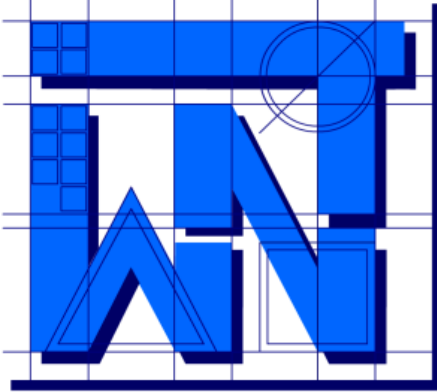


Wydział Nauk Technicznych



UNIVERSITY OF WARMIA AND MAZURY IN OLSZTYN  
The Faculty of Technical Sciences  
POLAND, 10-957 Olsztyn, M. Oczapowskiego 11  
tel.: (48)(89) 5-23-32-40, fax: (48)(89) 5-23-32-55  
URL: <http://www.uwm.edu.pl/edu/sobieski/> (in Polish)



# Computational Fluid Dynamics

## Smoothed Particle Hydrodynamics

version: 13 February 2024

Wojciech Sobieski

Lublana/Olsztyn, 2022-2024

# Metody numeryczne w mechanice

---

## Metody numeryczne w Mechanice Płynów (siatkowe i bezsiatkowe):

- **metody siatkowe:**
  - Metoda Różnic Skończonych (Finite Difference Method)
  - Metoda Elementów Skończonych (Finite Element Method)
  - Metoda Objętości Skończonych (Finite Volume Method)
  - Metoda Zanurzonego Brzegu (Immersed Boundary Method)
  - Metoda gazu sieciowego Boltzmanna (Lattice Boltzmann Method)
  - ...
- **metody bezsiatkowe:**
  - Metoda Elementów Dyskretnych (Discrete Element Method)
  - Metoda Elementów Brzegowych (Boundary Element Method)
  - **Metoda Cząstek Wygładzonych (Smoothed Particle Hydrodynamics)**
  - ...
- **metody hybrydowe:**
  - Metoda Cząstek w Siatce (Particle/Fluid in Cell Model)
  - ...



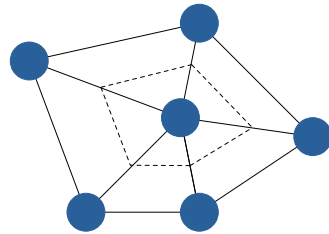
Computational Fluid Dynamics (CFD).



# Metody numeryczne w mechanice

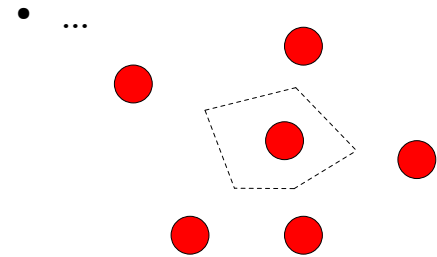
## metody siatkowe – podejście Eulera:

- Metoda Różnic Skończonych (1928)
- Metoda Gazu Sietowego Boltzmanna (1954)
- Metoda Elementów Skończonych (1956)
- Metoda Objętości Skończonych (1971/72)
- ...



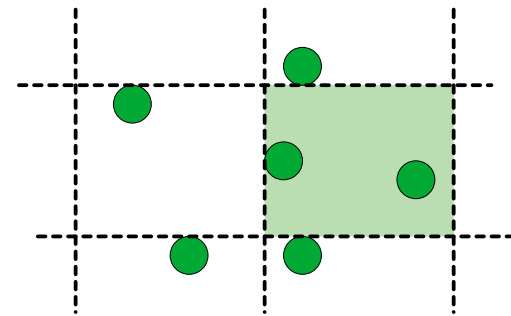
## metody bezsiatkowe – podejście Lagrange'a:

- Dynamika Molekularna
- Metoda Elementów Brzegowych (1963)
- Metoda Podstawowego Rozwiązania (1963)
- Metoda Cząstek Wygładzonych (1977)
- Metoda Elementów Dyskretnych (1979)
- ...



## metody hybrydowe – podejście łączone Eulera i Lagrange'a:

- Particle in Cell
- Fluid in Cell
- ...



# Całkowa reprezentacja funkcji

---

Rozważmy obszar  $\Omega$ , w którym znana jest pewna ciągła funkcja  $f$  – jak opisać jej wartość za pomocą wyrażenia całkowego?

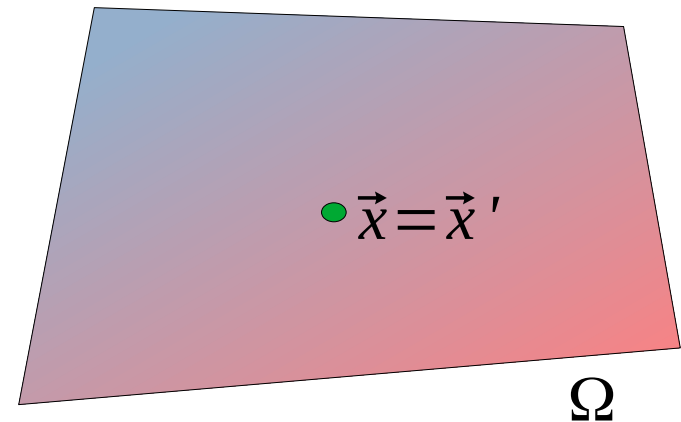
$$f(\vec{x}) = \int_{\Omega} f(\vec{x}') d\vec{x}'$$

Jeżeli lokalizacja  $x$  pokrywa się z lokalizacją  $x'$ , to wynikiem całkowania będzie wartość funkcji w lokalizacji  $x$  – tu funkcja jest ciągła (znana dla każdego  $x$ ), więc zawsze uzyska się jakiś wynik.

Inaczej: „całka to pole”, a jeśli pole zawężymy do punktu, to całka będzie równa wartości funkcji z tego punktu.

$\vec{x}$  - lokalizacja punktu, dla którego szukana jest wartość funkcji

$\vec{x}'$  - lokalizacja punktu, w którym znana jest wartość funkcji



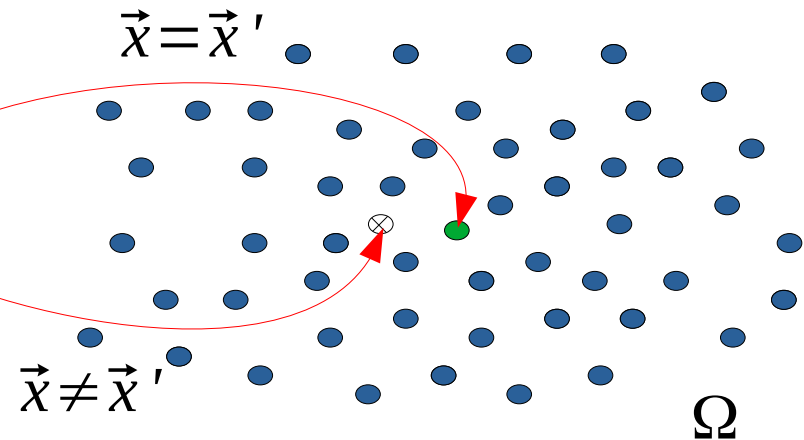
**WAŻNE:** tu  $x$  nie oznacza współrzędnej na osi  $X$ , ale ogólny wektor położenia w dowolnie wybranym układzie współrzędnych.

# Całkowa reprezentacja funkcji

Co się stanie, jeżeli funkcja  $f$  będzie funkcją dyskretną, czyli taką, której wartości znane są tylko w wybranych lokalizacjach (tu: zbiorze  $x'$ )?

$$f(\vec{x}) = \int_{\Omega} f(\vec{x}') \delta(\vec{x} - \vec{x}') d\vec{x}'$$

$$\delta(\vec{x} - \vec{x}') = \begin{cases} 1 & \text{dla } \vec{x} = \vec{x}' \\ 0 & \text{dla } \vec{x} \neq \vec{x}' \end{cases}$$



Teraz opcje są dwie: albo „trafimy” w jedną z lokalizacji  $x'$  i uzyskamy wartość funkcji, albo „nie trafimy” i wynikiem będzie 0.

