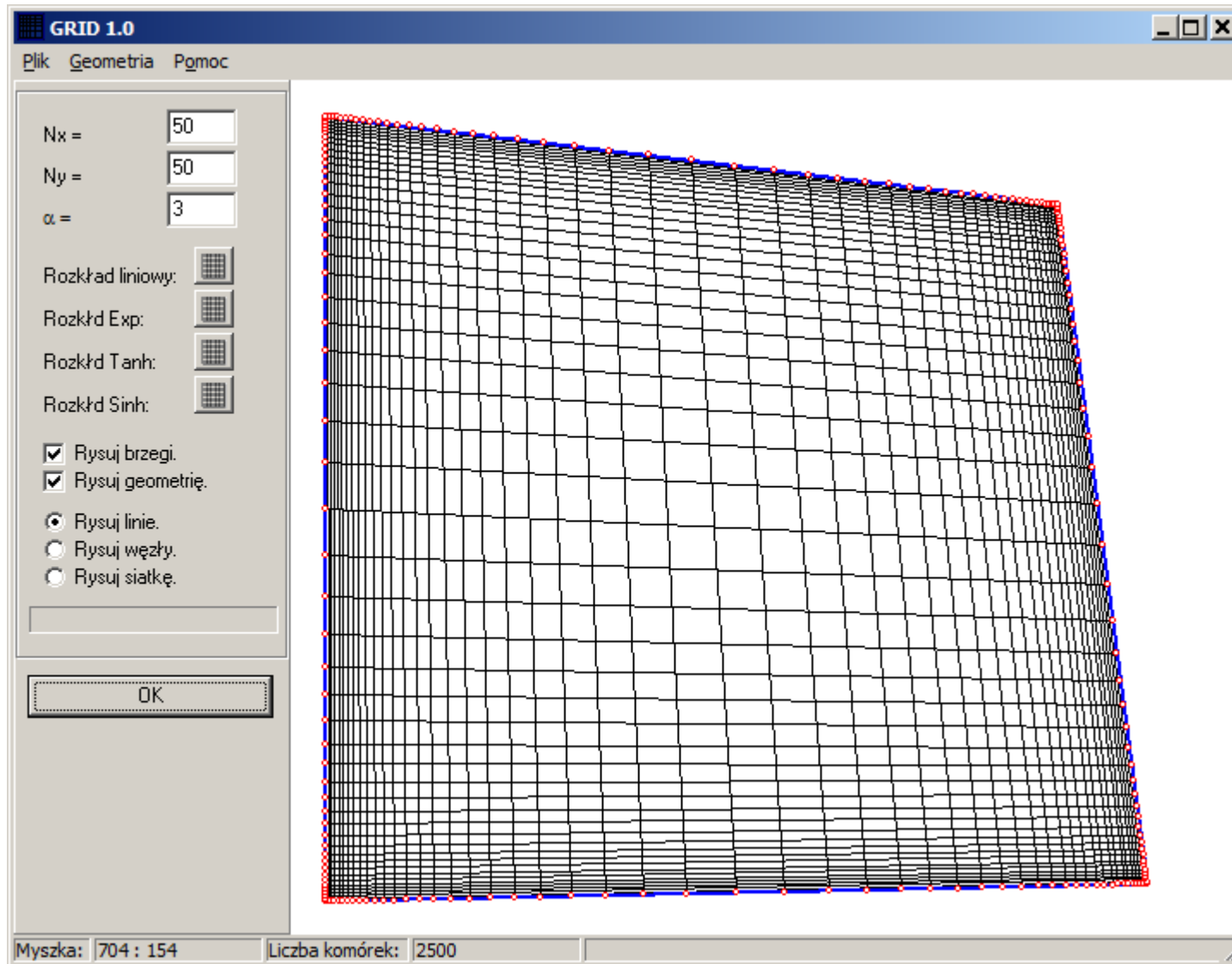
Dyskretyzacja – zamiana funkcji ciągłej na funkcję określoną jedynie w wybranym zbiorze argumentów (najczęściej o elementach rozłożonych regularnie).

W metodach numerycznych dyskretyzacji podlega przestrzeń oraz czas.



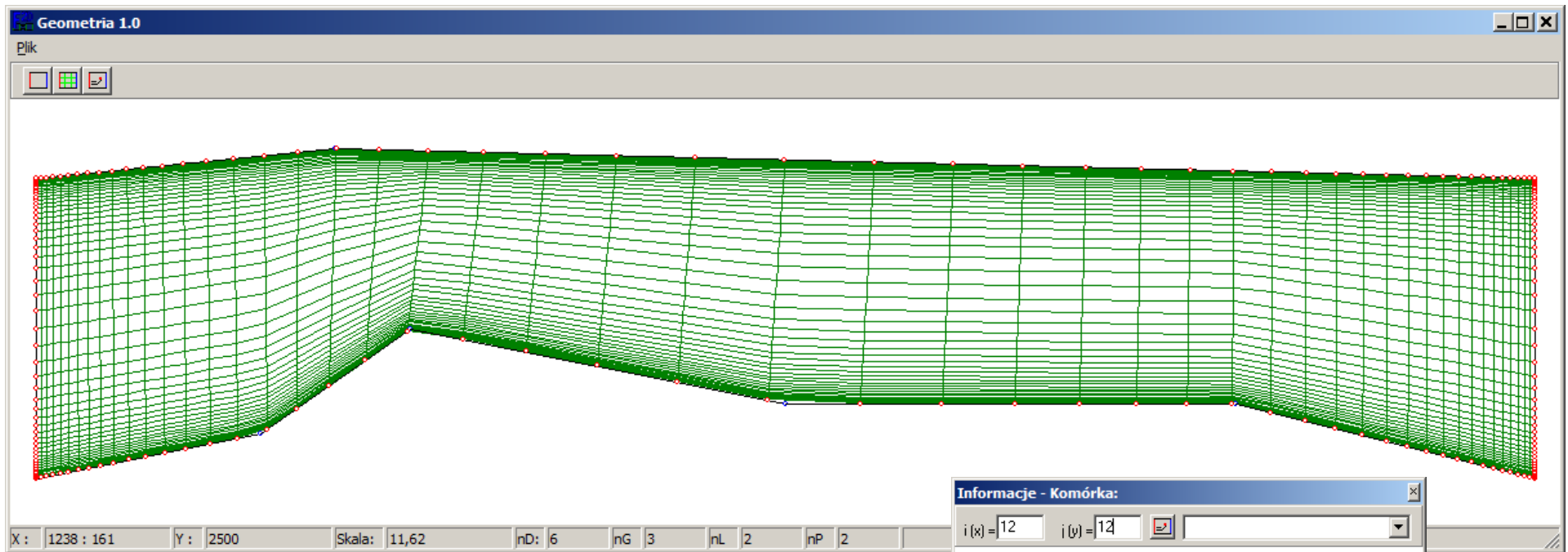
Zamiana jednowymiarowego układu ciągłego na układ dyskretny (centralny względem węzła)

Metoda Różnic Skończonych

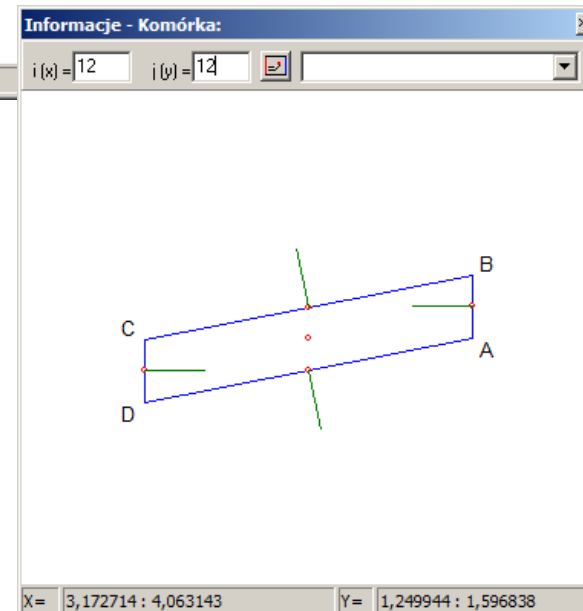
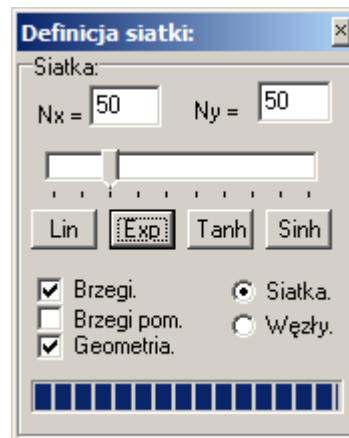


Grid 1.0
(Delphi)

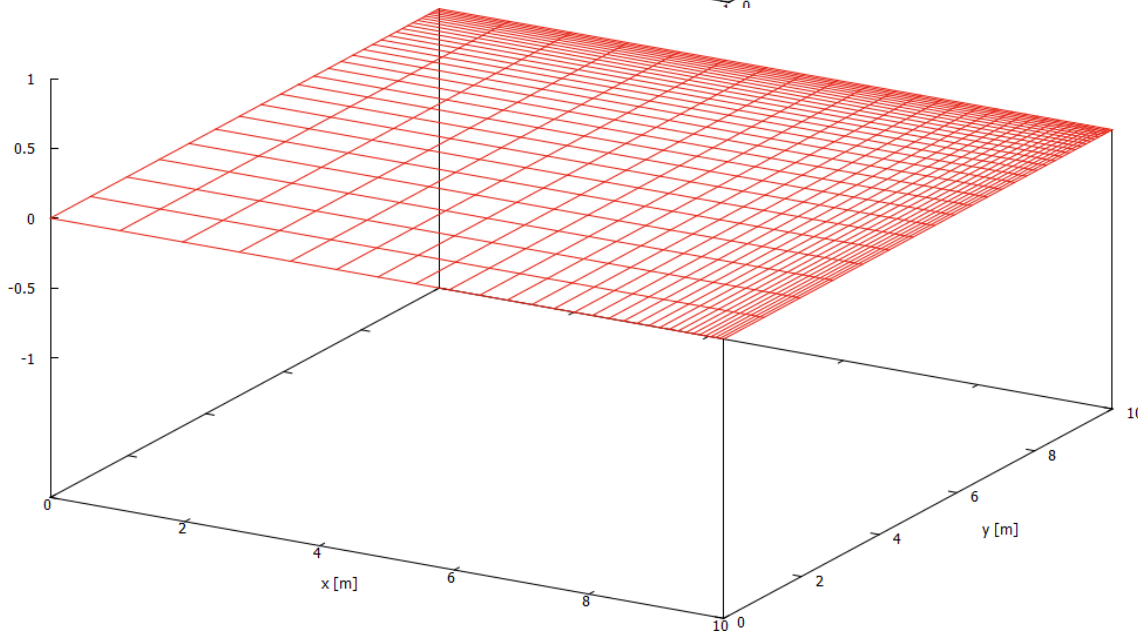
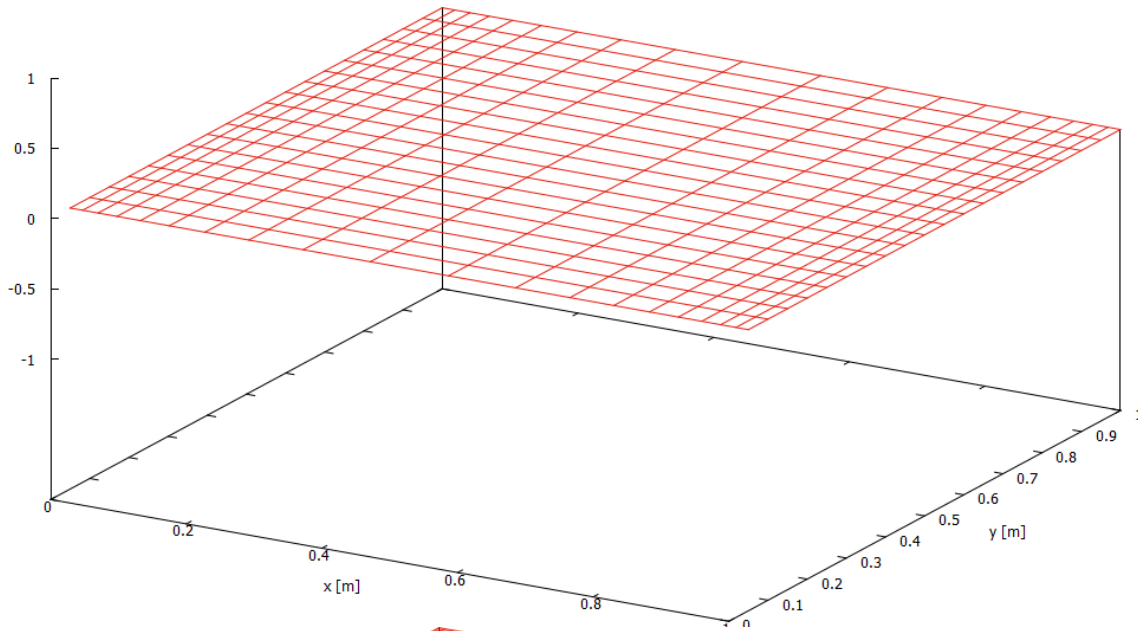
Metoda Różnic Skończonych



Grid 2.0
(Delphi)



Metoda Różnic Skończonych



```
Program Siatka - Wojciech Sobieski 2007
```

```
Tryb pracy:
```

- 1 - ręczne podawanie parametrów zadania
- 2 - odczyt parametrów zadania z pliku
- 3 - przykład siatki z parametrami domyślnymi
- 4 - zapis animacji do plików graficznych (odczyt parametrów z pliku)
- 0 - wyjście

```
Wybor: _
```

GridMaker
(Fortran + Gnuplot)

Metoda Różnic Skończonych

Metoda Różnic Skończonych – metoda polegająca na przybliżeniu pochodnej funkcji poprzez skończone różnice, w oparciu o wcześniej zdefiniowaną przestrzenną siatkę dyskretną.

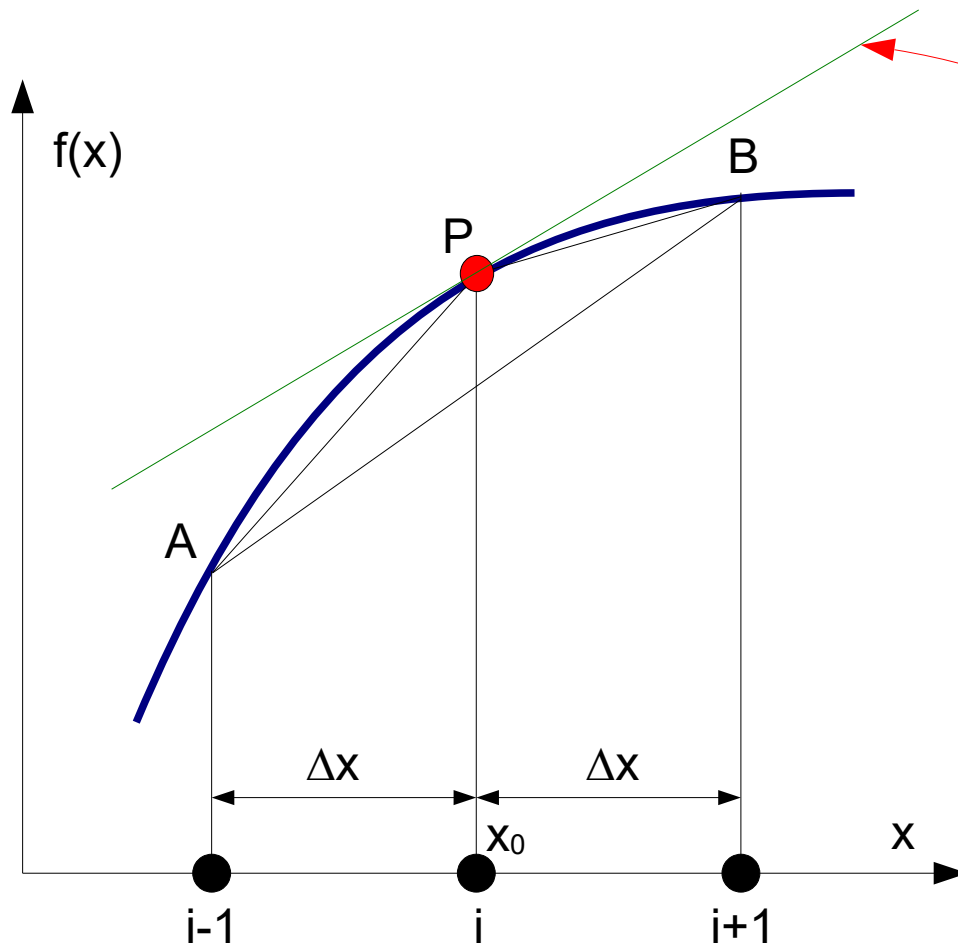
Wzory różnicowe (zwane najczęściej schematami różnicowymi) można wyprowadzić bądź z zależności geometrycznych (graficzna interpretacja pochodnej) bądź z rozwinięcia danej funkcji w szereg Taylora.