$\vec{x}$  - lokalizacja punktu, dla którego szukana jest wartość funkcji

$\vec{x}'$  - lokalizacja punktu, w którym znana jest wartość funkcji

$\delta$  - delta Diraca

# Całkowa reprezentacja funkcji

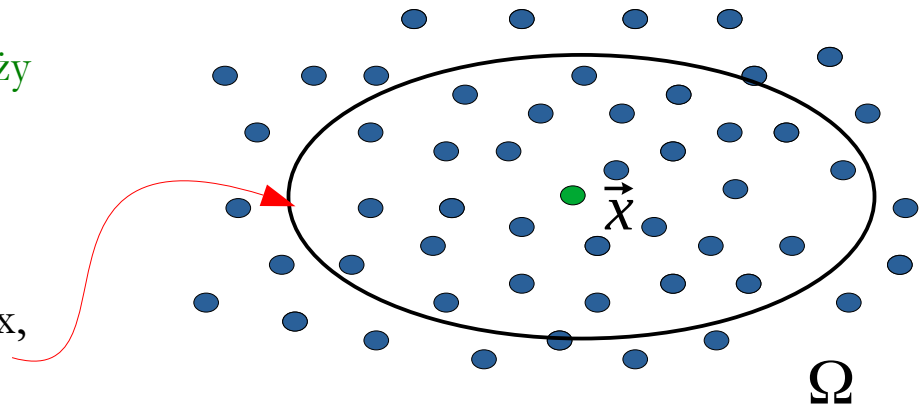
---

A jak zrobić, aby dało się obliczyć wartość funkcji w dowolnym punkcie?

- trzeba opracować jakąś metodę aproksymacji bazującą na punktach, w których wartości funkcji są znane.

Podstawowe pytanie – które punkty należy wziąć pod uwagę podczas aproksymacji?

**Domena wsparcia** – otoczenie punktu  $x$ , mające wpływ na wartość funkcji  $f(x)$ .



$\vec{x}$  - lokalizacja punktu, dla którego szukana jest wartość funkcji

$\vec{x}'$  - lokalizacja punktu, w którym znana jest wartość funkcji

Ogólnie nie ma znaczenia czy punkt  $x$  pokrywa się z jednym z punktów  $x'$  czy też nie.

# Domena wpływu i domena wsparcia

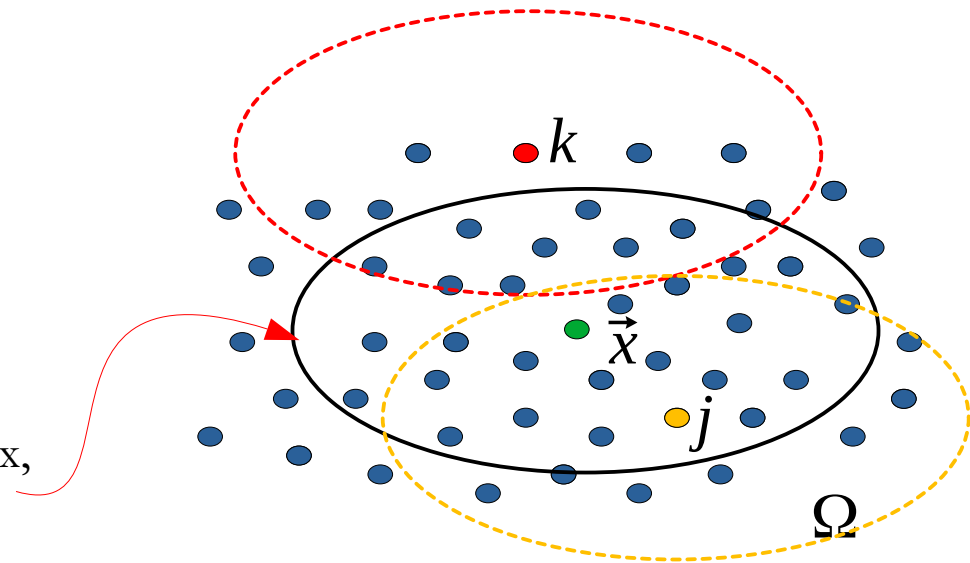
Pojęciem pokrewnym spotykanym w literaturze, jest domena wpływu.

**Domena wpływu** – otoczenie punktu  $x'$ , w którym wpływa on na wartości aproksymowane.

**Domena wsparcia** – otoczenie punktu  $x$ , mające wpływ na wartość funkcji  $f(x)$ .

Tu punkt  $x$ :

- znajduje się w domenie wpływu punktu  $j$
- nie znajduje się w domenie wpływu punktu  $k$



Podczas aproksymacji wartości funkcji  $f$  w punkcie  $x$  brane są pod uwagę tylko punkty dyskretyzacji znajdujące się w domenie wsparcia.

$\vec{x}$  - lokalizacja punktu, dla którego szukana jest wartość funkcji

$\vec{x}'$  - lokalizacja punktu, w którym znana jest wartość funkcji

# Aproksymacja funkcji / Funkcja wygładzająca

Aproksymowana wartość funkcji:

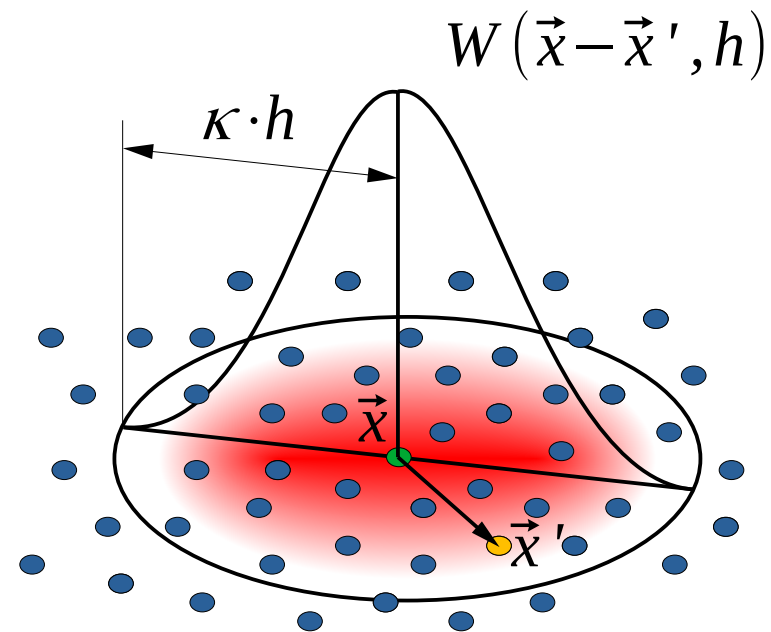
$$\langle f(\vec{x}) \rangle = \int_{\Omega} f(\vec{x}') W(\vec{x} - \vec{x}', h) d\vec{x}'$$

równanie (\*)

Funkcja wagowa, według której wpływ poszczególnych punktów dyskretyzacji znajdujących się w domenie wsparcia (o rozmiarze  $\kappa \cdot h$ ), zależy od odległości:

im dalej punkt  $x_j$  znajduje się od punktu  $x_i$ , tym mniejszy ma wpływa na wynik.

W jest funkcją skalarną (polem skalarnym)!



$W$  - funkcja wygładzająca (kernel)

$h$  - długość wygładzania

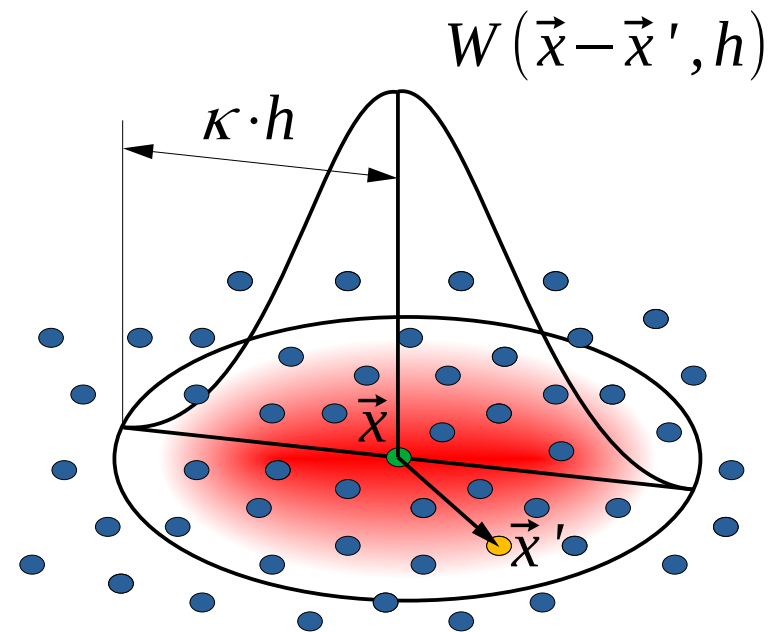
$\kappa$  - współczynnik skali długości wygładzania



# Cechy funkcji wygładzającej

Cechy poprawnie zdefiniowanej funkcji wygładzającej:

- **normalizacja** – cecha oznacza, że wpływ punktów dyskretyzacji znajdujących się w domenie wsparcia sumuje się do 1 (każdy z punktów dyskretyzacji ma swój procentowy udział w obliczeniu wartości aproksymowanej).



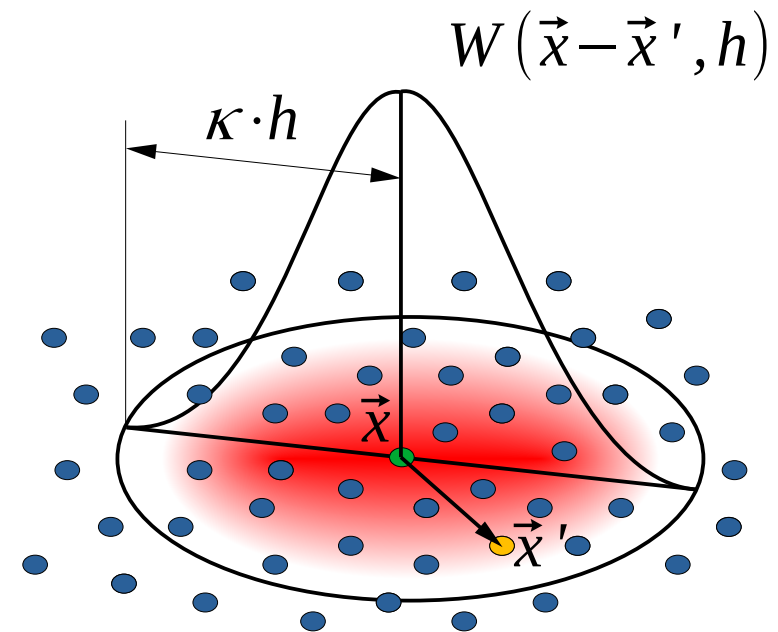
$$\int_{\Omega} W(\vec{x} - \vec{x}', h) d\vec{x}' = 1$$

ang. normalization condition  
lub unity condition

# Cechy funkcji wygładzającej

Cechy poprawnie zdefiniowanej funkcji wygładzającej:

- **zgodność z deltą Diraca** – cecha oznacza, że w przypadku zmniejszania rozmiaru domeny wsparcia do punktu, funkcja wygładzająca stanie się deltą Diraca.



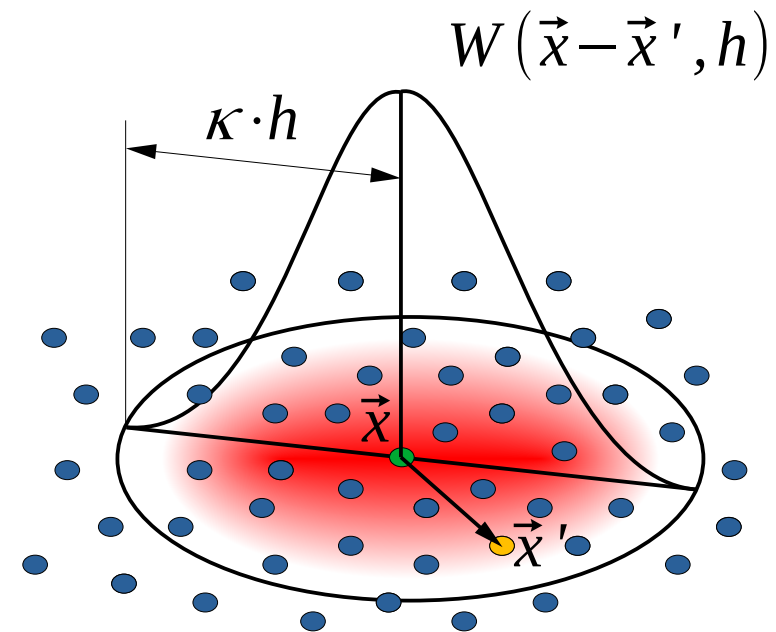
$$\lim_{h \rightarrow 0} W(\vec{x} - \vec{x}', h) = \delta(\vec{x} - \vec{x}')$$

ang. Delta function property

# Cechy funkcji wygładzającej

Cechy poprawnie zdefiniowanej funkcji wygładzającej:

- **zwartość** – cecha oznacza, że wartość funkcji wygładzającej poza domeną wsparcia jest zerowa.



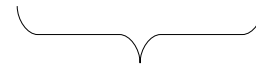
$$W(\vec{x} - \vec{x}', h) = 0 \quad \text{dla} \quad |\vec{x} - \vec{x}'| \geq \kappa \cdot h$$

ang. compact condition

# Dokładność aproksymacji funkcji

Dokładność całkowej reprezentacji funkcji można oszacować rozwijając funkcję wygładzającą w szereg Taylora (tu pokazano 2 pierwsze człony):

$$\langle f(\vec{x}) \rangle = \int_{\Omega} \left[ f(\vec{x}) + f'(\vec{x})(\vec{x}' - \vec{x}) + r((\vec{x}' - \vec{x})^2) \right] W(\vec{x} - \vec{x}', h) d\vec{x}'$$



reszta – tu: drugiego rzędu

$$\langle f(\vec{x}) \rangle = f(\vec{x}) \int_{\Omega} W(\vec{x} - \vec{x}', h) d\vec{x}' + f'(\vec{x}) \int_{\Omega} (\vec{x}' - \vec{x}) W(\vec{x} - \vec{x}', h) d\vec{x}' + r(h^2)$$



ponieważ funkcja jest punktowo symetryczna względem  $x$  (raz  $x' - x < 0$  a raz  $x' - x > 0$ ), to całka będzie równa zero.

$$\langle f(\vec{x}) \rangle = f(\vec{x}) + r(h^2)$$

# Aproksymacja pochodnej funkcji

punkt wyjścia – równanie (\*):

$$\langle f(\vec{x}) \rangle = \int_{\Omega} f(\vec{x}') W(\vec{x} - \vec{x}', h) d\vec{x}'$$

$$f(\vec{x}) \longrightarrow \nabla \cdot f(\vec{x})$$



zamiast funkcji (tu traktujemy ją ogólnie jako funkcję wektorową) wstawiamy jej pochodną

$$\langle \nabla \cdot f(\vec{x}) \rangle = \int_{\Omega} [\nabla \cdot f(\vec{x}')] W(\vec{x} - \vec{x}', h) d\vec{x}'$$



pochodna funkcji złożonej

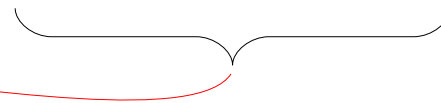


$$\nabla \cdot [f(\vec{x}') W(\vec{x} - \vec{x}', h)] = \nabla \cdot [f(\vec{x}') W(\vec{x} - \vec{x}', h)] + \nabla \cdot [f(\vec{x}') W(\vec{x} - \vec{x}', h)]$$

div

grad

$$\nabla \cdot [f(\vec{x}') W(\vec{x} - \vec{x}', h)] = [\nabla \cdot f(\vec{x}')] W(\vec{x} - \vec{x}', h) + f(\vec{x}') \cdot \nabla [W(\vec{x} - \vec{x}', h)]$$



$$[\nabla \cdot f(\vec{x}')] W(\vec{x} - \vec{x}', h) = \nabla \cdot [f(\vec{x}') W(\vec{x} - \vec{x}', h)] - f(\vec{x}') \cdot \nabla W(\vec{x} - \vec{x}', h)$$