Zamiana jednowymiarowego układu ciągłego na układ dyskretny (centralny względem węzła)

MRS – wzory różnicowe

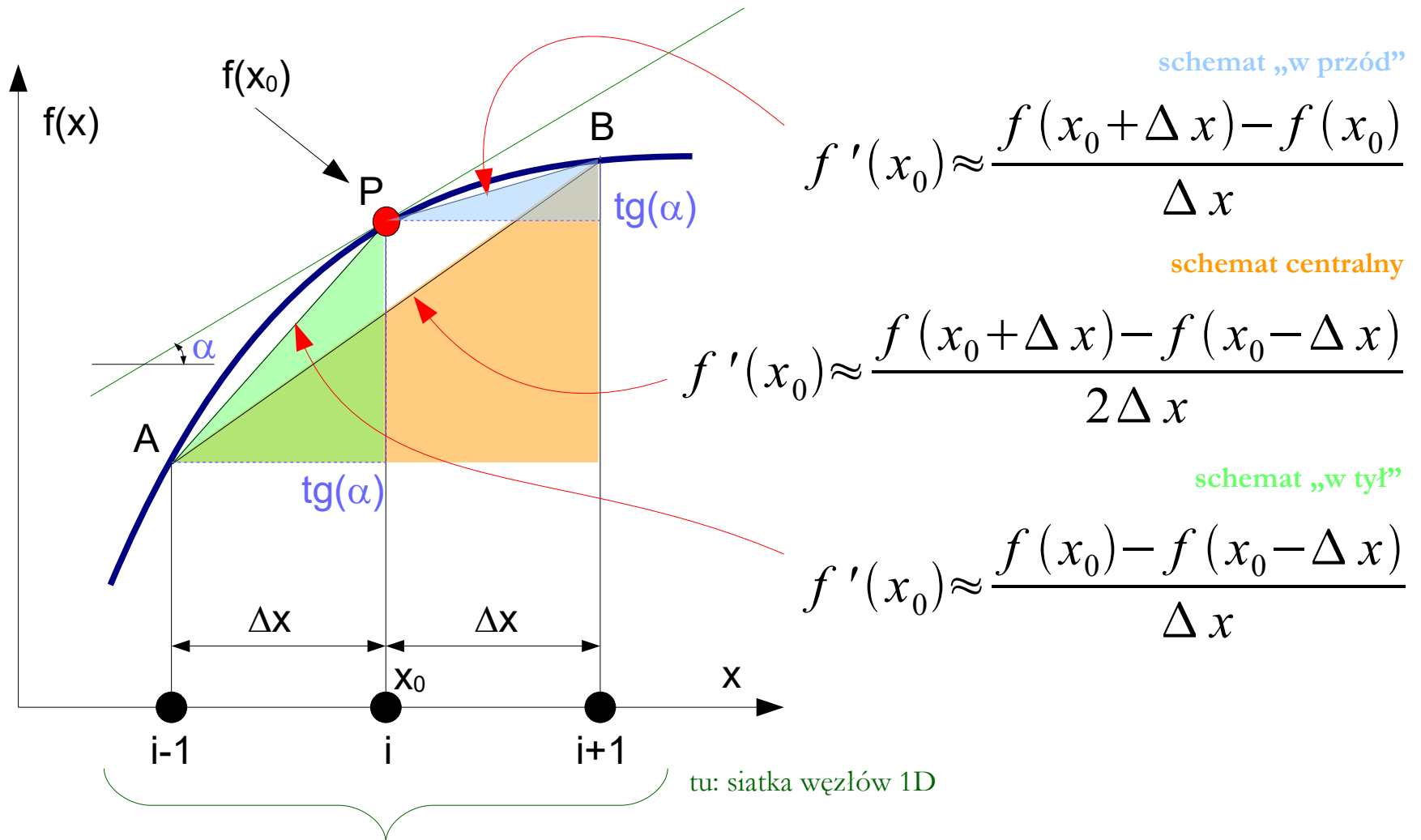
Rozważmy funkcję $f(x)$ oraz jej pochodną w punkcie P: $f'(x_0)$.



Pochodna \equiv tangens kąta nachylenia stycznej w punkcie – jak to zapisać?

MRS – wzory różnicowe

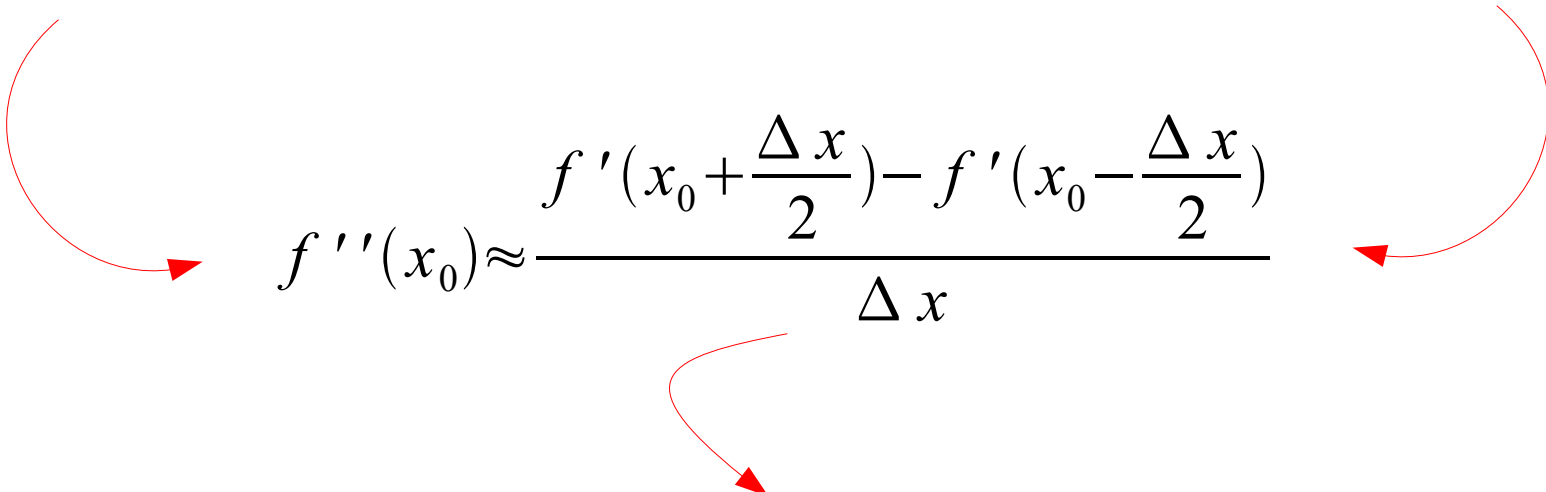
Rozważmy funkcję $f(x)$ oraz jej pochodną w punkcie P: $f'(x_0)$.



MRS – wzory różnicowe

Druga pochodna funkcji $f(x)$ w punkcie x_0 powstanie poprzez trzykrotne zastosowanie schematu różnicowego:

$$f'(x_0 + \frac{\Delta x}{2}) \approx \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad f'(x_0 - \frac{\Delta x}{2}) \approx \frac{f(x_0) - f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x}$$


$$f''(x_0) \approx \frac{f'(x_0 + \frac{\Delta x}{2}) - f'(x_0 - \frac{\Delta x}{2})}{\Delta x}$$

$$f''(x_0) \approx \frac{f(x_0 + \Delta x) - 2f(x_0) + f(x_0 - \Delta x)}{(\Delta x)^2}$$

MRS – wzory różnicowe

Rozwinięcie funkcji $f(x)$ w szereg Taylora („w przód”):

- drugiego rzędu:

$$\begin{aligned} f(x_0 + \Delta x) &= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{(\Delta x)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + O(\Delta x)^N = \\ &= f(x_0) + (\Delta x) f'(x_0) + \frac{(\Delta x)^2}{2!} + \dots O(\Delta x)^3 \end{aligned}$$

- trzeciego rzędu:

$$\begin{aligned} f(x_0 + \Delta x) &= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{(\Delta x)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + O(\Delta x)^N = \\ &= f(x_0) + (\Delta x) f'(x_0) + \frac{(\Delta x)^2}{2!} + \frac{(\Delta x)^3}{3!} + \dots O(\Delta x)^4 \end{aligned}$$

błąd dyskretyzacji



MRS – wzory różnicowe

Rozwinięcie funkcji $f(x)$ w szereg Taylora („w tył”):

- drugiego rzędu:

$$\begin{aligned} f(x_0 - \Delta x) &= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{(\Delta x)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + O(\Delta x)^N = \\ &= f(x_0) - (\Delta x) f'(x_0) + \frac{(\Delta x)^2}{2!} + \dots O(\Delta x)^3 \end{aligned}$$

- trzeciego rzędu:

$$\begin{aligned} f(x_0 - \Delta x) &= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{(\Delta x)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + O(\Delta x)^N = \\ &= f(x_0) - (\Delta x) f'(x_0) + \frac{(\Delta x)^2}{2!} + \frac{(\Delta x)^3}{3!} + \dots O(\Delta x)^4 \end{aligned}$$

błąd dyskretyzacji



MRS – wzory różnicowe

Dokładność rozwiązania:

- pierwsza pochodna:

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x)}{2\Delta x} \approx f'(x_0)$$
$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x)}{2\Delta x} = f'(x_0) + O(\Delta x)^2$$

- druga pochodna:

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - 2f(x_0) + f(x_0 - \Delta x))}{(\Delta x)^2} \approx f''(x_0)$$
$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - 2f(x_0) + f(x_0 - \Delta x))}{(\Delta x)^2} = f''(x_0) + O(\Delta x)^2$$

MRS – wzory różnicowe

Dokładność schematów opisujących pierwszą pochodną:

$$\frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} + O(\Delta x)$$

schemat „w przód”

$$\frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x} + O(\Delta x)$$

schemat „w tył”

$$\frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x} + O(\Delta x)^2$$

schemat centralny

$$\frac{-f_{i+2} + 4f_{i+1} - 3f_i}{2\Delta x} + O(\Delta x)^2$$

schemat „w przód”

$$\frac{3f_i - 4f_{i-1} + f_{i-2}}{2\Delta x} + O(\Delta x)^2$$

schemat „w tył”

$$\frac{-f_{i+2} + 8f_{i+1} - 8f_{i-1} + f_{i-2}}{12\Delta x} + O(\Delta x)^4$$

schemat centralny

MRS – wzory różnicowe

Dokładność schematów opisujących drugą pochodną:

$$\frac{f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x)^2$$

schemat „w przód”

$$\frac{f_i - 2f_{i-1} + f_{i-2}}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x)^2$$

schemat „w tył”

$$\frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x)^2$$

schemat centralny

$$\frac{-f_{i+2} + 16f_{i+1} - 30f_i + 16f_{i-1} - f_{i-2}}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x)^4$$

schemat centralny

dokładność wyznacza
tzw. rząd metody numerycznej

Przykład 1 – równanie falowe

Równanie falowe – jest to matematyczne równanie różniczkowe cząstkowe drugiego rzędu (hiperboliczne), opisujące ruch falowy. W przestrzeni 2D ma ono postać:

$$\frac{\partial^2 U(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U(x, y, t)}{\partial y^2} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 U(x, y, t)}{\partial t^2}$$

U – wychylenie z położenia równowagi [m]

c – prędkość fali [m/s]

x, y, z – współrzędne w układzie kartezjańskim [m]

t – czas [s]

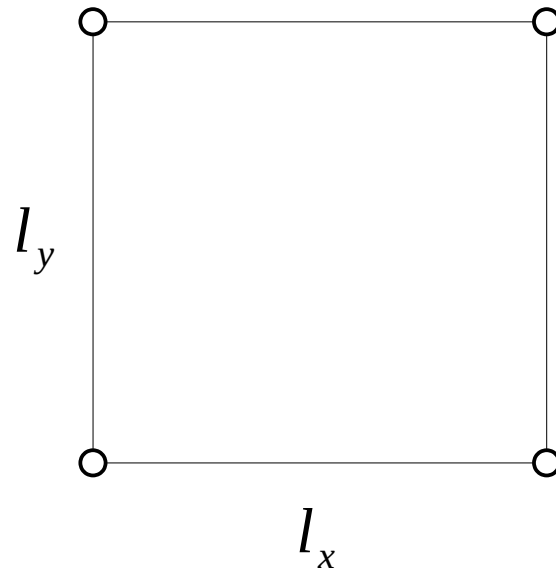
Przykład 1 – równanie falowe



Przykład układu, w którym występuje ruch falowy

Przykład 1 – równanie falowe

Przed przystąpieniem do generacji siatki należy określić rozmiary obszaru obliczeniowego:



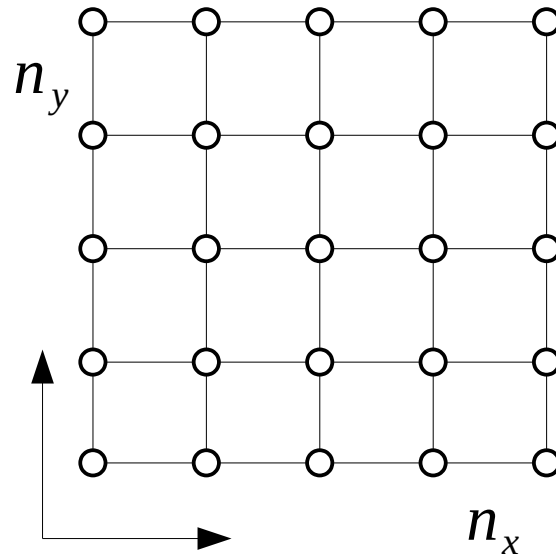
Najprościej jest wybrać obszar o topologii prostokątnej – linie siatki będą ortogonalne, a współrzędne węzłów łatwe do obliczenia.

l_x – długość obszaru w kierunku x [m]

l_y – długość obszaru w kierunku y [m]

Przykład 1 – równanie falowe

Po określeniu liczby węzłów należy wyznaczyć krok przestrzenny:

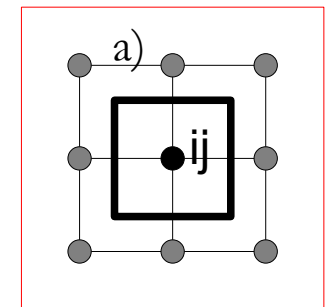


$$dx = \frac{l_x}{n_x} \quad dy = \frac{l_y}{n_y}$$

Jest to dyskretyzacja centralna względem węzła (node-centered scheme)

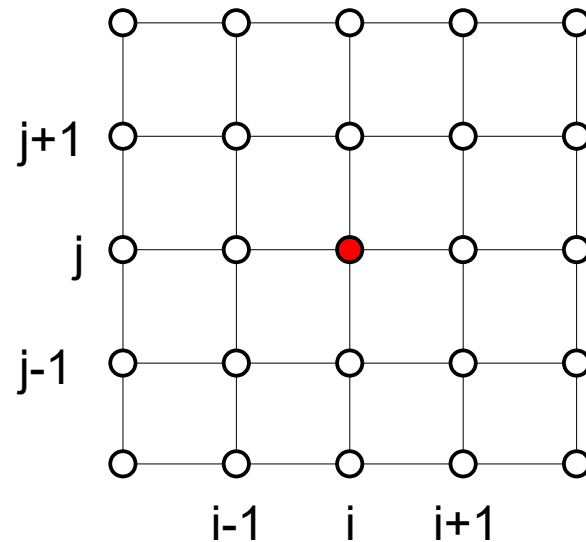
n_x, n_y – liczba węzłów siatki w kierunku x i y [-]

dx, dy – krok przestrzenny w kierunku x i y [-]



Przykład 1 – równanie falowe

Następnie należy zdefiniować indeksy siatki:



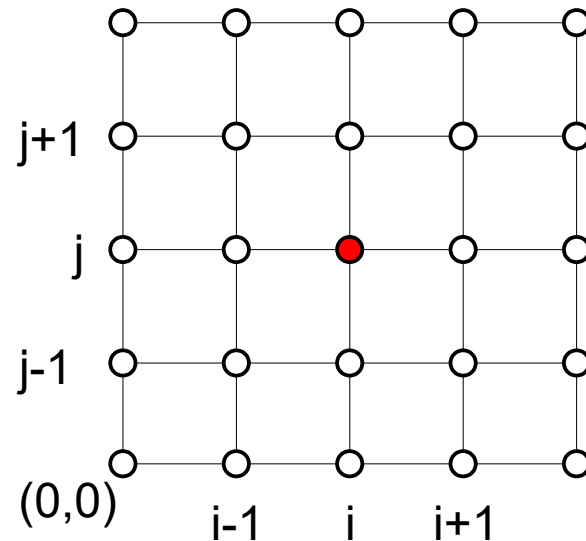
W programie komputerowym i oraz j będą zmiennymi całkowitymi wykorzystanymi do realizacji pętli „po przestrzeni”. Istotny jest tu zakres indeksów, gdyż różne języki programowania domyślnie indeksują tablice od 0 lub 1.

i – licznik węzłów siatki w kierunku x (od 1 do n) [-]

j – licznik węzłów siatki w kierunku y (od 1 do m) [-]

Przykład 1 – równanie falowe

Kolejnym krokiem będzie wyznaczenie współrzędnych węzłów siatki:



Współrzędne siatki można zapisać w jednej tablicy dwuwymiarowej

$$s(i,j)$$

lub dwóch wektorach

$$s_x(i)$$

$$s_y(j)$$

Dla siatek ortogonalnych o stałych krokach dx i dy można skorzystać ze wzoru (przy założeniu, że węzły numerowane są od 1 do n):

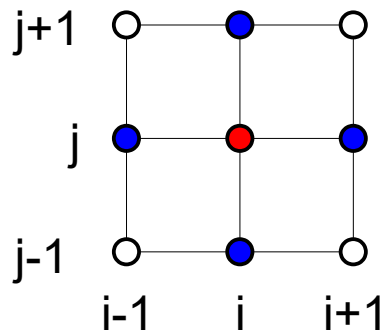
$$s_x = (i-1)dx$$

$$s_y = (j-1)dy$$

W takim ujęciu lewy dolny róg obszaru będzie stanowił punkt o współrzędnych $(0,0)$.

Przykład 1 – równanie falowe

Po zapisaniu przestrzeni obliczeniowej należy zamienić wzory różniczkowe na różnicowe – są to tzw. analogi różnicowe:



równanie falowe:

$$\frac{\partial^2 U(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U(x, y, t)}{\partial y^2} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 U(x, y, t)}{\partial t^2}$$

analog różnicowy:

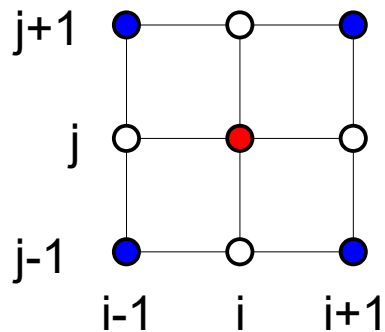
$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \Delta_{x(5a)} U = \frac{U_{i+1,j}^n - 2 \cdot U_{i,j}^n + U_{i-1,j}^n}{\Delta x^2}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \Delta_{y(5a)} U = \frac{U_{i,j+1}^n - 2 \cdot U_{i,j}^n + U_{i,j-1}^n}{\Delta y^2}$$

Analog 5-cio punktowy: wersja A.

Przykład 1 – równanie falowe

Po zapisaniu przestrzeni obliczeniowej należy zamienić wzory różniczkowe na różnicowe – są to tzw. analogi różnicowe:



równanie falowe:

$$\frac{\partial^2 U(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U(x, y, t)}{\partial y^2} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 U(x, y, t)}{\partial t^2}$$

analog różnicowy:

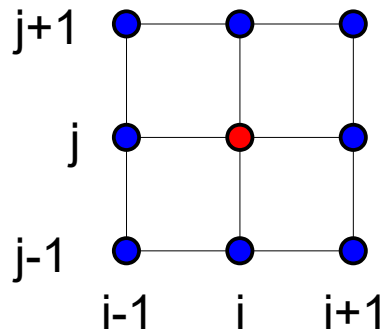
$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \Delta_{x(5b)} U = \frac{U_{i+1, j+1}^n - 2 \cdot U_{i, j}^n + U_{i-1, j-1}^n}{\Delta x^2}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \Delta_{y(5b)} U = \frac{U_{i+1, j+1}^n - 2 \cdot U_{i, j}^n + U_{i-1, j-1}^n}{\Delta y^2}$$

Analog 5-cio punktowy: wersja B.

Przykład 1 – równanie falowe

Po zapisaniu przestrzeni obliczeniowej należy zamienić wzory różniczkowe na różnicowe – są to tzw. analogi różnicowe:



równanie falowe:

$$\frac{\partial^2 U(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U(x, y, t)}{\partial y^2} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 U(x, y, t)}{\partial t^2}$$

analog różnicowy:

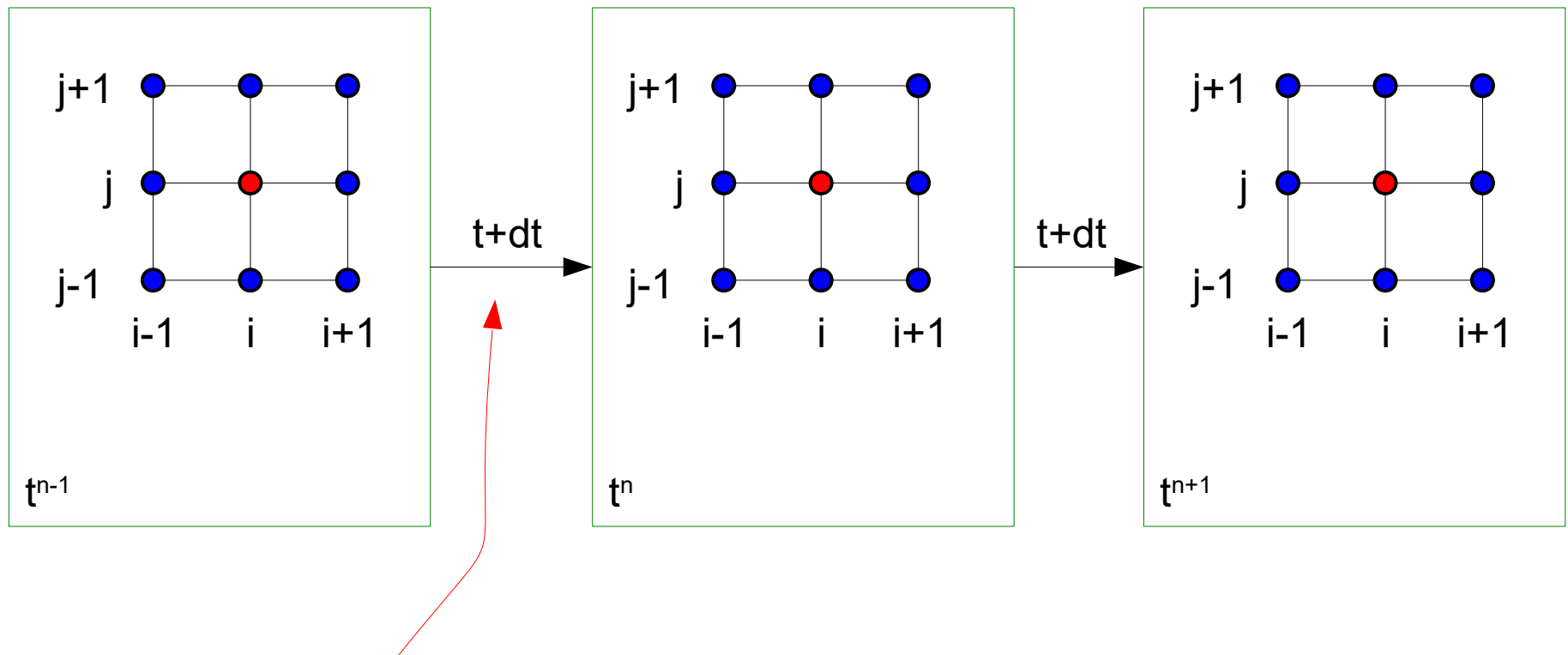
$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \Delta_{x(9)} U = (1 - \epsilon) \cdot \Delta_{x(5a)} U + \epsilon \cdot \Delta_{x(5b)} U$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \Delta_{y(9)} U = (1 - \epsilon) \cdot \Delta_{y(5a)} U + \epsilon \cdot \Delta_{y(5b)} U$$

Analog 9-cio punktowy: jest to kombinacja wersji poprzednich z użyciem parametru wagowego ϵ .

Przykład 1 – równanie falowe

Po zdefiniowaniu metod obliczania pochodnej przestrzennej należy określić sposób wyliczania kolejnych poziomów czasowych.

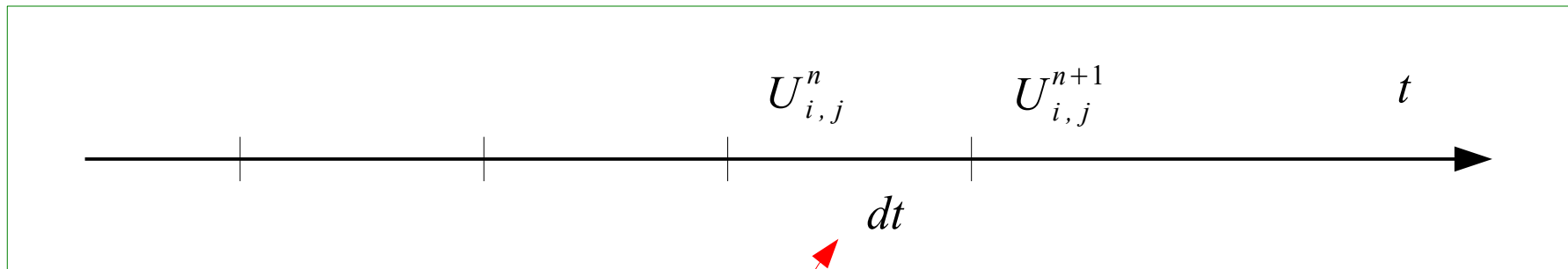


Analog 9-cio punktowy: jest to kombinacja wersji poprzednich z użyciem parametru wagowego ε .

Przykład 1 – równanie falowe

Najprostszą metodą dyskretyzacji w czasie jest schemat Eulera. W tym przypadku będzie on wystarczający.

$$U_{i,j}^{n+1} = U_{i,j}^n + \Delta U \cdot dt$$



n – numer bieżącej iteracji [-]

$n+1$ – numer kolejnej iteracji [-]

dt – krok czasowy [s]

Istotną kwestią będzie tu poprawne zdefiniowanie kroku czasowego, zapewniającego stabilność obliczeń.

Przykład 1 – równanie falowe

Przykład implementacji w języku Fortran:

50

!obliczenie przyspieszenia katowego:

continue

do i=2, nx-1

do j=2, ny-1

 v(i,j)=v(i,j)+c*((1-eps)*(u(i+1,j)+u(i-1,j)+u(i,j-1)+u(i,j+1)) - &
 4*u(i,j)+eps*(u(i+1,j+1)+u(i+1,j-1)+u(i-1,j-1)+u(i-1,j+1)) - &
 4*u(i,j))*dt/(dx*dx)

end do

end do

!obliczenie wychylenia:

do i=2, nx-1

do j=2, ny-1

 u(i,j)=u(i,j)+v(i,j)*dt

end do

end do

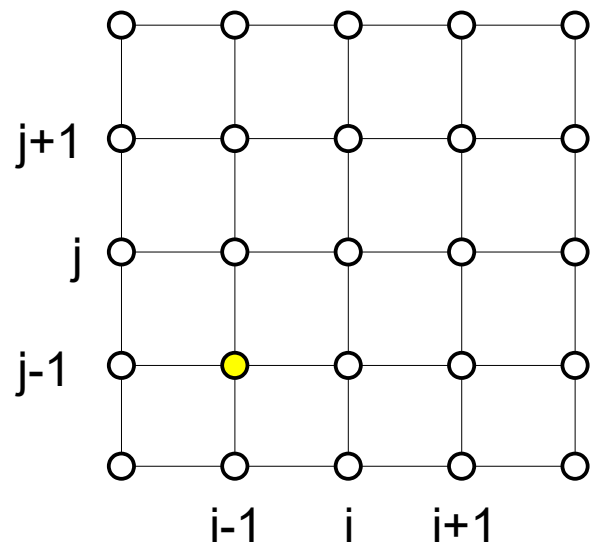
$$U_{i,j}^{n+1} = U_{i,j}^n + \Delta U \cdot dt$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \Delta_{x(9)} U = (1-\epsilon) \cdot \Delta_{x(5a)} U + \epsilon \cdot \Delta_{x(5b)} U$$

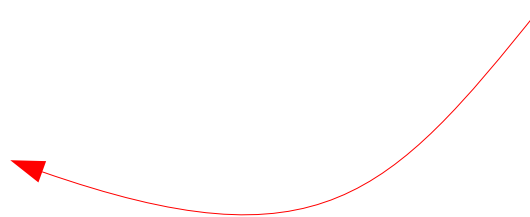
$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \Delta_{y(9)} U = (1-\epsilon) \cdot \Delta_{y(5a)} U + \epsilon \cdot \Delta_{y(5b)} U$$

Przykład 1 – równanie falowe

Aby zaobserwować działanie równania falowego, należy określić pewne wychylenie źródłowe, wymuszające ruch falowy (bez tego nic się nie będzie w układzie zmieniać). Realizuje się to w algorytmie poprzez przypisanie niezerowego wychylenia dowolnym węzle (lub węzłach) siatki obliczeniowej. Wychylenie to może być zadane na stałe, lub też może się zmieniać w czasie i w przestrzeni.

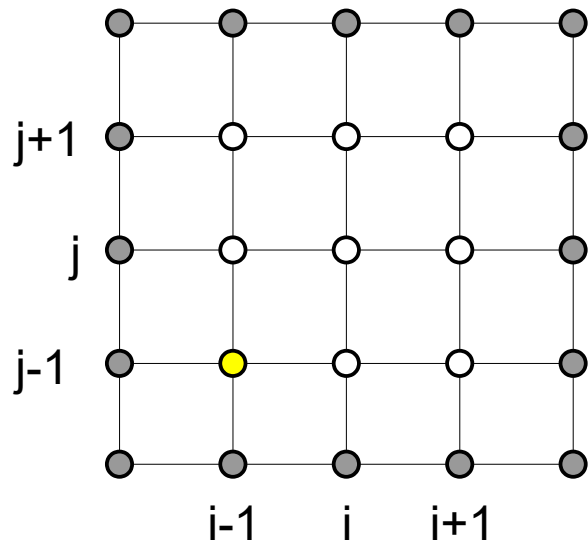


Czynniki zmieniające wartość wewnątrz węzła (lub komórki) są często nazywane źródłem.

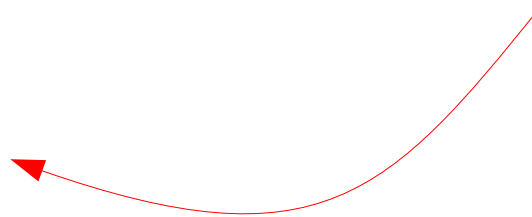


Przykład 1 – równanie falowe

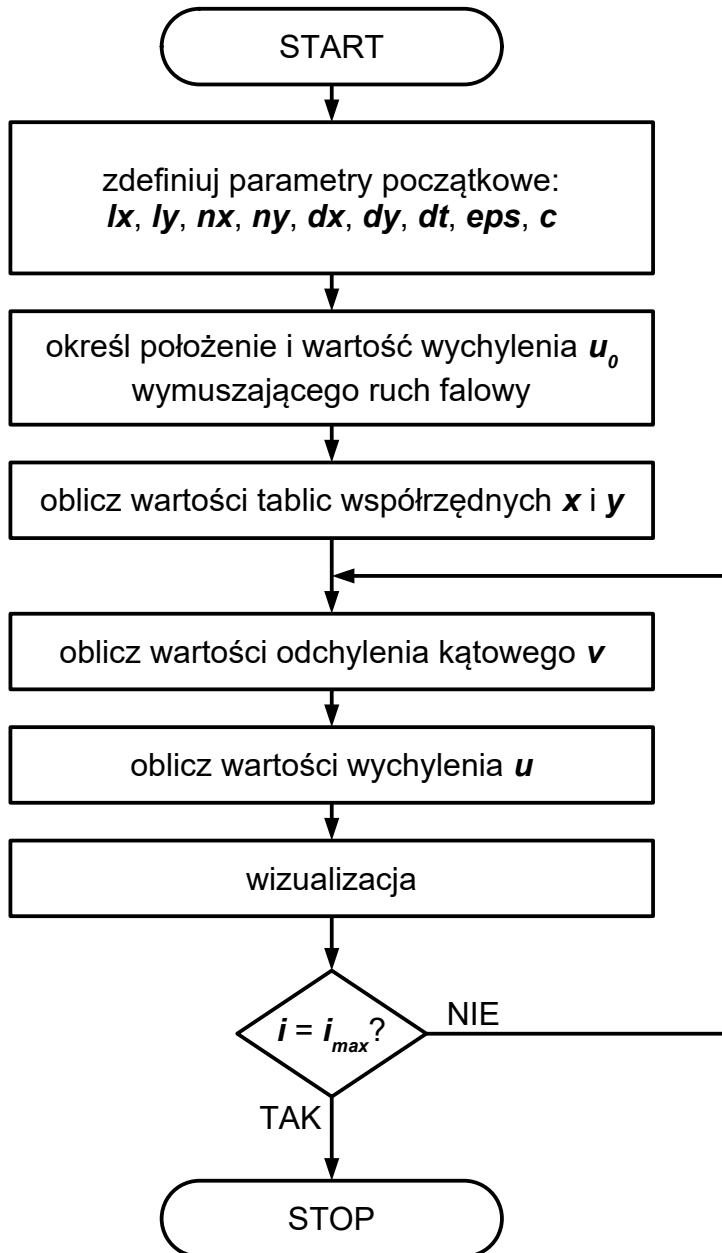
Ostatnim elementem definicji modelu symulacyjnego będzie określenie zachowania się fali po dojściu do brzegów obszaru obliczeniowego. W tej części można również wprowadzić mechanizm umożliwiający definiowanie „przeszkód” we wnętrzu obszaru obliczeniowego.



Definiowanie zachowania się fali na granicach obszaru obliczeniowego (granicach zewnętrznych lub też przeszkodach wewnętrznych) stanowi tu warunek brzegowy.