# Aproksymacja pochodnej funkcji

---

$$\langle \nabla \cdot f(\vec{x}) \rangle = \int_{\Omega} [\nabla \cdot f(\vec{x})] W(\vec{x} - \vec{x}', h) d\vec{x}'$$

$$\langle \nabla \cdot f(\vec{x}) \rangle = \int_{\Omega} \left( \nabla \cdot [f(\vec{x}') W(\vec{x} - \vec{x}', h)] - f(\vec{x}') \cdot \nabla W(\vec{x} - \vec{x}', h) \right) d\vec{x}'$$

$$\langle \nabla \cdot f(\vec{x}) \rangle = \int_{\Omega} \nabla \cdot [f(\vec{x}') W(\vec{x} - \vec{x}', h)] d\vec{x}' - \int_{\Omega} f(\vec{x}') \cdot \nabla W(\vec{x} - \vec{x}', h) d\vec{x}'$$

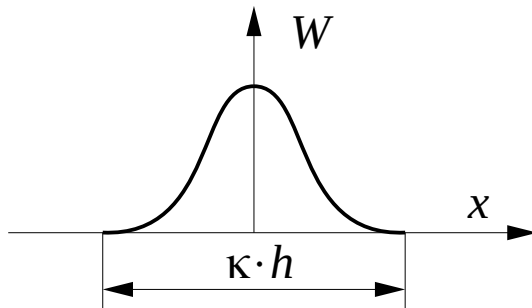
tw. Greena-Gaussa-Ostrogradzkiego

$$\int_S (F \cdot \vec{n}) dS = \int_V (\operatorname{div}(F)) dV$$

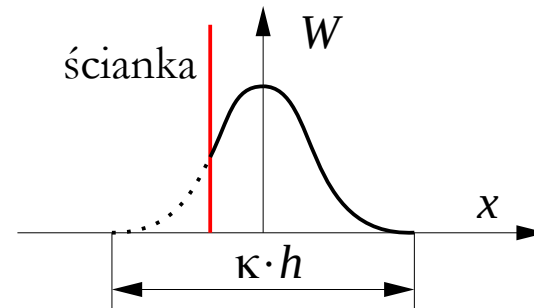
$$\langle \nabla \cdot f(\vec{x}) \rangle = \int_S [f(\vec{x}') W(\vec{x} - \vec{x}', h)] \cdot \vec{n} d\vec{x}' - \int_{\Omega} f(\vec{x}') \cdot \nabla W(\vec{x} - \vec{x}', h) d\vec{x}'$$

# Aproksymacja pochodnej funkcji

$$\langle \nabla \cdot f(\vec{x}) \rangle = \int_S [f(\vec{x}') W(\vec{x} - \vec{x}', h)] \cdot \vec{n} d\vec{x}' - \int_{\Omega} f(\vec{x}') \cdot \nabla W(\vec{x} - \vec{x}', h) d\vec{x}'$$



- jeżeli domena wsparcia **nie jest obcięta**, to całka po powierzchni równa się zero.



- jeżeli domena wsparcia **jest obcięta**, to całka po powierzchni nie równa się zero i będzie potrzebna korekta sytuacji.

$$\langle \nabla \cdot f(\vec{x}) \rangle = - \int_{\Omega} f(\vec{x}') \cdot \nabla W(\vec{x} - \vec{x}', h) d\vec{x}'$$

równanie (\*\*)

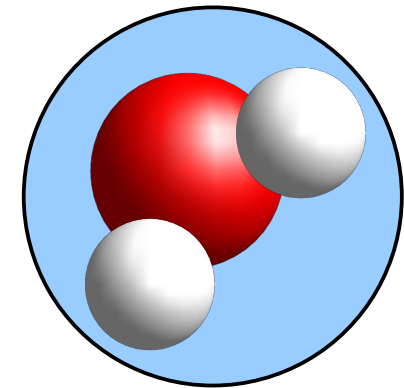
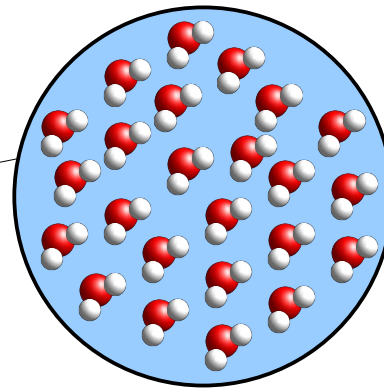
W wyniku działań, operator przeszedł z funkcji  $f$  na funkcję wygładzającą  $W$  – a pochodną funkcji wygładzającej można policzyć analitycznie!

# Metoda Cząstek Wygładzonych

---

**Metoda Cząstek Wygładzonych** (Smoothed Particle Hydrodynamics, SPH) – bezsiatkowa metoda Lagrange'a analizy dynamiki ciał stałych lub płynów, w której materia ciągła jest reprezentowana przez zbiór cząstek.

$$m_i = \rho_i V_i$$



$m_i$  - masa i-tej cząstki [kg]

$V_i$  - objętość i-tej cząstki [m<sup>3</sup>]

$\rho_i$  - gęstość i-tej cząstki [kg/m<sup>3</sup>]

W SPH cząsteczka reprezentuje pewną objętość materii, np. płynu.

W Dynamice Molekularnej cząsteczka oznacza pojedynczą molekulę.

---

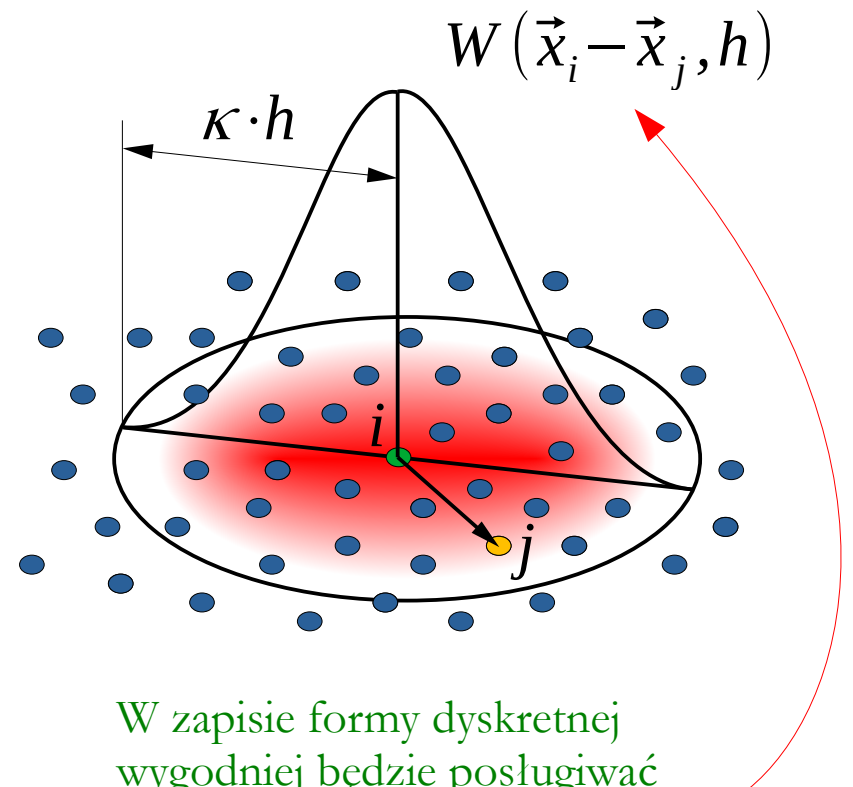
Dalej do określenia metody używany jest głównie skrót SPH.