Przykład 1 – równanie falowe



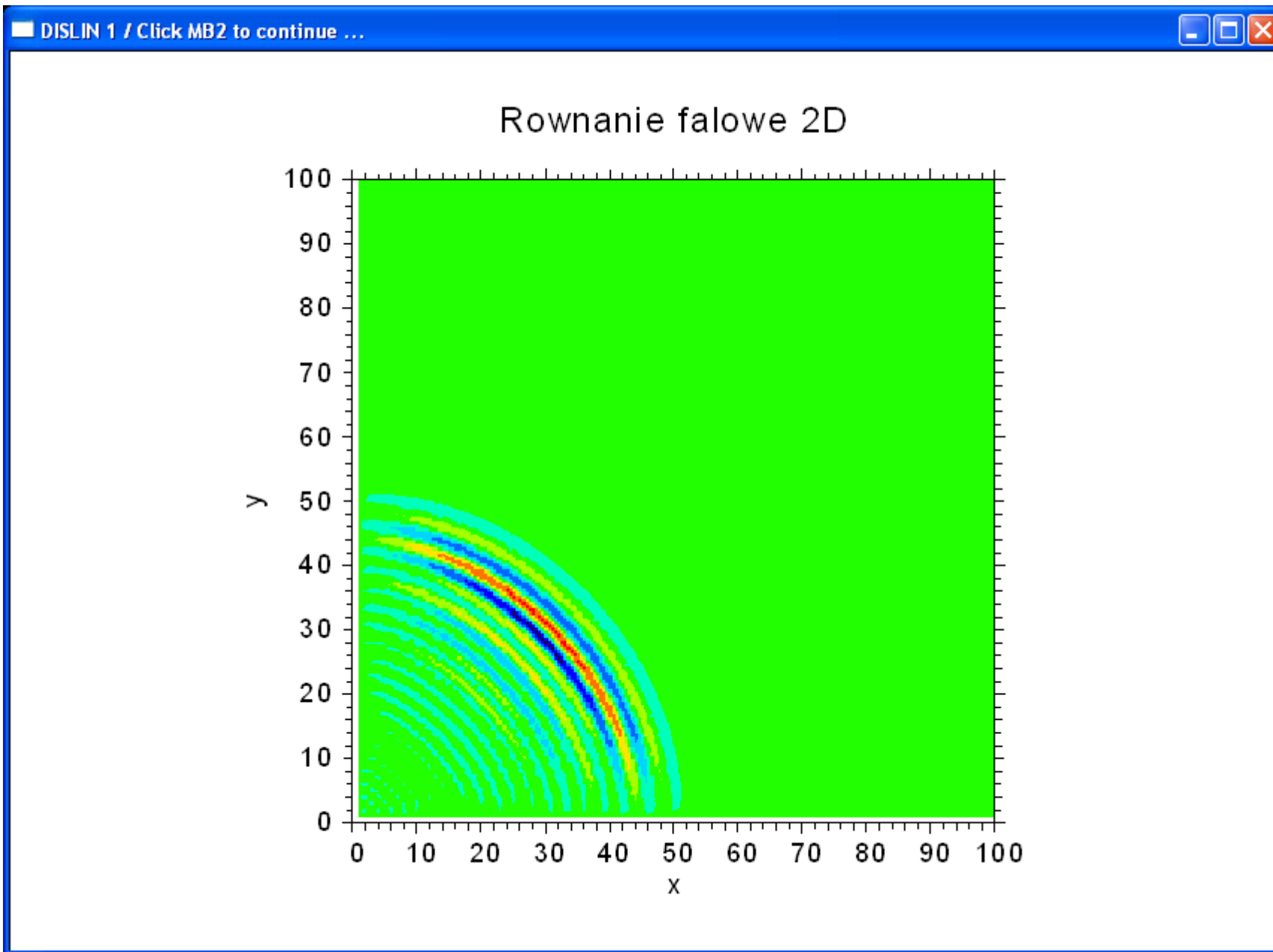
Ogólna wersja algorytmu programu rozwiązującego równanie falowe.

Przykład rozwiązania
(następne slajdy)



główna pętla obliczeniowa
po przestrzeni i czasie

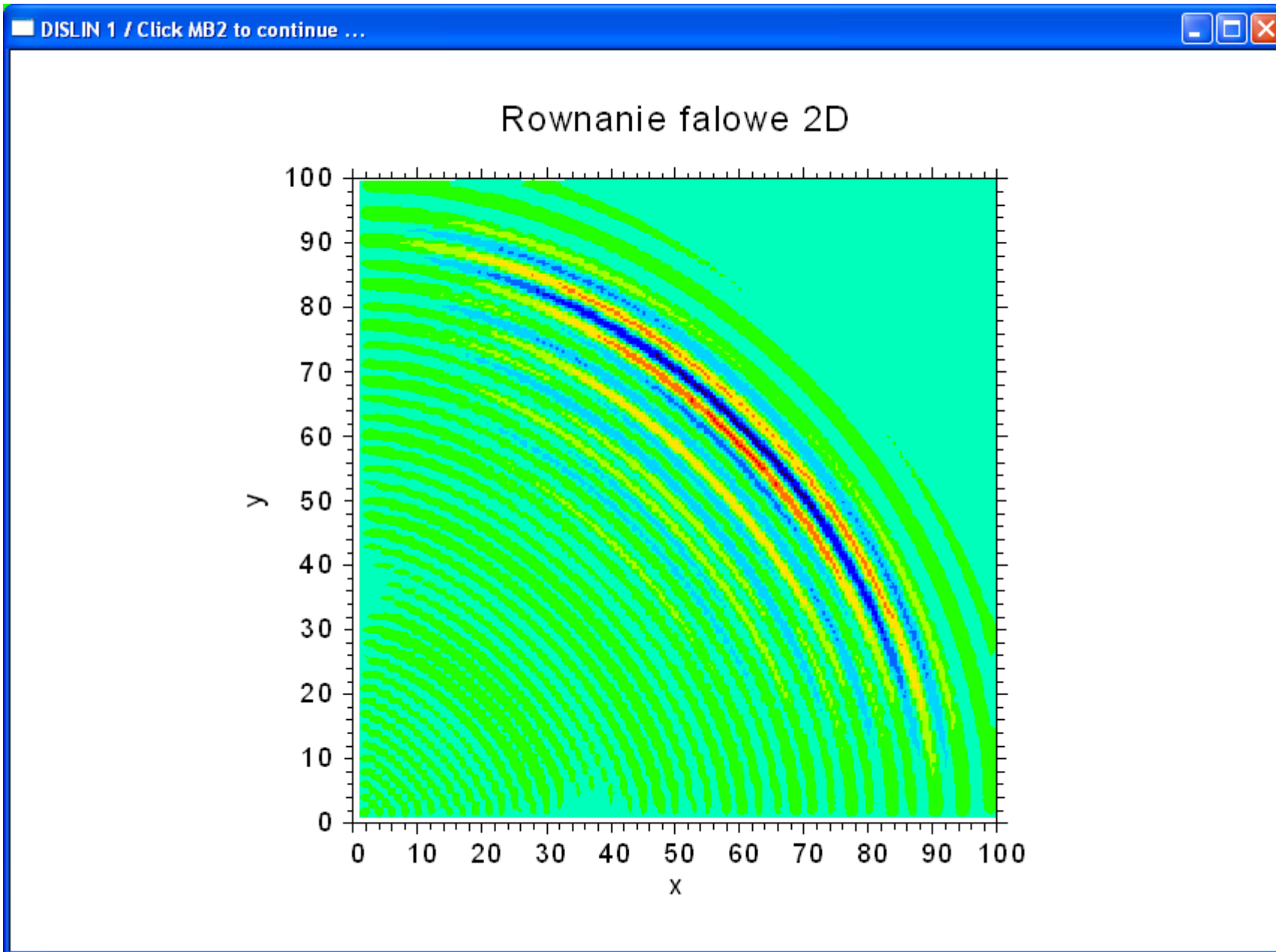
Przykład 1 – równanie falowe



Przykład 1
(DISLIN)

czas t_1

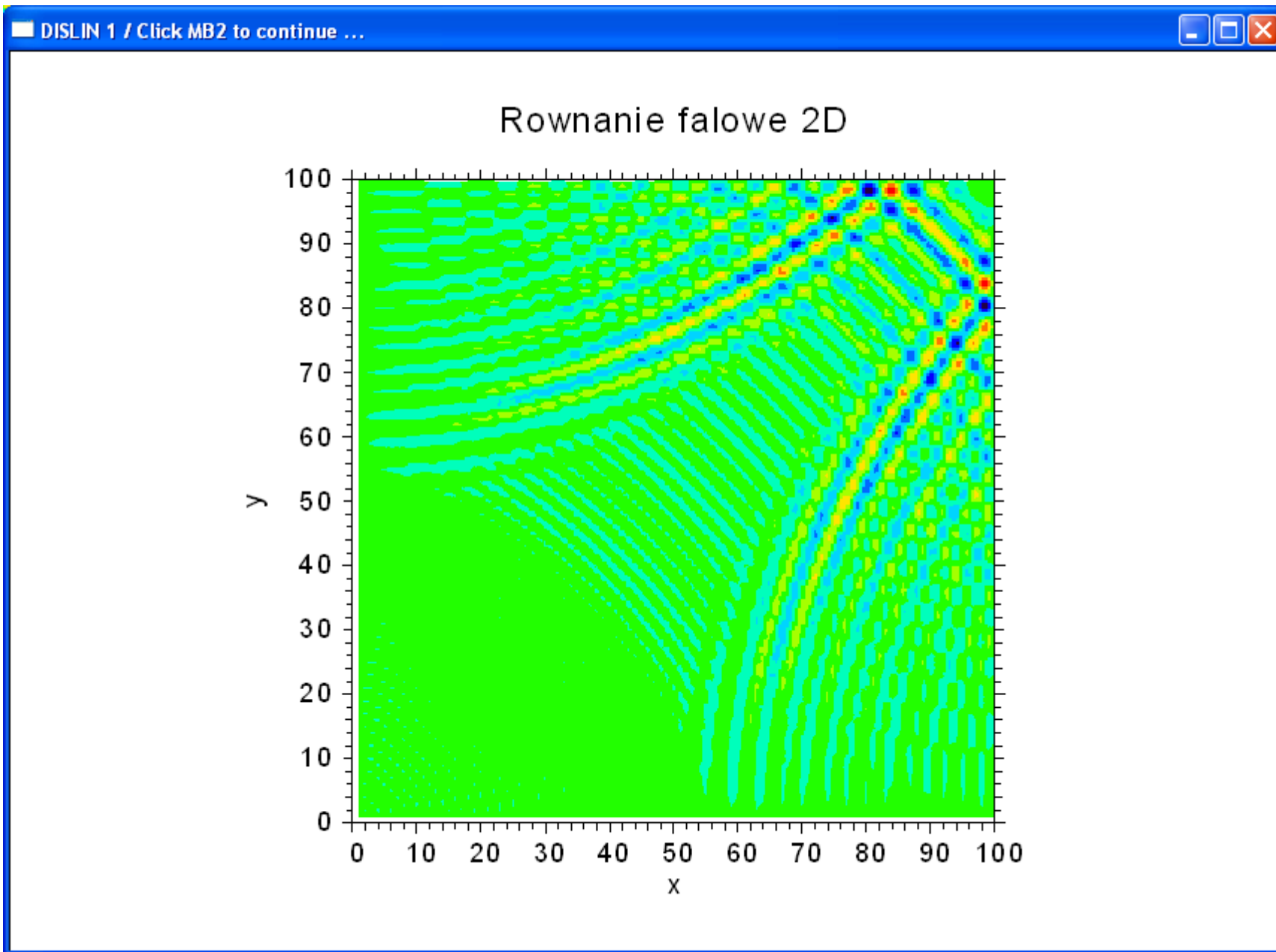
Przykład 1 – równanie falowe



Przykład 1
(DISLIN)

czas t_2

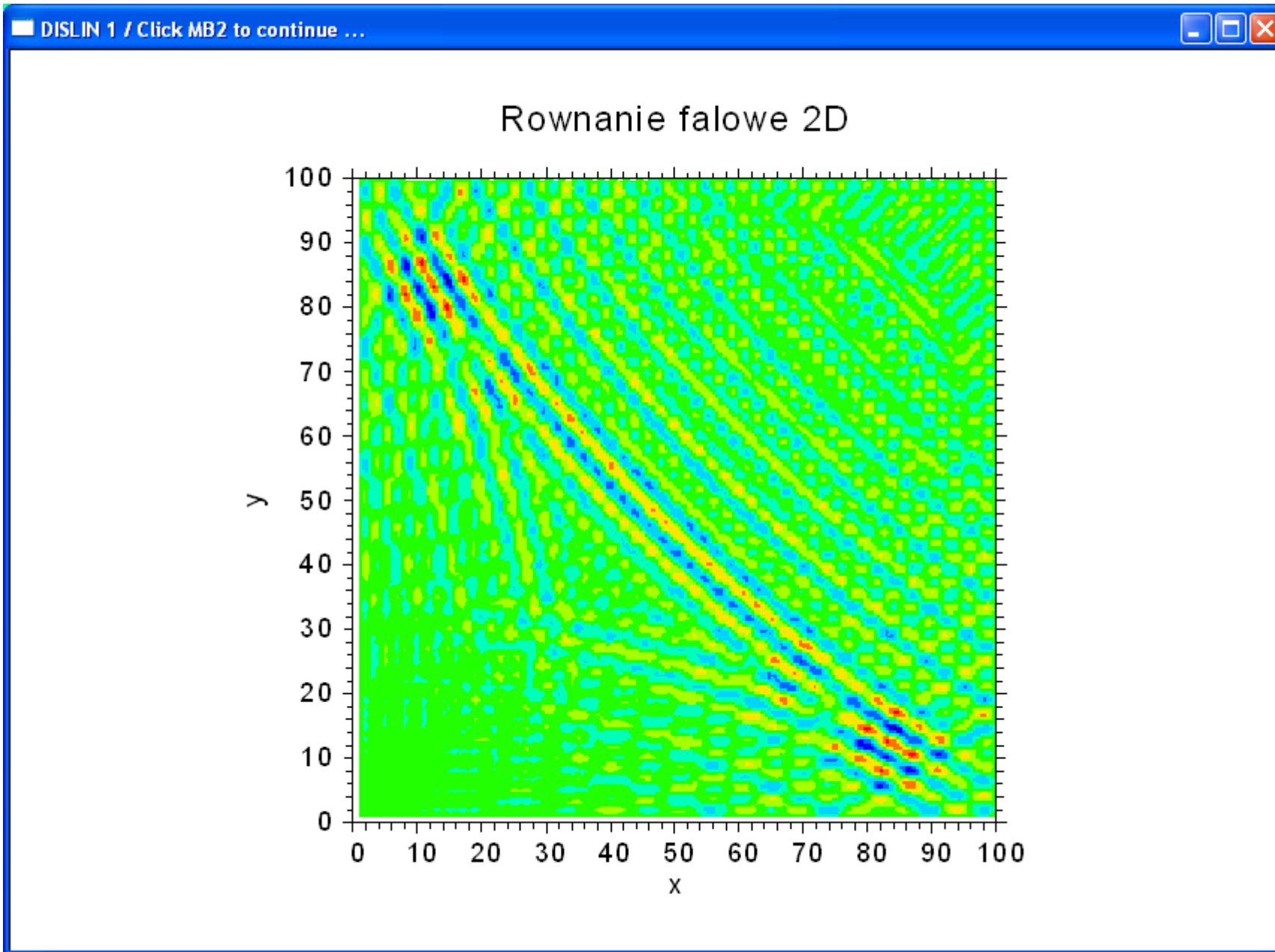
Przykład 1 – równanie falowe



Przykład 1
(DISLIN)

czas t_3

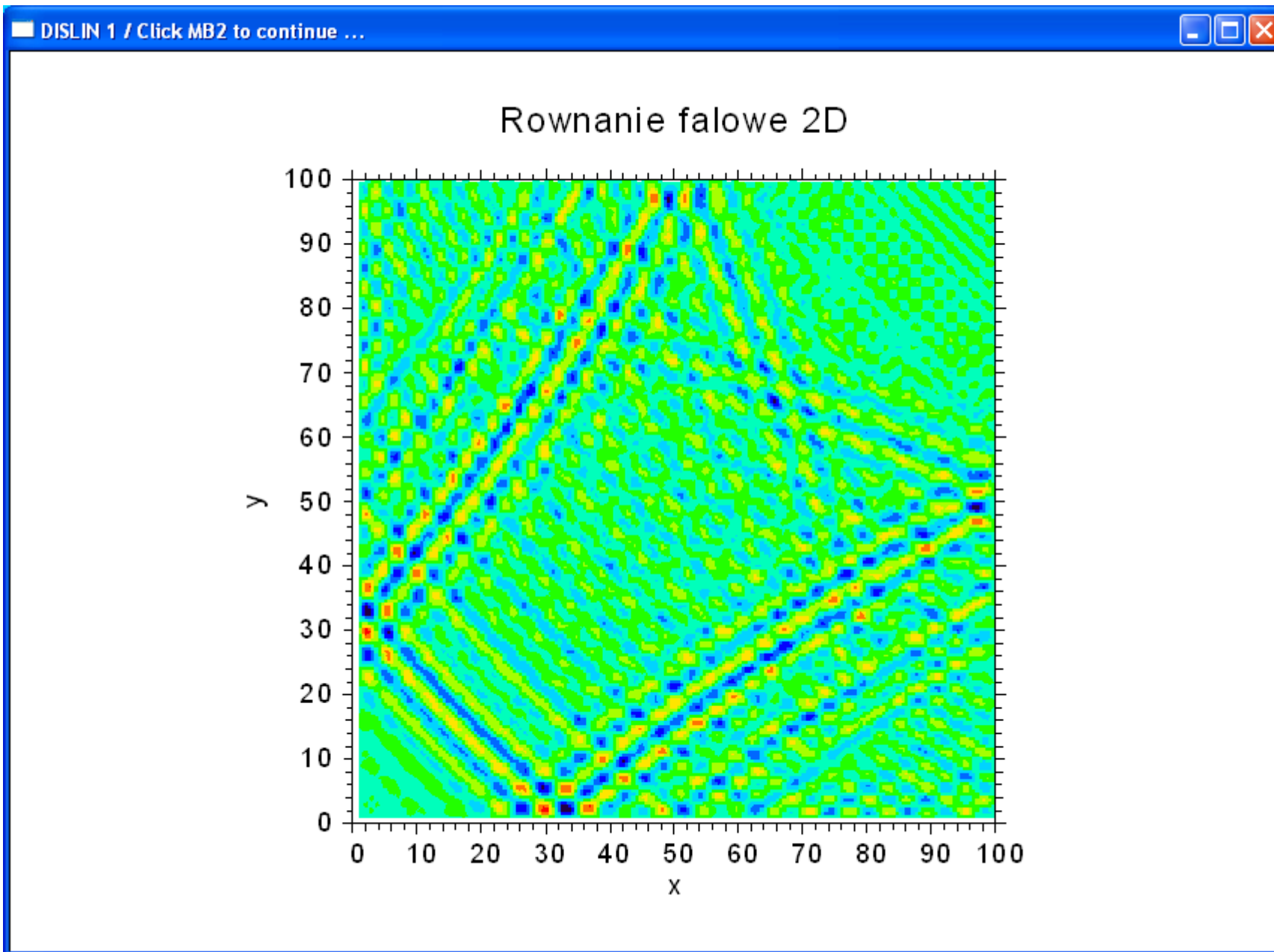
Przykład 1 – równanie falowe



Przykład 1
(DISLIN)

czas t_4

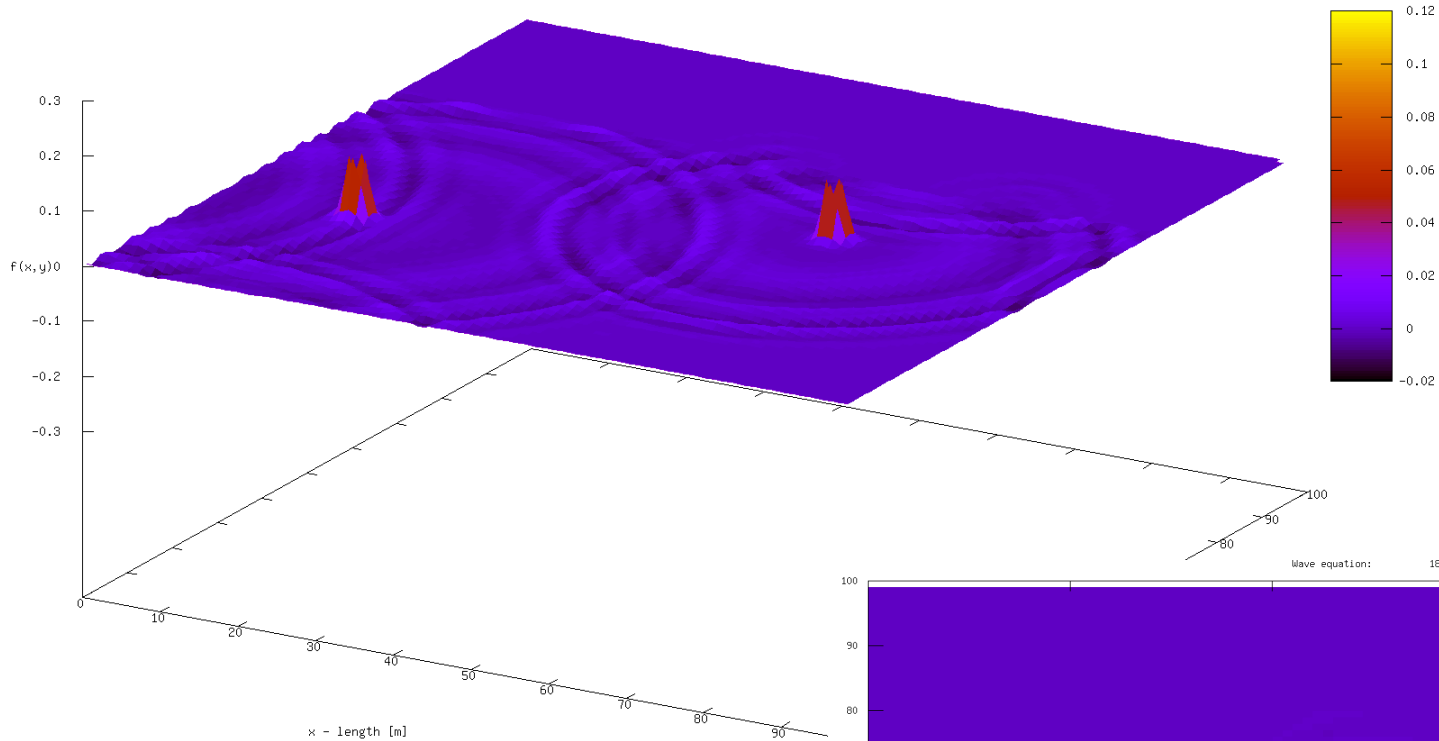
Przykład 1 – równanie falowe



Przykład 1
(DISLIN)

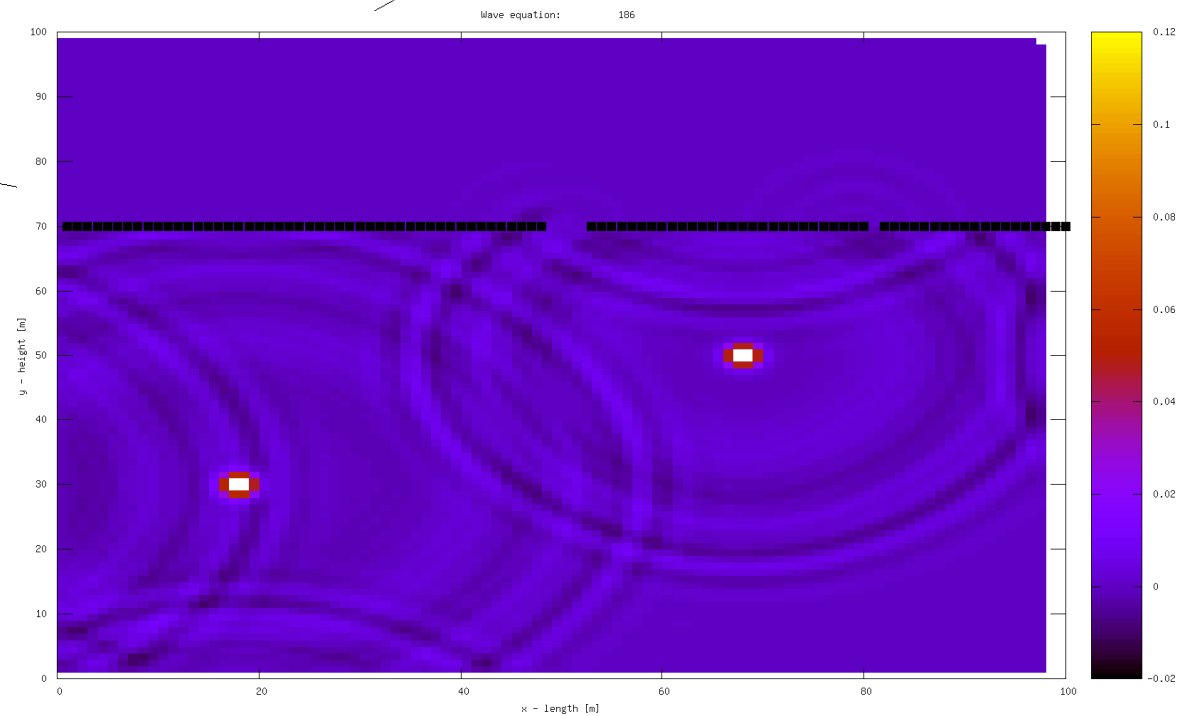
czas t_5

Przykład 1 – równanie falowe

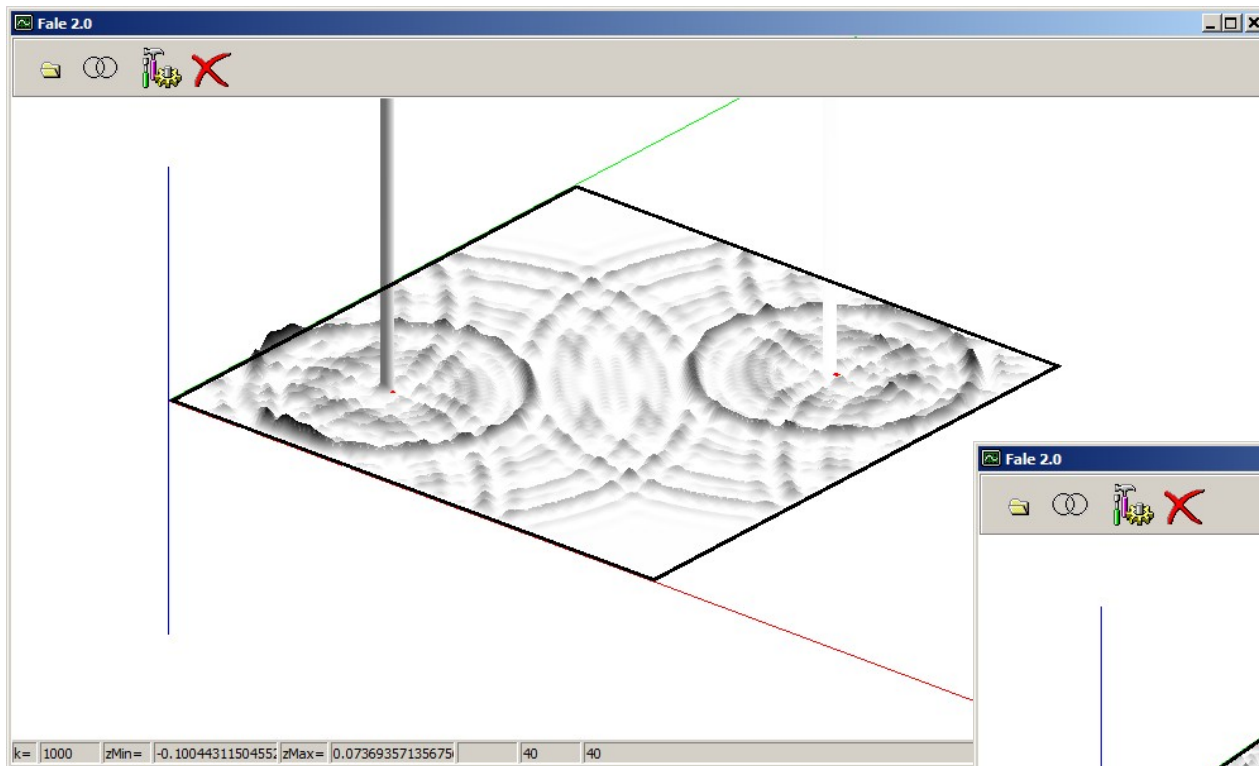


Przykład 1
(Gnuplot)

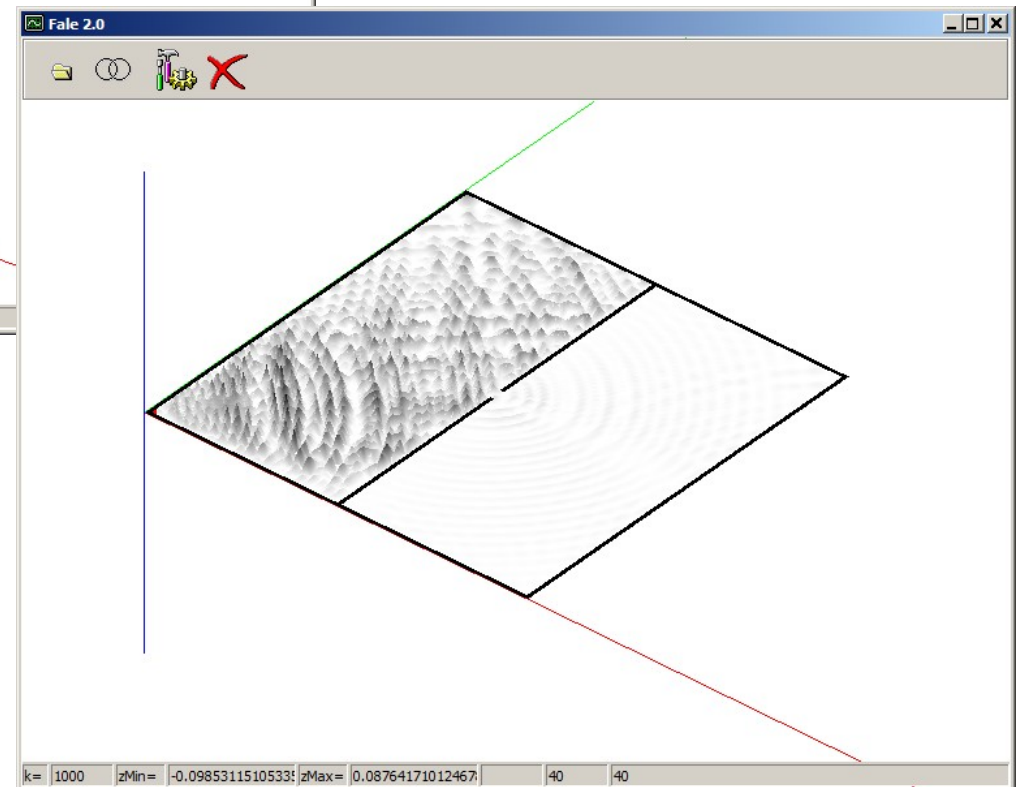
iteracja 186



Przykład 1 – równanie falowe



Przykład 3
(Delphi + OpenGL)



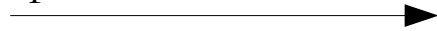
Przykład 2 – równanie dyfuzji

Jeżeli strumień bilansowanej wielkości dyfuzyjnej jest proporcjonalny do jej gradientu (gdzie współczynnikiem proporcjonalności jest α), to:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \operatorname{div}(-\alpha \cdot \nabla \Phi) = 0 \quad \text{lub} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \alpha \cdot \nabla^2 \Phi = 0$$

interpretacja fizyczna:

prawa Fouriera



$$\vec{q}_T = -\lambda \cdot \nabla T$$



$$\frac{\partial T}{\partial t} - \lambda \cdot \nabla^2 T = 0$$

prawa Ficka



$$\vec{j}_C = -D \cdot \nabla C$$



$$\frac{\partial C}{\partial t} - D \cdot \nabla^2 C = 0$$

...



Przykład 2 – równanie dyfuzji

Równanie dyfuzji termicznej – równanie różniczkowe cząstkowe opisujące przewodzenie ciepła (jest to jeden z prostych mechanizmów przekazywania ciepła):

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\lambda}{c_p \rho} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$$

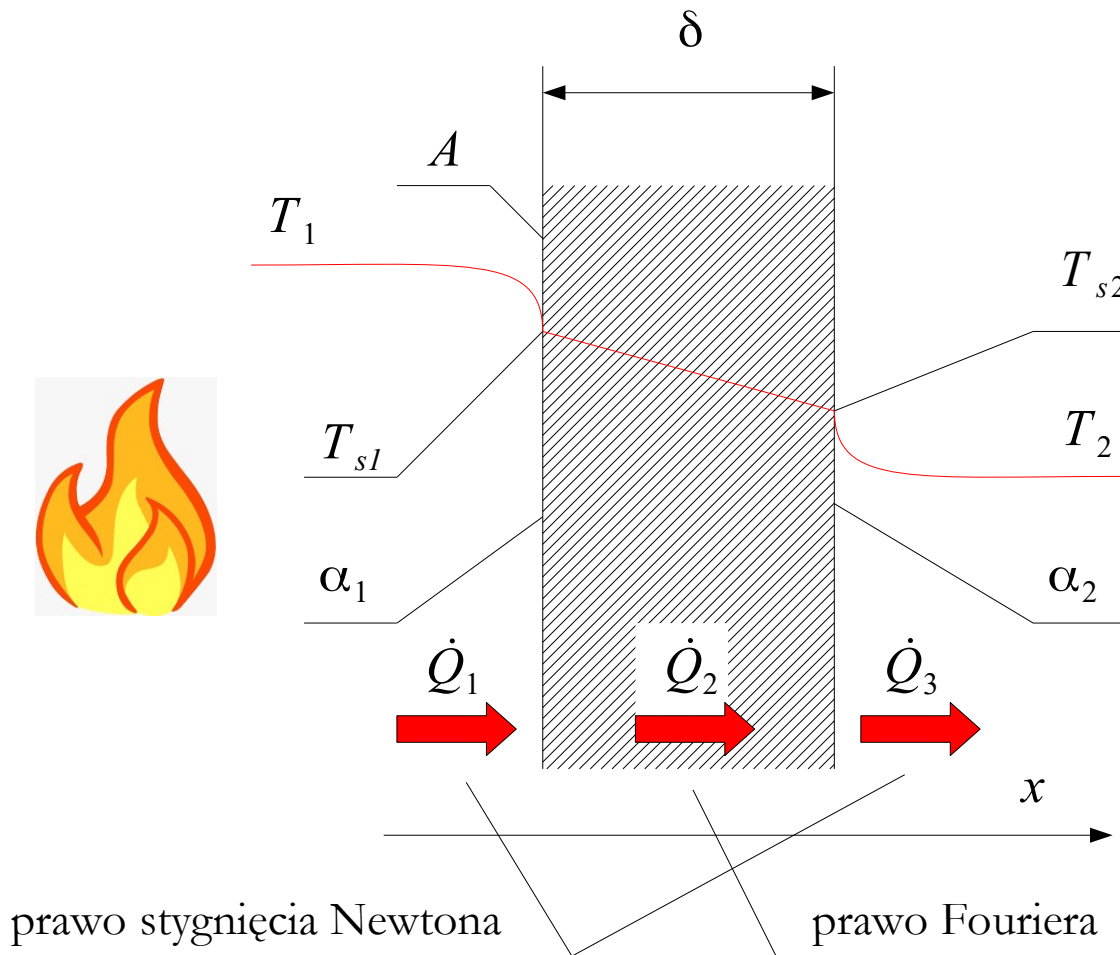
T	– temperatura [K]
t	– czas [s]
λ	– współczynnik przewodzenia ciepła [W/(m·K)]
c_p	– ciepło właściwe [J/(kg·K)]
ρ	– gęstość [kg/m ³]
x	– współrzędna [m]

Przykład 2 – równanie dyfuzji



Przykład układu, w którym występuje przewodzenie ciepła

Przykład 2 – równanie dyfuzji



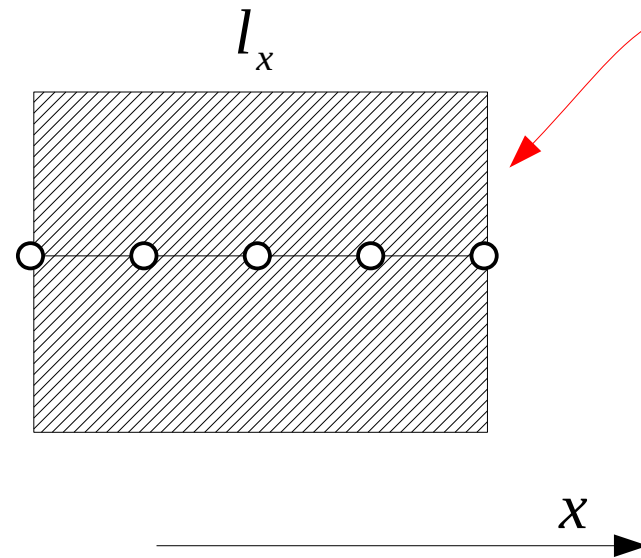
Rozważmy niestacjonarny przepływ ciepła przez jednowarstwową ściankę płaską.