# Metoda Cząstek Wygładzonych

## Główne cechy SPH:

- każda cząstka posiada zbiór parametrów, np. masę, gęstość, ciśnienie, prędkość, ...
- reprezentatywna wartość parametru w punkcie jest obliczana jako średnia ważona tego parametru ze wszystkich cząstek znajdujących się w pobliżu tego punktu
- wielkość obszaru interpolacji określa tzw. długość wygładzania ( $h$ )
- wagi interpolacji są definiowane przez tzw. funkcję wygładzającą ( $W$ )



W zapisie formy dyskretnej wygodniej będzie posługiwać się indeksami cząstek:

$$\vec{x} = \vec{x}_i \quad \vec{x}' = \vec{x}_j$$

# Dyskretna postać reprezentacji funkcji

punkt wyjścia – równanie (\*):

$$\langle f(\vec{x}) \rangle = \int_{\Omega} f(\vec{x}') W(\vec{x} - \vec{x}', h) d\vec{x}'$$

$$\langle f(\vec{x}) \rangle \approx \sum_{j=1}^N f(\vec{x}_j) W(\vec{x}_i - \vec{x}_j, h) dV_j$$

$$\langle f(\vec{x}) \rangle \approx \sum_{j=1}^N f(\vec{x}_j) W(\vec{x}_i - \vec{x}_j, h) \frac{1}{\rho_j} \rho_j dV_j$$

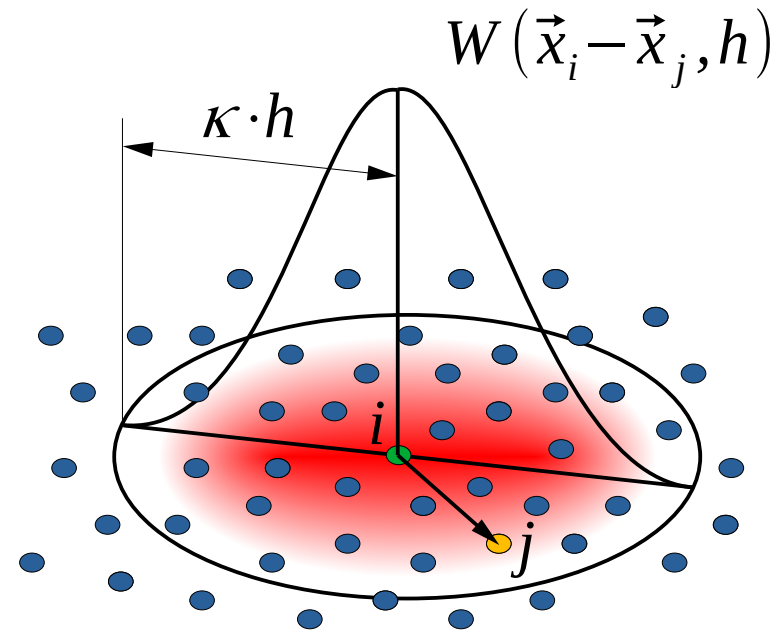
$$\langle f(\vec{x}) \rangle \approx \sum_{j=1}^N f(\vec{x}_j) W(\vec{x}_i - \vec{x}_j, h) \frac{m_j}{\rho_j}$$

$$\langle f(\vec{x}) \rangle \approx \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} f(\vec{x}_j) W_{ij}$$

$$\rho_j dV_j = m_j$$

krótszy zapis funkcji W:

$$W(\vec{x}_i - \vec{x}_j, h) = W_{ij}$$



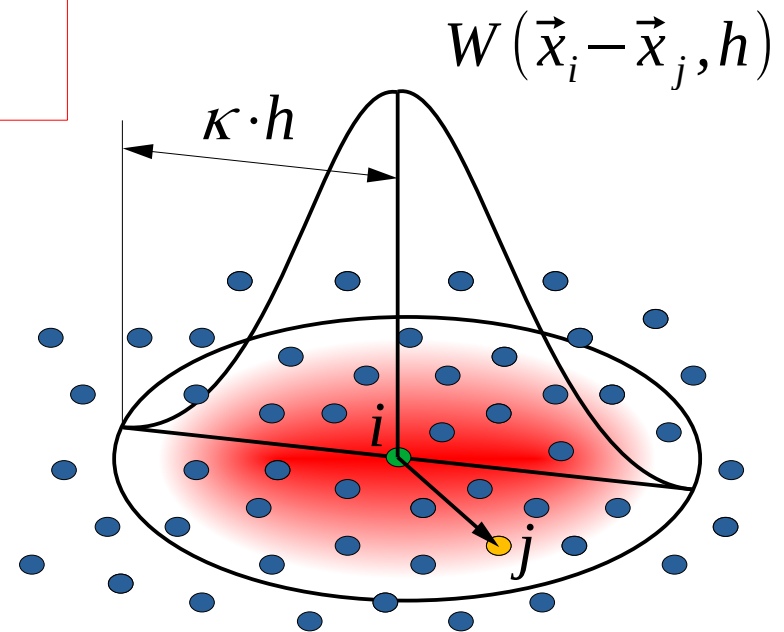
# Dyskretna postać reprezentacji pochodnej funkcji

punkt wyjścia – równanie (\*\*):

$$\langle \nabla \cdot f(\vec{x}) \rangle = - \int_{\Omega} f(\vec{x}') \cdot \nabla W(\vec{x} - \vec{x}', h) d\vec{x}'$$

W analogiczny sposób można uzyskać dyskretną postać całkowej reprezentacji pochodnej funkcji.

Widocznego tu znaku minus w praktyce się nie uwzględnia.



$$\langle \nabla \cdot f(\vec{x}) \rangle \approx - \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} f(\vec{x}_j) \cdot \nabla W_{ij}$$

krótszy zapis funkcji W:

$$W(\vec{x}_i - \vec{x}_j, h) = W_{ij}$$

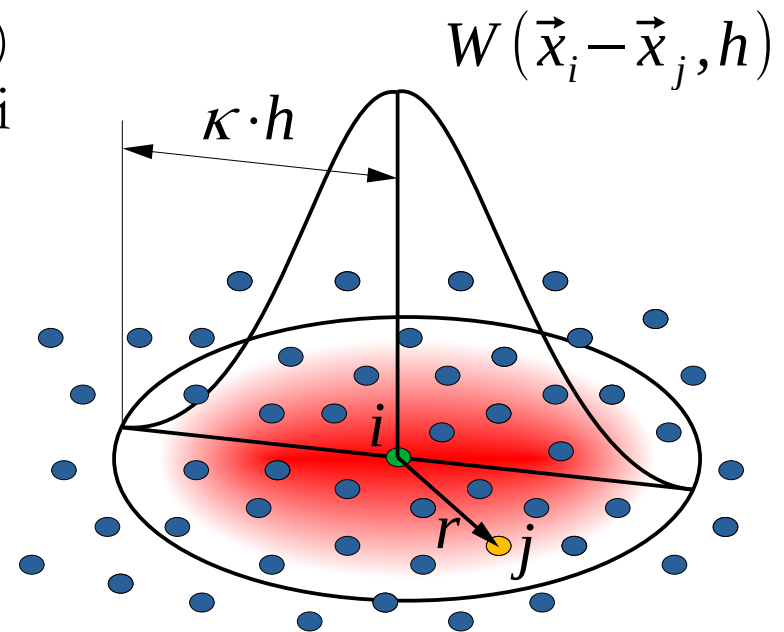
# Tworzenie funkcji wygładzających

Popularną metodą tworzenia funkcji wygładzających jest przyjęcie założenia, że jest ona wielomianem (lub funkcją sklejaną) zależnym tylko od względnej odległości między danymi punktami:

$$W(\vec{x}_i - \vec{x}_j, h) = W(r, h) = a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + \dots + a_n r^n$$

Dalsze kroki:

- wybór członów wielomianu
- przyjęcie liczby wymiarów
- przyjęcie wartości parametru  $\kappa$
- obliczenie współczynników wielomianu – z zachowaniem cech funkcji



$$r = |\vec{x}_i - \vec{x}_j|$$

# Tworzenie funkcji wygładzających

Przykład wielomianu (tu dla  $\kappa=1$ ):

$$W(r, h) = a_0 + a_2 r^2$$

- cecha normalizacji:

$$\int_{\Omega} \left( a_0 + a_2 \left( \frac{r}{h} \right)^2 \right) (2\pi r) dr = 1$$

w 2D obszarem całkowania jest koło o promieniu  $r$

$$\int_{\Omega} W(\vec{x} - \vec{x}', h) d\vec{x}' = 1$$

$$\int_{\Omega} \left( a_0 + a_2 \left( \frac{r}{h} \right)^2 \right) (4\pi r^2) dr = 1$$

$$\int_{\Omega} W(\vec{x} - \vec{x}', h) d\vec{x}' = 1$$

- cecha zwartości:

w 3D obszarem całkowania jest kula o promieniu  $r$

$$W(r=1, h) = a_0 + a_2 1^2 = 0 \quad \leftarrow \quad W(\vec{x} - \vec{x}', h) = 0 \quad \text{dla} \quad |\vec{x} - \vec{x}'| \geq \kappa \cdot h$$

$$a_0 + a_2 = 0$$

# Tworzenie funkcji wygładzających

---

Obliczmy całkę dla 2D:

$$\int_{\Omega} \left( a_0 + a_2 \left( \frac{r}{h} \right)^2 \right) (2\pi r) dr = 1$$

$$\int_{\Omega} a_0 (2\pi r) dr + \int_{\Omega} a_2 \left( \frac{r}{h} \right)^2 (2\pi r) dr = 1$$

$$a_0 2\pi \int_{\Omega} r dr + a_2 2\pi \frac{1}{h^2} \int_{\Omega} r^3 dr = 1$$

$$a_0 2\pi \frac{1}{2} r^2 \Big|_0^h + a_2 2\pi \frac{1}{h^2} \frac{1}{4} r^4 \Big|_0^h = 1$$

$$a_0 \pi h^2 + a_2 \pi \frac{1}{2} h^2 = 1$$

$$2\pi h^2 \left( \frac{a_0}{2} + \frac{a_2}{4} \right) = 1$$

$$2\pi h^2 \left( \frac{2a_0}{4} - \frac{a_0}{4} \right) = 1$$

$$2\pi h^2 \frac{a_0}{4} = 1$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi h^2}$$

$$a_2 = -a_0$$

$$a_2 = -\frac{2}{\pi h^2}$$

# Tworzenie funkcji wygładzających

$$W(r, h) = a_0 + a_2 r^2 \quad \longleftarrow \quad a_2 = -a_0 \quad \alpha_d = a_0 = \frac{2}{\pi h^2}$$

$$W(r, h) = \alpha_d (1 - r^2)$$

W literaturze funkcje wygładzające zapisuje się z użyciem ogólnego członu, zależnego od liczby wymiarów przestrzeni.

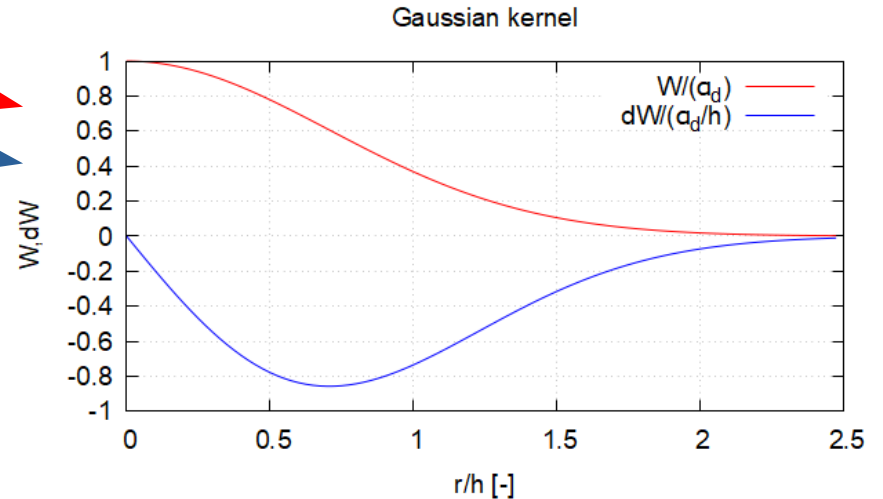
Kernel	$\alpha_d$ in 1D	$\alpha_d$ in 2D	$\alpha_d$ in 3D	$\kappa$
Gaussian	$1/(\pi^{1/2} h)$	$1/(\pi h^2)$	$1/(\pi^{3/2} h^3)$	$\infty$
Bell-shaped	$5/(4h)$	$5/(\pi h^2)$	$105/(16\pi h^3)$	1
Cubic spline	$1/h$	$15/(7\pi h^2)$	$3/(2\pi h^3)$	2
Quadratic	$1/h$	$2/(\pi h^2)$	$5/(4\pi h^3)$	2
Quintic	$3/(4h)$	$7/(4\pi h^2)$	$21/(16\pi h^3)$	2
Quintic spline	$1/(120h)$	$7/(478\pi h^2)$	$3/(359\pi h^3)$	3

# Przykłady funkcji wygładzających

Gaussian kernel (1977):

$$W(r, h) = \alpha_d e^{-\frac{r^2}{h^2}}$$

$$\frac{dW}{dr} = \frac{\alpha_d}{h} \left( -2 \frac{r}{h} e^{-\frac{r^2}{h^2}} \right)$$



UWAGA: Na wykresach pokazana jest tylko główna część funkcji, bez członu normalizującego dobieranego do konkretnego przypadku.

Kernel	$\alpha_d$ in 1D	$\alpha_d$ in 2D	$\alpha_d$ in 3D	$\kappa$
Gaussian	$1/(\pi^{1/2}h)$	$1/(\pi h^2)$	$1/(\pi^{3/2}h^3)$	$\infty$

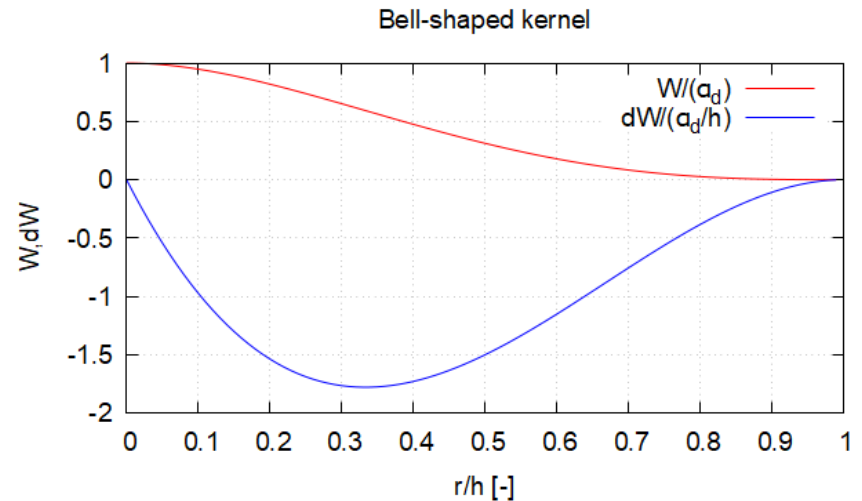


# Przykłady funkcji wygładzających

Bell-shaped kernel (1977):

$$W(r, h) = \alpha_d \begin{cases} \left(1 + 3\frac{r}{h}\right) \left(1 - \frac{r}{h}\right)^3 & \text{dla } \frac{r}{h} \leq 1 \\ 0 & \text{dla } \frac{r}{h} > 1 \end{cases}$$

$$\frac{dW}{dr} = \frac{\alpha_d}{h} \begin{cases} 3 \left[ \left(1 - \frac{r}{h}\right)^3 - \left(1 + 3\frac{r}{h}\right) \left(1 - \frac{r}{h}\right)^2 \right] & \text{dla } \frac{r}{h} \leq 1 \\ 0 & \text{dla } \frac{r}{h} > 1 \end{cases}$$



W zielonej ramce zaznaczono współczynnik skali długości wygładzania  $\kappa$ .