Opis sytuacji:

Po lewej stronie wybucha ogień, a ciepło przenosi się przez ścianę z lewej strony na prawą.

Przykład 2 – równanie dyfuzji

Przed przystąpieniem do generacji siatki należy określić rozmiary obszaru obliczeniowego (szerokość ściany):



W tym przypadku wystarczy siatka jednowymiarowa.

Krok przestrzenny wyniesie:

$$dx = \frac{l_x}{n_x}$$

l_x – długość obszaru w kierunku x [m]

n_x – liczba punktów siatki na kierunku x [-]

Przykład 2 – równanie dyfuzji

Po utworzeniu analogu różnicowego (druga pochodna, schemat centralny) i schematu Eulera otrzyma się:

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\lambda}{c_p \rho} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \quad T_j^{n+1} = T_j^n + \frac{\lambda}{c_p \rho} \frac{(T_{j-1}^n - 2T_j^n + T_{j+1}^n)}{(\Delta x)^2} \Delta t$$

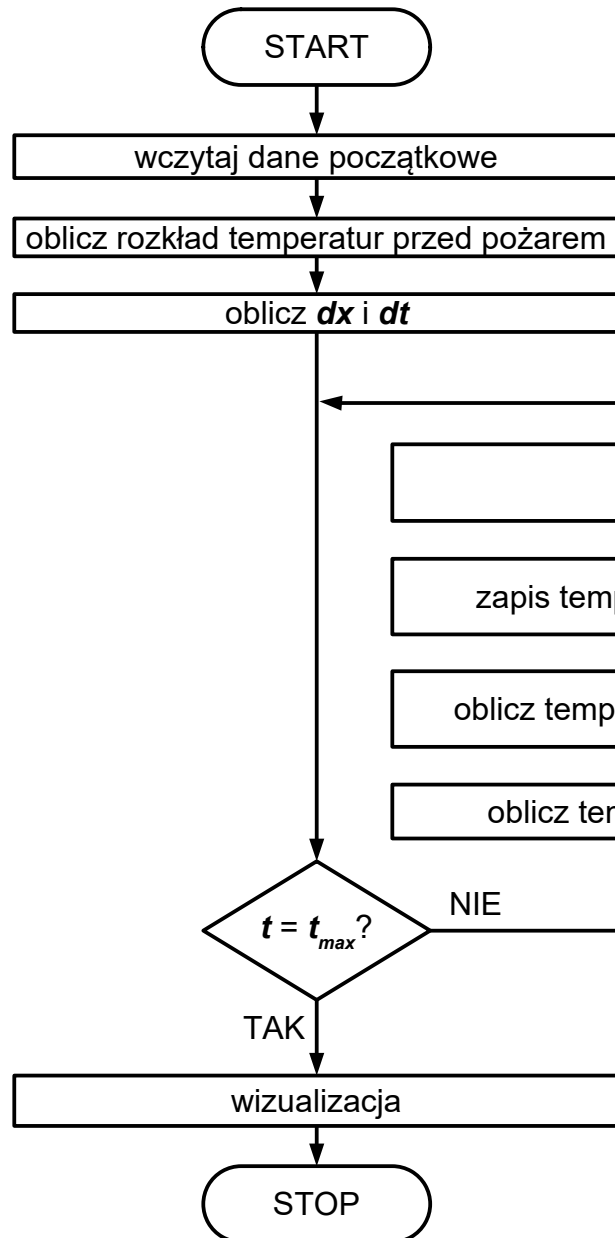
Powyższy wzór różnicowy dotyczy węzłów od 2 do N-1.
Wartości w węzłach skrajnych 1 i N,
wyznaczane są z bilansu ciepła.

T_l - temperatura z lewej strony ściany (war. brzegowy),
 T_p - temperatura z prawej strony ściany (war. brzegowy),
 α - współczynnik przyjmowania ciepła.

$$T_1^{n+1} = \frac{\lambda T_2^{n+1} + \alpha \Delta x T_l}{\alpha \Delta x + \lambda}$$
$$T_N^{n+1} = \frac{\lambda T_{N-1}^{n+1} + \alpha \Delta x T_p}{\alpha \Delta x + \lambda}$$

Indeks górny n oznacza tu poziom czasowy,
indeks dolny N numer węzła siatki.

Przykład 2 – równanie dyfuzji



Ogólna wersja algorytmu programu do rozwiązywania równania dyfuzji termicznej.

główna pętla obliczeniowa po przestrzeni i czasie

Przykład rozwiązania (następne slajdy)



Przykład 2 – równanie dyfuzji

Przykład implementacji w języku Fortran:

```
do j=1, n_max                !petla po wezlach:

    !wartosc temperatury w wezlach wewnetrznych:
    do i=2, n-1
        t_nowe(i)=t_stare(i)+c*( t_stare(i-1)-2.0*t_stare(i)+t_stare(i+1))
    end do
    !wartosc temperatury na brzegach:
    t_nowe(1)=(alfa*dx*t_l+lambda*t_stare(2))/(lambda+alfa*dx)
    t_nowe(n)=(alfa*dx*t_p+lambda*t_stare(n-1))/(lambda+alfa*dx)
    !przygotowanie danych do nowego kroku:
    do i=1,n
        t_stare(i)=t_nowe(i)
    end do
    !obliczenie aktualnego czasu:
    t=t+dt

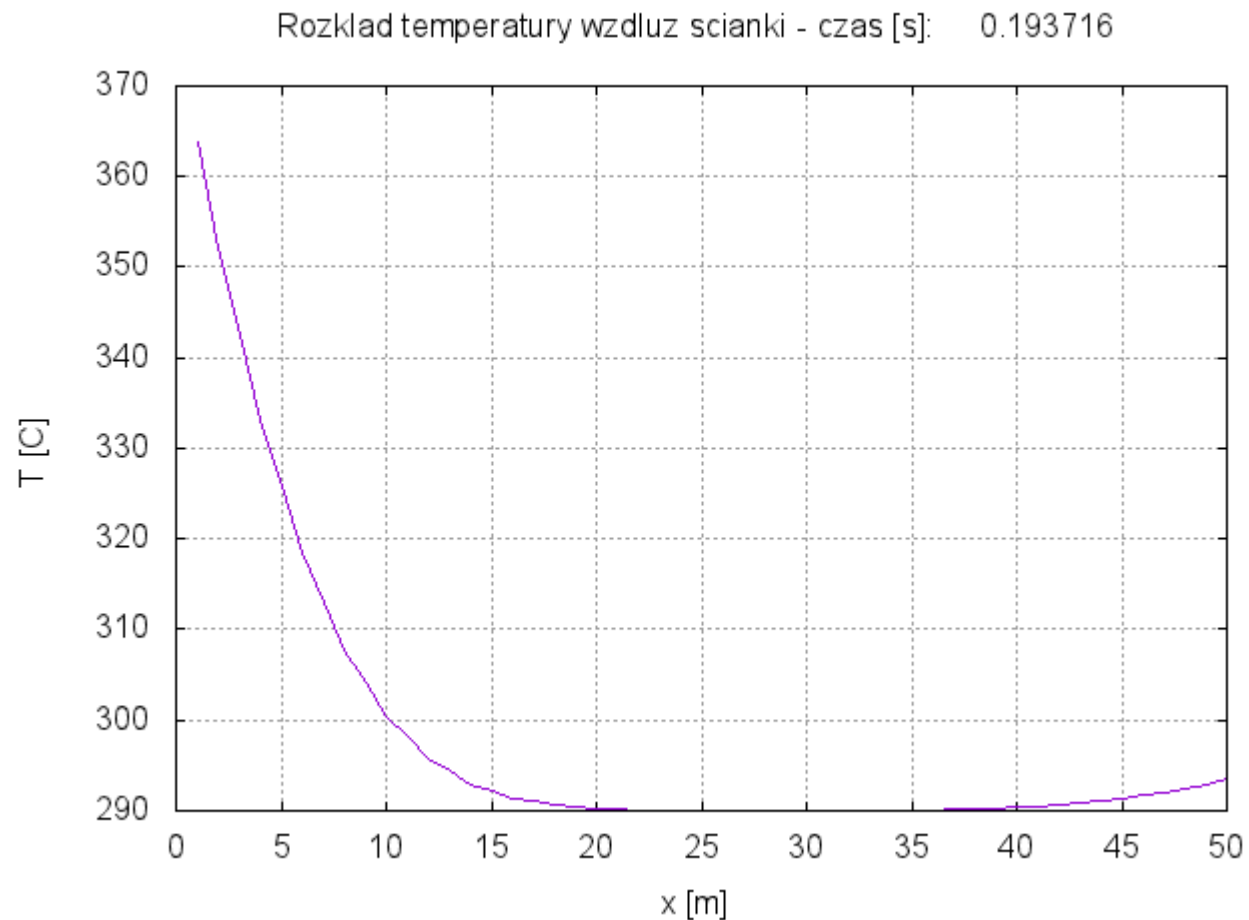
end do
```

$$T_j^{n+1} = T_j^n + \frac{\lambda}{c_p \rho} \frac{(T_{j-1}^n - 2T_j^n + T_{j+1}^n)}{(\Delta x)^2} \Delta t$$

$$T_1^{n+1} = \frac{\lambda T_2^{n+1} + \alpha \Delta x T_l}{\alpha \Delta x + \lambda}$$

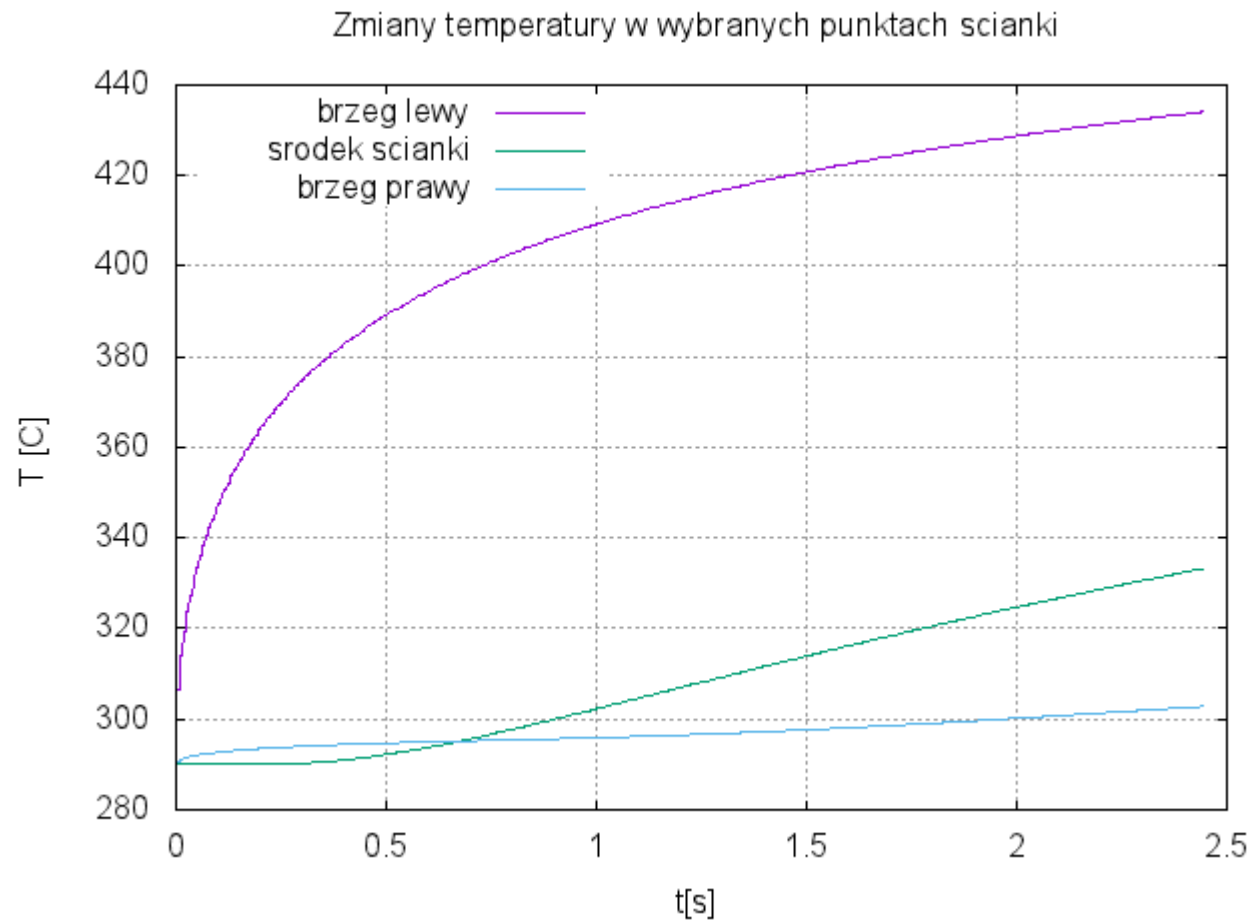
$$T_N^{n+1} = \frac{\lambda T_{N-1}^{n+1} + \alpha \Delta x T_p}{\alpha \Delta x + \lambda}$$

Przykład 2 – równanie dyfuzji



Profil temperatury wzdłuż ściany w wybranej chwili czasowej

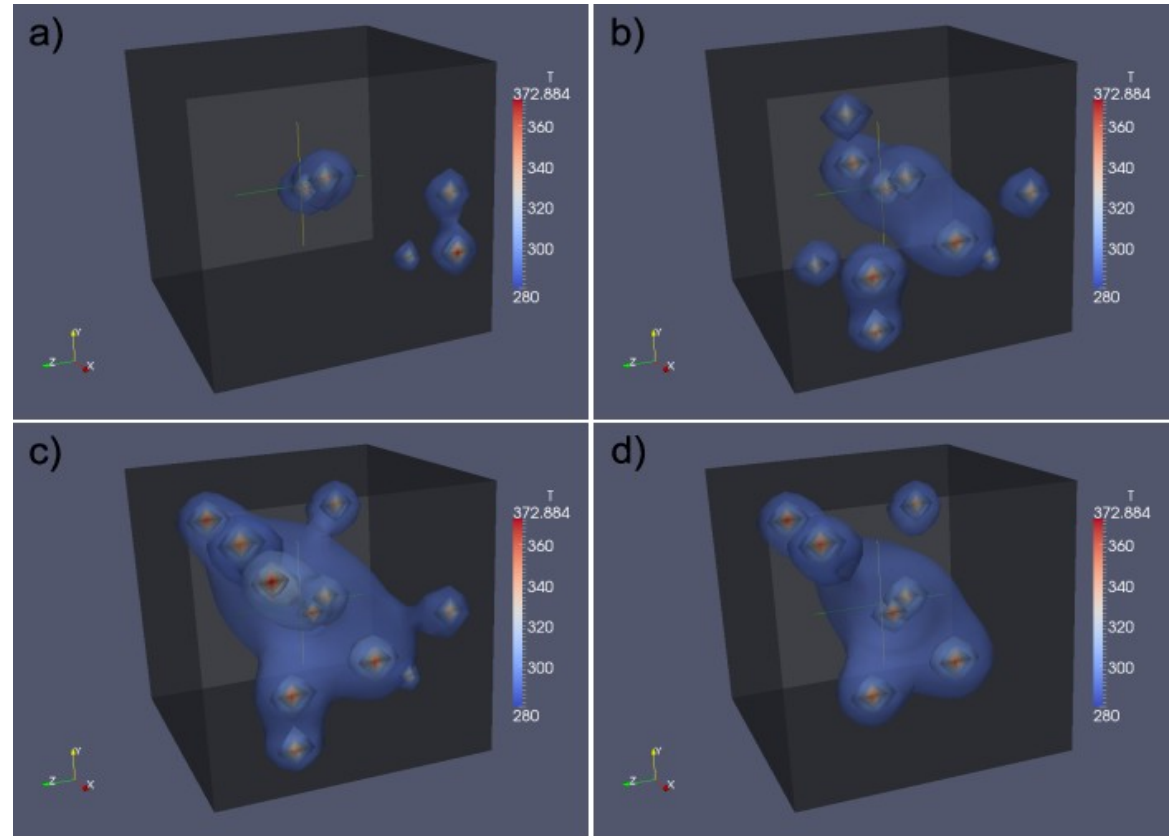
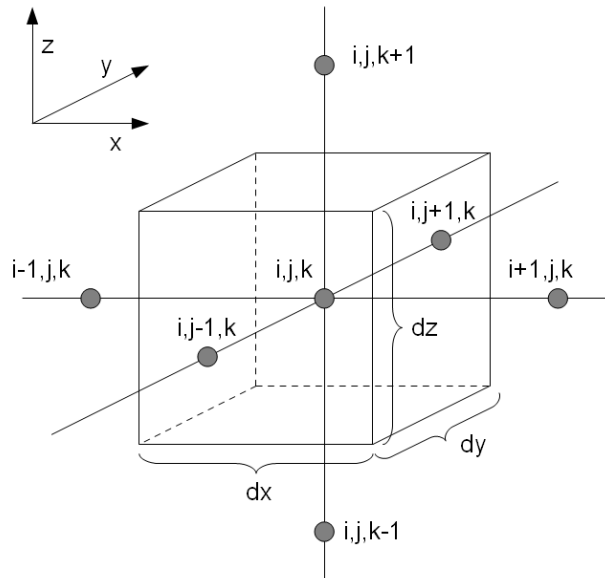
Przykład 2 – równanie dyfuzji