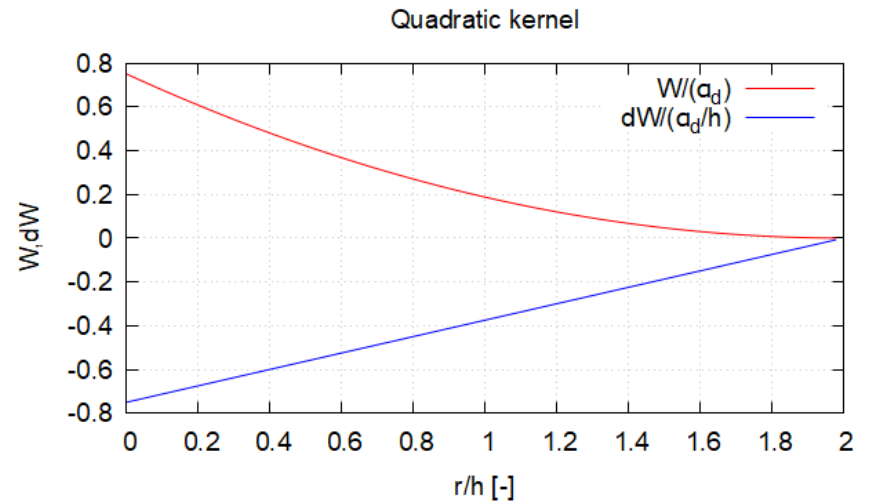
Kernel	$\alpha_d$ in 1D	$\alpha_d$ in 2D	$\alpha_d$ in 3D	$\kappa$
Bell-shaped	$5/(4h)$	$5/(\pi h^2)$	$105/(16\pi h^3)$	1

# Przykłady funkcji wygładzających

Quadratic kernel (1996):

$$W(r, h) = \alpha_d \begin{cases} \frac{3}{16} \left(\frac{r}{h}\right)^2 - \frac{3}{4} \frac{r}{h} + \frac{3}{4} & \text{dla } \frac{r}{h} \leq 2 \\ 0 & \text{dla } \frac{r}{h} > 2 \end{cases}$$

$$\frac{dW}{dr} = \frac{\alpha_d}{h} \begin{cases} \frac{3}{8} \frac{r}{h} - \frac{3}{4} & \text{dla } \frac{r}{h} \leq 2 \\ 0 & \text{dla } \frac{r}{h} > 2 \end{cases}$$



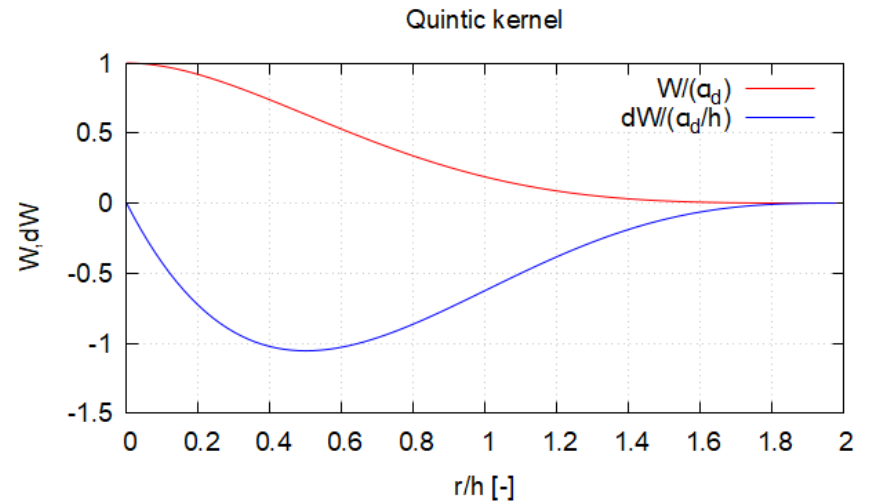
Kernel	$\alpha_d$ in 1D	$\alpha_d$ in 2D	$\alpha_d$ in 3D	$\kappa$
Quadratic	$1/h$	$2/(\pi h^2)$	$5/(4\pi h^3)$	2

# Przykłady funkcji wygładzających

Quintic kernel (1995):

$$W(r, h) = \alpha_d \begin{cases} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{r}{h}\right)^4 \left(2 \frac{r}{h} + 1\right) & \text{dla } \frac{r}{h} \leq 2 \\ 0 & \text{dla } \frac{r}{h} > 2 \end{cases}$$

$$\frac{dW}{dr} = \frac{\alpha_d}{h} \begin{cases} -5 \frac{r}{h} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{r}{h}\right)^3 & \text{dla } \frac{r}{h} \leq 2 \\ 0 & \text{dla } \frac{r}{h} > 2 \end{cases}$$



Kernel	$\alpha_d$ in 1D	$\alpha_d$ in 2D	$\alpha_d$ in 3D	$\kappa$
Quintic	$3/(4h)$	$7/(4\pi h^2)$	$21/(16\pi h^3)$	2

# Długość wygładzania

---

Długość wygładzania może być:

- stała dla wszystkich cząstek:

$$h = a \Delta x$$

$a$  - stała, najczęściej wynosi około 1.2-1.4

$\Delta x$  - krok przestrzenni początkowej siatki węzłów [m]

- Jak  $h$  jest za mała, to za mała jest dokładność aproksymacji.
- Jak  $h$  jest za duże, to koszt obliczeń zbytnio wzrasta.

- indywidualna dla wszystkich cząstek:

$$h = h_0 \left( \frac{\rho_0}{\rho} \right)^{\frac{1}{d}}$$

$\rho$  - gęstość [kg/m<sup>3</sup>]

$\rho_0$  - gęstość początkowa [kg/m<sup>3</sup>]

$h_0$  - początkowa długość wygładzania [m]

Przyjmuje się, że np. dla  $a = 1.2$  oraz  $\kappa = 2$  optymalna liczba cząstek w domenie wsparcia wynosi 21 w 2D oraz 57 w 3D.

 w tym przypadku potrzebna jest symetryzacja interakcji

# Symetryzacja interakcji

---

**Symetryzacja interakcji** – działania mające na celu zapewnienie zgodności z III Zasadą Dynamiki Newtona, w przypadku stosowania zmiennej wartości długości wygładzania:

- uśrednianie długości wygładzania:

$$W_{ij} = W(r_{ij}, h_{ij}) \quad \left\{ \begin{array}{ll} h_{ij} = \frac{h_i + h_j}{2} & h_{ij} = \min(h_i, h_j) \\ h_{ij} = \frac{2h_i h_j}{h_i + h_j} & h_{ij} = \max(h_i, h_j) \end{array} \right.$$

- bezpośrednio uśrednianie funkcji wygładzającej:

$$W_{ij} = \frac{1}{2} [W(h_i) + W(h_j)]$$

opcje obliczania wspólnej dla obu cząstek długości wygładzania

# Podstawowe równania hydrodynamiki

---

Równanie bilansu masy:

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \nabla \cdot \vec{v}$$

Równanie bilansu pędu (równanie Naviera-Stokesa):

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla p + \nabla \cdot \overleftrightarrow{\tau} + \rho \vec{f} \quad \text{lub} \quad \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \overleftrightarrow{\tau} + \vec{f}$$

$\rho$  - gęstość

$p$  - ciśnienie

$$\overleftrightarrow{T} = -p \overleftrightarrow{I} + \overleftrightarrow{\tau}$$