Wykres zmian temperatury w charakterystycznych punktach ściany

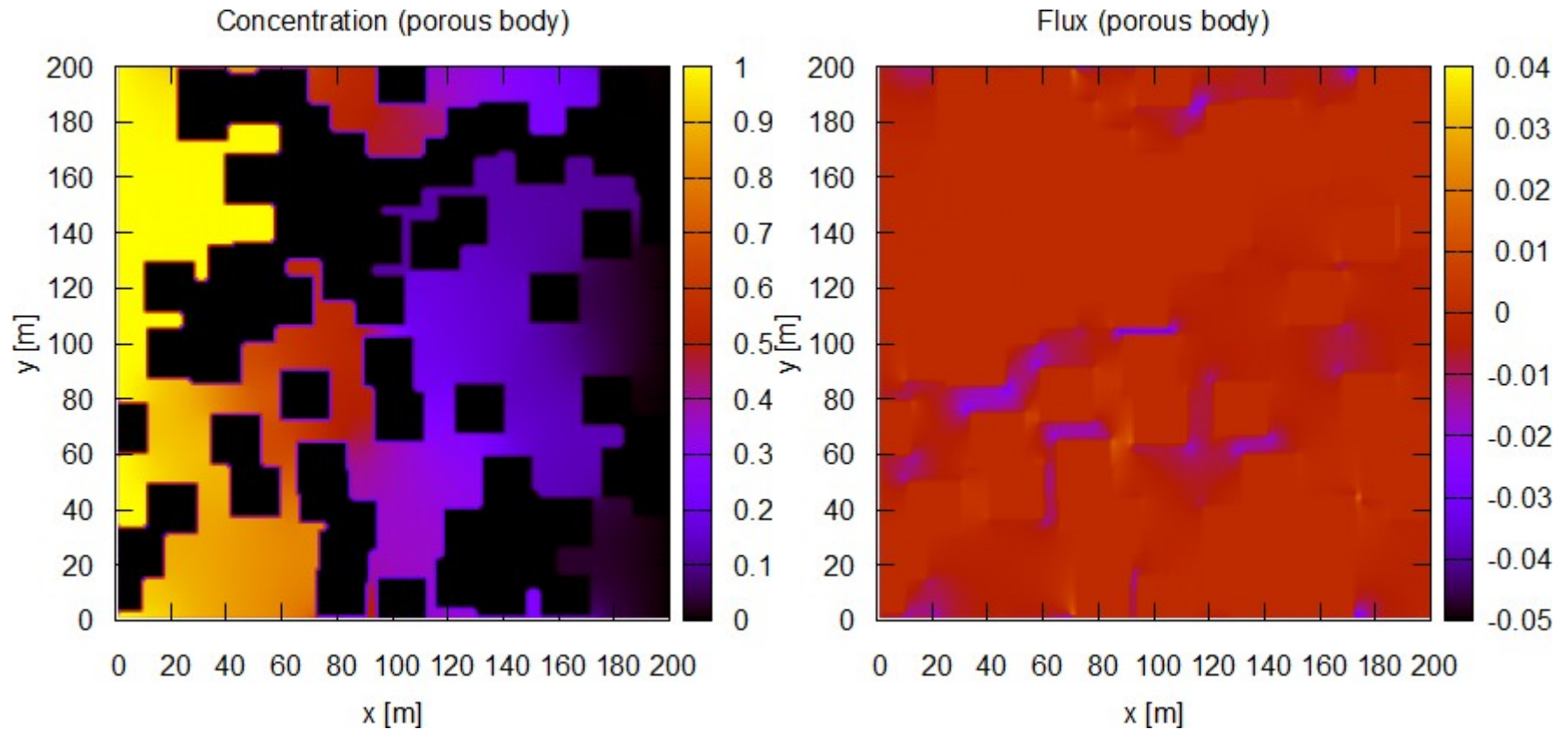
Przykład 2 – równanie dyfuzji

Przykład rozwiązania równania dyfuzji termicznej w przestrzeni 3D.



$$T_{i,j,k}^{n+1} = T_{i,j,k}^n + \alpha \left[\frac{T_{i+1,j,k}^n - 2T_{i,j,k}^n + T_{i-1,j,k}^n}{dx^2} + \frac{T_{i,j+1,k}^n - 2T_{i,j,k}^n + T_{i,j-1,k}^n}{dy^2} + \frac{T_{i,j,k+1}^n - 2T_{i,j,k}^n + T_{i,j,k-1}^n}{dz^2} \right] \Delta t$$

Przykład 2 – równanie dyfuzji



Przykład rozwiązania równania dyfuzji składnika w przestrzeni 3D.

Mechanizm rozwiązania równania jest dokładnie taki sam jak dla dyfuzji termicznej – zmienia się jedynie fizyczne znaczenie niektórych zmiennych.

Przykład 3 – równanie Naviera-Stokesa

Równanie Naviera-Stokesa – równanie różniczkowe cząstkowe opisujące ruch płynu lepkiego:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \vec{v}$$

\vec{v} – prędkość [m/s]

t – czas [s]

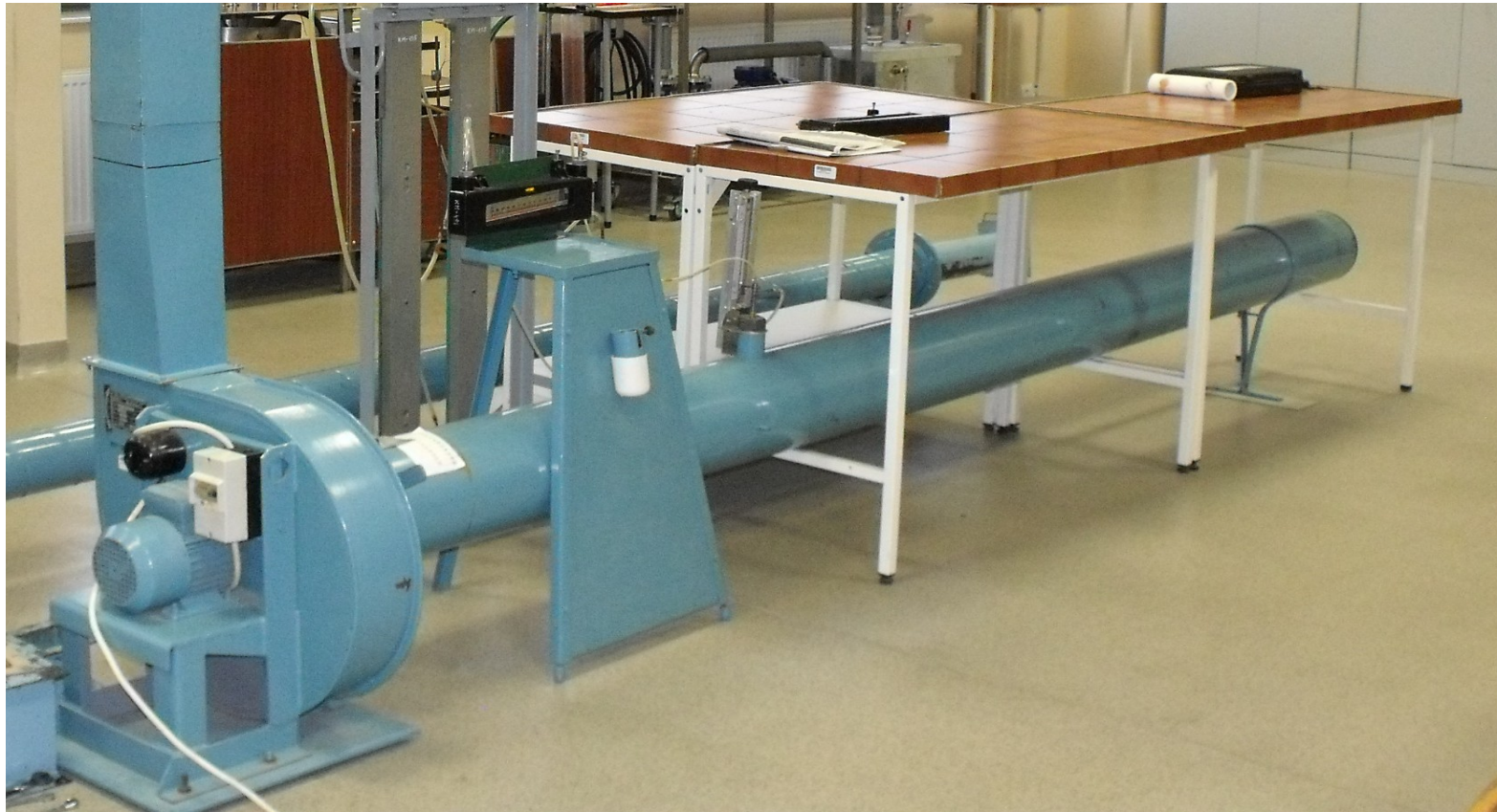
\vec{F} – wypadkowa sił masowych [N]

p – ciśnienie [Pa]

ρ – gęstość płynu [kg/m³]

μ – współczynnik lepkości dynamicznej [Pa·s]

Przykład 3 – równanie Naviera-Stokesa



Stanowisko (historyczne) do badania profilu prędkości w rurze kołowej

Przykład 3 – równanie Naviera-Stokesa

Założenia upraszczające:

- przepływ jednowymiarowy $v_y = v_z = 0$

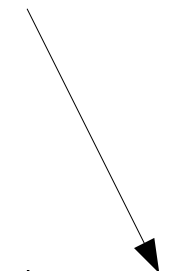
- przepływ ustalony $\frac{d\vec{v}}{dt} = 0$

- przepływ izotermiczny: $\mu = \text{const.}$

- płyn nieściśliwy: $\rho = \text{const.}$

- brak sił masowych: $\vec{F} = 0$

$$v_x = f(y)$$


$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \left(-\mu \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)$$

Przykład 3 – równanie Naviera-Stokesa

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \left(-\mu \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)$$

$$\mu = \max(\mu^m + \mu^t)$$

$$\mu^t = \mu^m \frac{\text{Re}}{\text{Re}_{\min}}$$

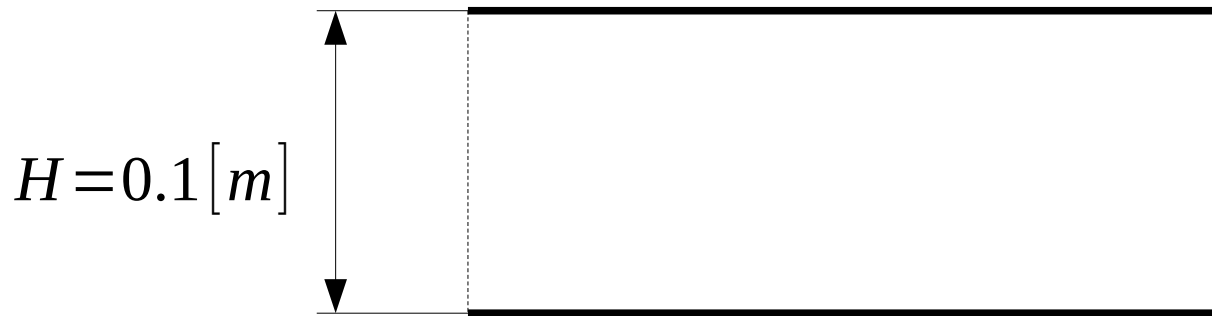
$$\text{Re} = \rho \frac{v_x y}{\mu^m}$$

Re – liczba Reynoldsa

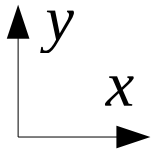
μ^m – lepkość molekularna (laminarna)

μ^t – lepkość turbulentna (korekta lepkości molekularnej dla ruchu turbulentnego)

Przykład 3 – równanie Naviera-Stokesa



Długość kanału nie jest ważna
– interesuje nas profil
prędkości w kierunku y



$$\frac{\partial p}{\partial x} = -2.0 \cdot 10^{-3} \left[\frac{Pa}{m} \right]$$

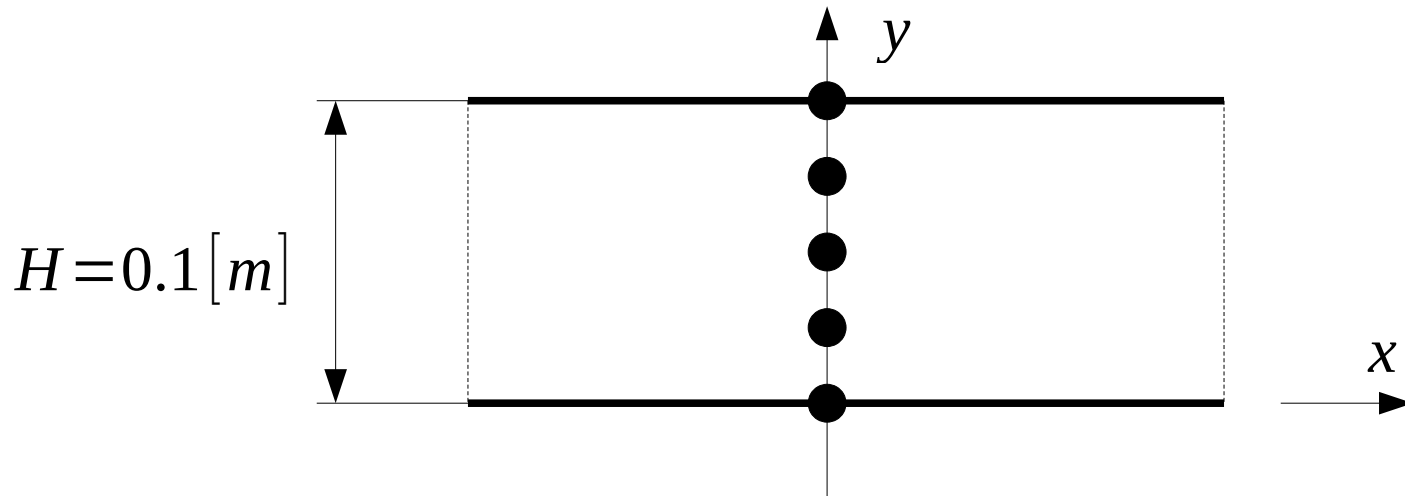
$$\rho = 1.188 \left[\frac{kg}{m^3} \right]$$

$$Re_{min} = 40$$

$$\mu^m = 17.97 \cdot 10^{-6} [Pa \cdot s]$$

Geometria kanału oraz przykładowe dane modelu

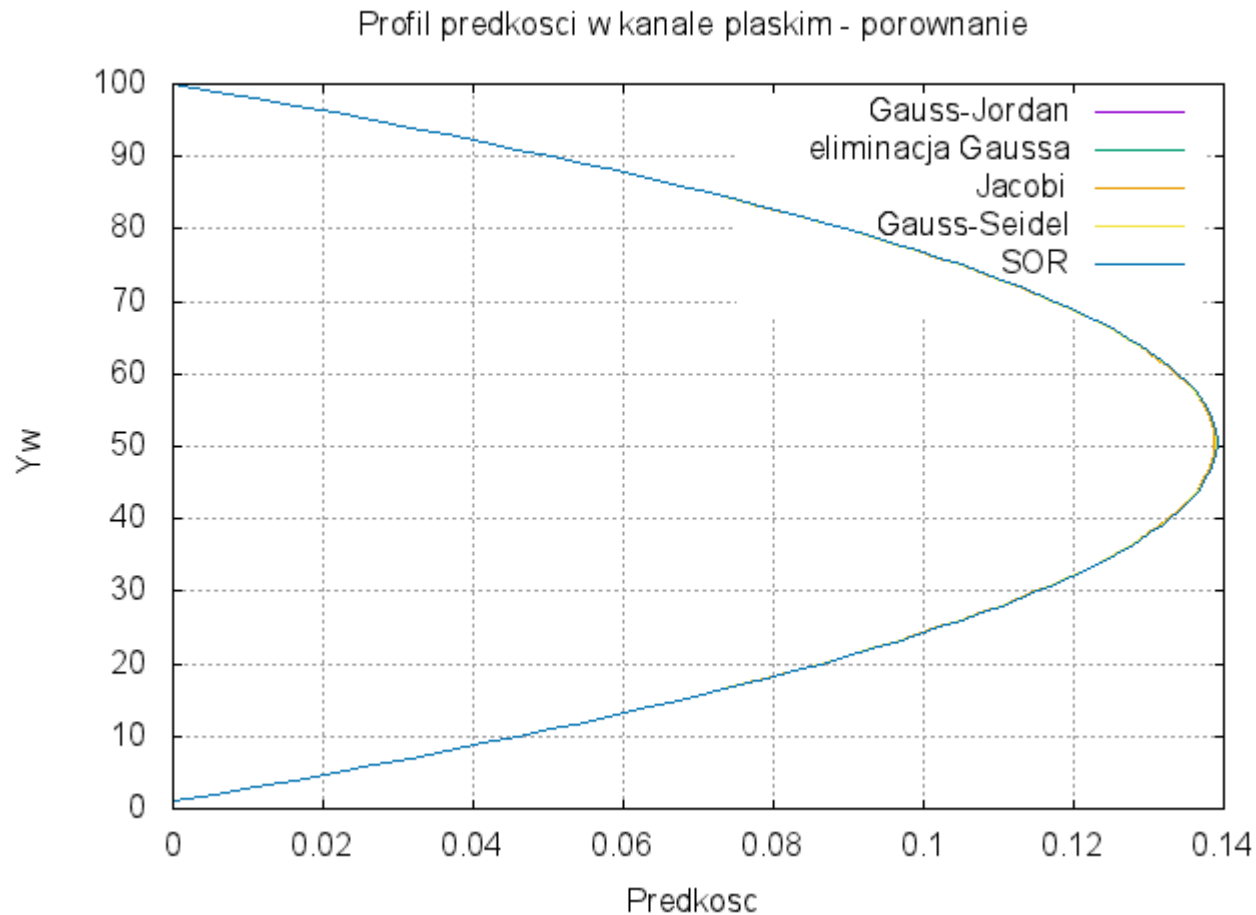
Przykład 3 – równanie Naviera-Stokesa



$$v_x^{n+1} = \frac{v_x^{i-1}(\mu^{i-1} + \mu^i) + v_x^{i+1}(\mu^i + \mu^{i+1}) - 2\Delta y^2 \frac{\partial p}{\partial x}}{\mu^{i-1} + 2\mu^i + \mu^{i+1}}$$

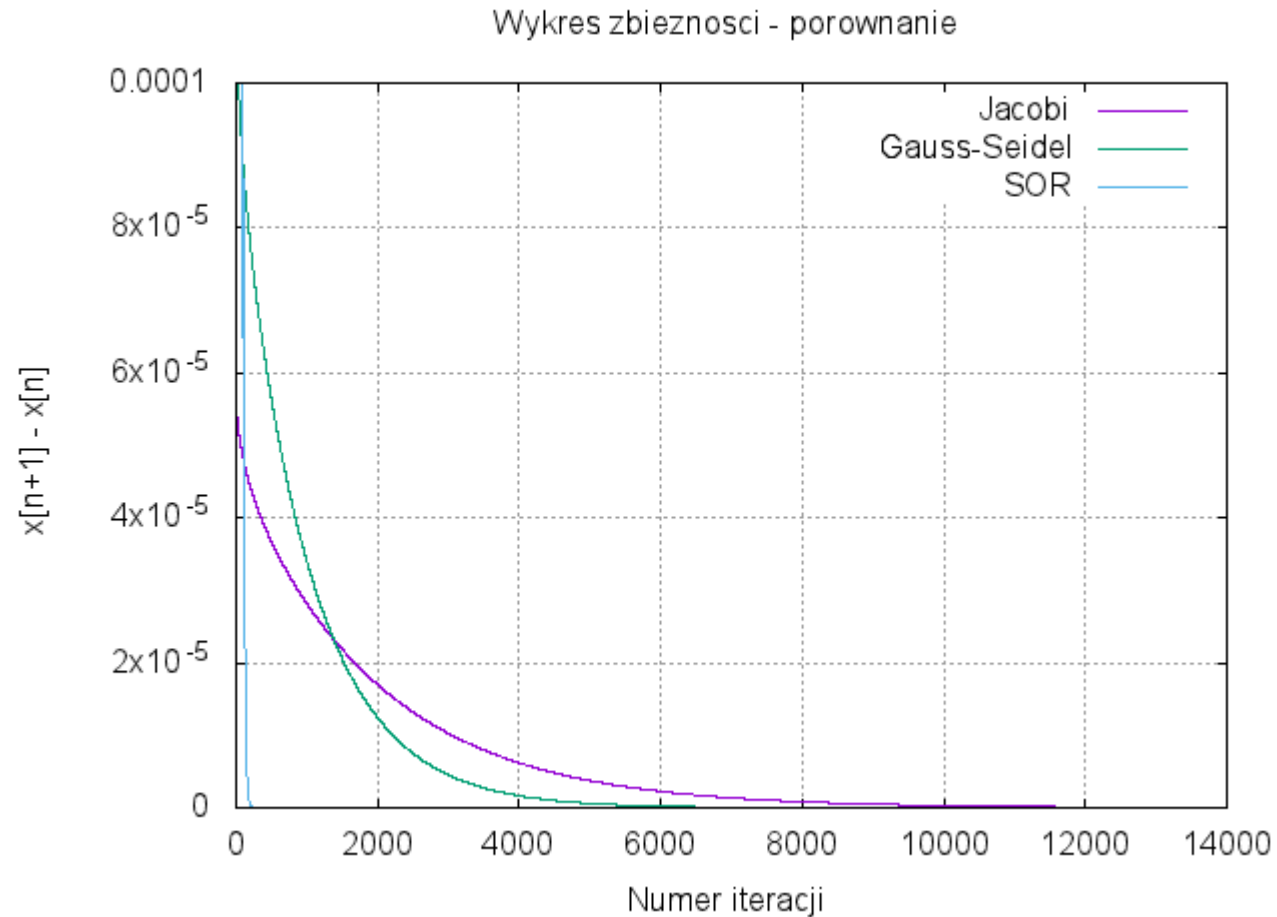
Sposób obliczania prędkości w poszczególnych węzłach siatki

Przykład 3 – równanie Naviera-Stokesa



Profil prędkości w kanale (5 różnych metod rozwiązywania układu równań)

Przykład 3 – równanie Naviera-Stokesa

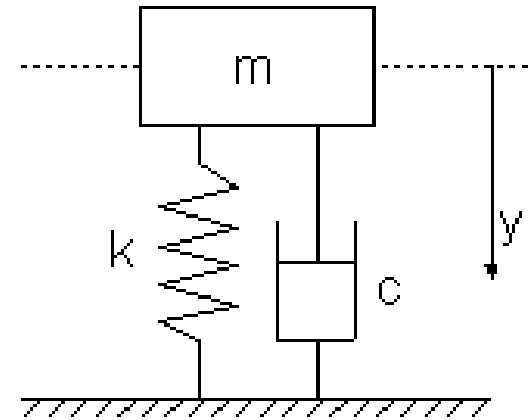


Wykres zbieżności iteracyjnych metod rozwiązywania układów równań liniowych

Przykład 4 – drgania ciężarka

Równanie drgań tłumionych ma postać:

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -mg - k(y - w_0) - c \frac{dy}{dt} \left| \frac{dy}{dt} \right|$$



m	– masa [kg]
y	– położenie ciężarka [m]
t	– czas [s]
k	– stała sprężyny [N/m]
w_0	– napięcie wstępne sprężyny
c	– współczynnik tłumienia [-]

$$w_0 = \frac{mg}{k}$$

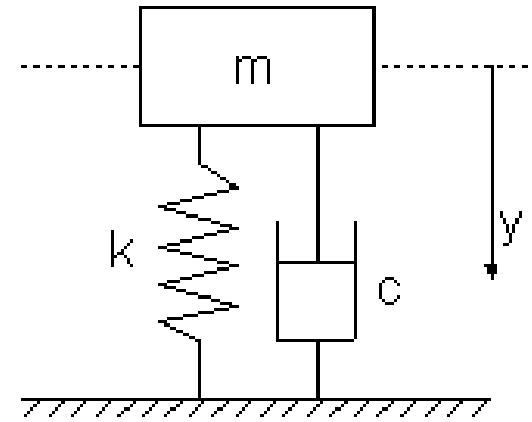
$$\begin{cases} c = c_d \text{ dla } u > 0 \\ c = c_g \text{ dla } u < 0 \end{cases}$$

Przykład 4 – drgania ciężarka

Aby obniżyć rząd równania różniczkowego można zastosować podstawienie, (gdzie u to prędkość ciężarka):

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = u \\ \frac{du}{dt} = -g - \frac{k}{m}(y - w_0) - \frac{c}{m}u|u| \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^n = y^{n-1} + \frac{dy}{dt} dt \\ u^n = u^{n-1} + \frac{du}{dt} dt \end{cases}$$



Przykład 4 – drgania ciężarka

Przykład implementacji w języku Fortran:

!wartosci poczatkowe procesu iteracyjnego:

```
y = y0  
u = u0  
t = 0.
```

!poczatek petli po czasie: -----

```
do i=1,n
```

!wybor stalej tlumienia w zaleznosci od kierunku ruchu:

```
  if (u.gt.0) then  
    c = cd  
  else  
    c = cg  
  end if
```

$$\begin{cases} c = c_d \text{ dla } u > 0 \\ c = c_g \text{ dla } u < 0 \end{cases}$$

!obliczenie pochodnych:

```
dydt = u  
dudt = -g - (k/m) * (y-w0) - c*u*abs(u) / m
```

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = u \\ \frac{du}{dt} = -g - \frac{k}{m}(y - w_0) - \frac{c}{m}u|u| \end{cases}$$

!obliczenie nowych wartosci zmiennych:

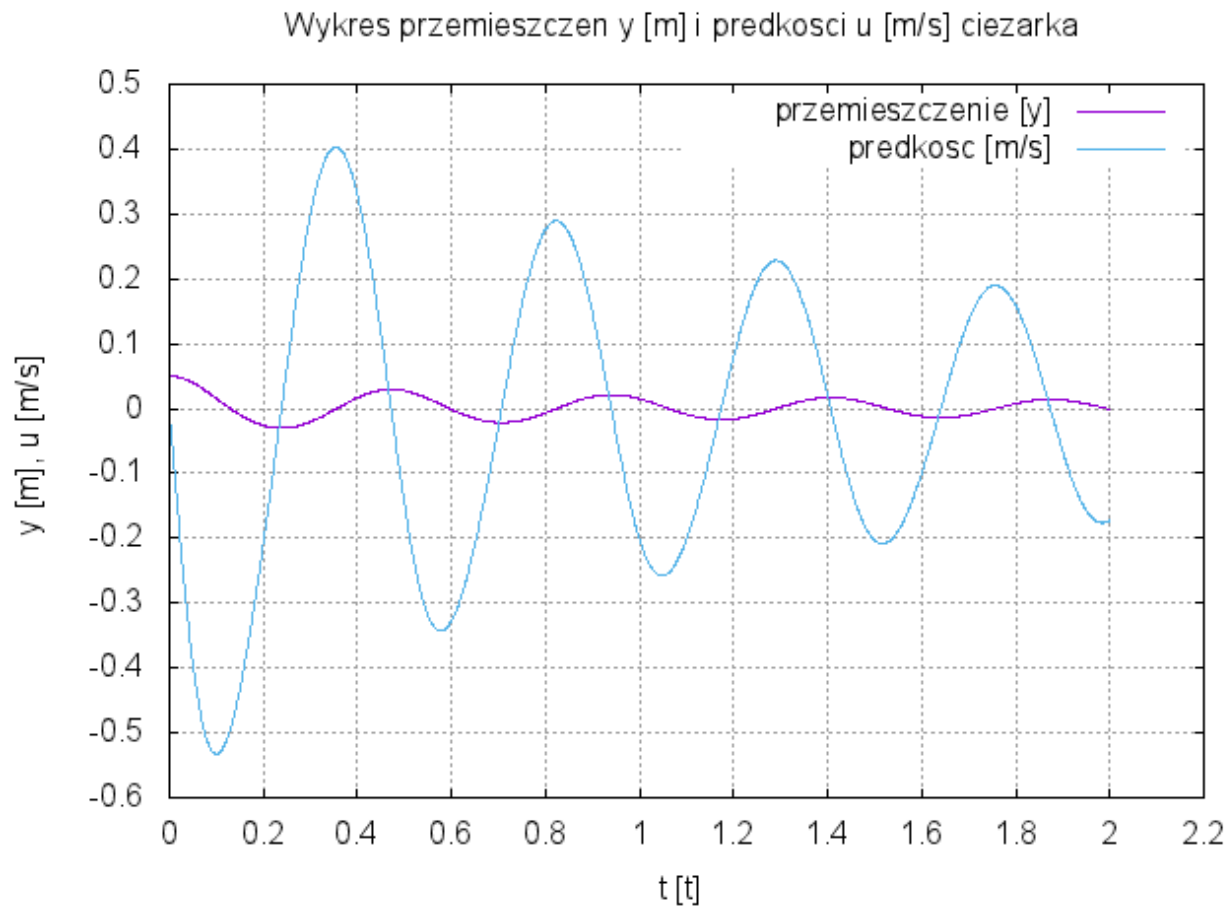
```
y = y+dydt*dt  
u = u+dudt*dt  
t = t+dt
```

$$\begin{cases} y^n = y^{n-1} + \frac{dy}{dt} dt \\ u^n = u^{n-1} + \frac{du}{dt} dt \end{cases}$$

```
end do
```

!koniec petli po czasie: -----

Przykład 4 – drgania ciężarka



$$m = 5.5$$

$$k = 1000$$

$$c_g = 55$$

$$c_d = 5.5$$

$$y_0 = 0.05$$

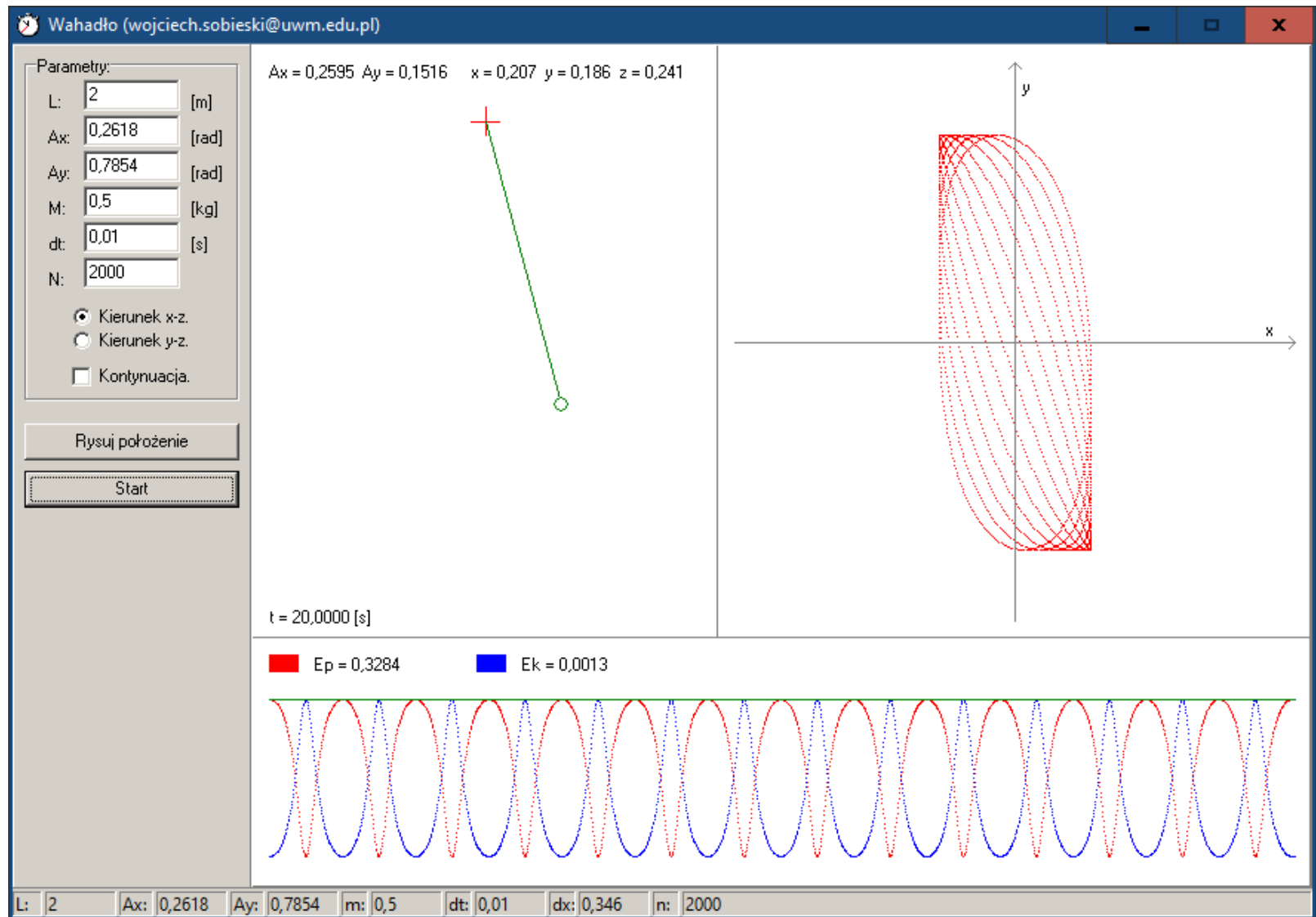
$$u_0 = 0$$

$$dt = 0.001$$

$$g = 9.81$$

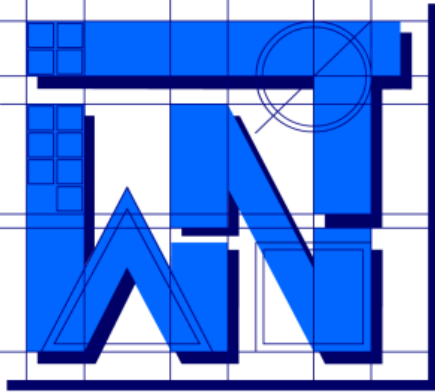
Wykres położenia i prędkości ciężarka dla przykładowych danych.

Przykład 4 – drgania ciężarka



Przykład programu rozwiązującego równanie wahadła matematycznego (krzywe Lissajous).

Wydział Nauk Technicznych



UNIVERSITY OF WARMIA AND MAZURY IN OLSZTYN
The Faculty of Technical Sciences
POLAND, 10-957 Olsztyn, M. Oczapowskiego 11
tel.: (48)(89) 5-23-32-40, fax: (48)(89) 5-23-32-55
URL: <http://www.uwm.edu.pl/edu/sobieski/> (in Polish)



Dziękuję za uwagę

Wojciech Sobieski

Olsztyn, 2003-2024