$\vec{v}$  - prędkość

$\overleftrightarrow{\tau}$  - tensor naprężeń stycznych

$t$  - czas

$\vec{f}$  - jednostkowa siła masowa

$\overleftrightarrow{T}$  - całkowity tensor naprężeń

# Aproksymacja równania bilansu masy

---

**Bilansowanie masy** – metoda 1 (summation density):

$$\rho_i = \sum_{j=1}^n m_j W_{ij}$$

lub

$$\rho_i = \frac{\sum_{j=1}^n m_j W_{ij}}{\sum_{j=1}^n \frac{m_j}{\rho_i} W_{ij}}$$

$n$  - liczba cząstek w domenie wsparcia  $i$ -tej cząstki

Cechy:

- dobrze zachowuje masę
- niedokładna przy ścinkach, co można poprawić poprzez normalizację
- wymagająca relatywnie dużych mocy obliczeniowych
- zalecana dla typowych przepływów (bez fal uderzeniowych)

# Aproksymacja równania bilansu masy

---

**Bilansowanie masy – metoda 2 (continuity density):**

$$\frac{d\rho_i}{dt} = \sum_{j=1}^n m_j (\vec{v}_i - \vec{v}_j) \cdot \nabla_i W_{ij}$$

$n$  - liczba cząstek w domenie wsparcia  $i$ -tej cząstki

Cechy:

- niezbyt dokładnie zachowuje masę
- nie prowadzi do niedokładności na brzegach
- moc obliczeniowa jest mniejsza niż w pierwszej metodzie
- metoda zalecana dla przepływów z falami uderzeniowymi
- metoda zalecana w programowaniu równoległym



# Aproksymacja równania bilansu pędu

Bilansowanie pędu – człon ciśnieniowy:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \vec{\tau} + \vec{f}$$

normalna część tensora  
naprężeń (ciśnienie)

styczna część tensora  
naprężeń (lepkość)

człon  
źródłowy

$$\left. \frac{d\vec{v}_i}{dt} \Big|_p = - \sum_{j=1}^n m_j \left( \frac{p_i}{\rho_i^2} + \frac{p_j}{\rho_j^2} \right) \nabla_i W_{ij} \right\}$$

$$\frac{d\vec{v}_i}{dt} \Big|_p = - \sum_{j=1}^n m_j \left( \frac{p_i + p_j}{\rho_i \rho_j} \right) \nabla_i W_{ij}$$

# Aproksymacja równania bilansu pędu

Bilansowanie pędu – człon lepkościowy (tu: lepkość fizyczna):

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \overset{\leftrightarrow}{\tau} + \vec{f}$$

normalna część tensora  
naprężeń (ciśnienie)

człon  
źródłowy

styczna część tensora  
naprężeń (lepkość)

$$\frac{d\vec{v}_i}{dt} \Big|_{\tau} = \sum_{j=1}^n m_j \left( \frac{\overset{\leftrightarrow}{\tau}_i}{\rho_i^2} + \frac{\overset{\leftrightarrow}{\tau}_j}{\rho_j^2} \right) \nabla_i W_{ij}$$

$$\frac{d\vec{v}_i}{dt} \Big|_{\tau} = \sum_{j=1}^n m_j \left( \frac{\overset{\leftrightarrow}{\tau}_i + \overset{\leftrightarrow}{\tau}_j}{\rho_i \rho_j} \right) \nabla_i W_{ij}$$

$$\overset{\leftrightarrow}{\tau}_{ij} = \mu \overset{\leftrightarrow}{D}_{ij}$$

$\mu$  - lepkość dynamiczna

$\overset{\leftrightarrow}{D}_{ij}$  - tensor prędkości deformacji

# Aproksymacja równania bilansu pędu

---

**Bilansowanie pędu** – człon lepkościowy (tu: sztuczna lepkość):

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \vec{\tau} + \vec{f}$$

normalna część tensora  
naprężeń (ciśnienie)

styczna część tensora  
naprężeń (lepkość)

człon  
źródłowy

$$\left. \frac{d\vec{v}_i}{dt} \right|_{\tau} = \sum_{j=1}^n m_j \Pi_{ij} \nabla_i W_{ij}$$

Ze względu na problemy ze stabilnością obliczeń, w klasycznej literaturze dotyczącej SPH zazwyczaj korzysta się z koncepcji tzw. sztucznej lepkości.

# Sztuczna lepkość

---

Sztuczna lepkość – człon spełniający następujące cele:

- modelowanie tarcia wewnętrznego występującego w płynach
- zapewnienie stabilności obliczeń w przypadku oddalania się cząstek
- zapewnienie prawidłowego kierunku przekazywania pędu  
(od cząstki o większej prędkości do cząstki o prędkości mniejszej)

$$\Pi_{ij} = \begin{cases} \frac{-\alpha \bar{c}_{ij} \mu_{ij} + \beta \mu_{ij}^2}{\bar{\rho}_{ij}} & \text{dla } \vec{v}_{ij} \cdot r_{ij} < 0 \\ 0 & \text{dla } \vec{v}_{ij} \cdot r_{ij} \geq 0 \end{cases}$$

$\alpha$  - stała (zazwyczaj bliska 1)

$\beta$  - stała (zazwyczaj bliska 1)

$c$  - prędkość dźwięku

$\varphi$  - stała zapobiegająca pojawianiu się zerowych odległości między cząstkami, co powoduje niestabilności numeryczne

$$\vec{v}_{ij} = \vec{v}_i - \vec{v}_j$$

$$\bar{\rho}_{ij} = \frac{\rho_i + \rho_j}{2}$$

$$\mu_{ij} = \frac{\bar{h}_{ij} \vec{v}_{ij} \cdot r_{ij}}{r_{ij}^2 + \varphi^2}$$

$$\bar{h}_{ij} = \frac{h_i + h_j}{2}$$

$$r_{ij} = r_i - r_j$$

$$\bar{c}_{ij} = \frac{c_i + c_j}{2}$$

$$\varphi = 0.1 h_{ij}$$

# Równanie stanu

---

W przypadku **gazów** można stosować:

- równanie stanu gazu doskonałego – tu w wersji względnej:

$$p = \left( \frac{\rho}{\rho_0} - 1 \right) \frac{R_u T}{M}$$

Zależność jest liniowa.

- inne dowolne równanie stanu gazu

$$p = (\gamma - 1) \rho u$$

$p$  - ciśnienie [Pa]

$\rho$  - gęstość [kg/m<sup>3</sup>]

$\rho_0$  - gęstość referencyjna [kg/m<sup>3</sup>]

$T$  - temperatura [K]

$M$  - masa molowa [kg/mol]

$R_u$  - uniwersalna stała gazowa [J/(K·mol)]

$\gamma$  - stała, np. 1.4

$u$  - jednostkowa energia wewnętrzna [J/kg]

# Równanie stanu

---

W przypadku **cieczy** można stosować:

- równanie sztucznej ściśliwości:

$$p = B \left[ \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma - 1 \right] \quad \gamma = 7$$

$$B = \frac{c^2 \rho_0}{\gamma}$$

- sztuczne równanie stanu:

$$p = c^2 \rho$$

$p$  - ciśnienie [Pa]

$\rho$  - gęstość [kg/m<sup>3</sup>]

$\rho_0$  - gęstość referencyjna [kg/m<sup>3</sup>]

$B$  - stała zależna od prędkości dźwięku [Pa]

$c$  - prędkość dźwięku [m/s]

Przy dużym  $c$  krok czasowy musi być bardzo mały ze względu na stabilność, co prowadzi do dużych czasów obliczeń. Zamiast rzeczywistej prędkości dźwięku w SPH często stosowana jest sztuczna prędkość dźwięku – przykładowe formuły:

$$c \approx 10 v_{max} \quad v_{max} \text{ - maksymalna prędkość [m/s]}$$

$$g \text{ - przyspieszenie ziemskie [m/s}^2]$$

$$c \approx 10 \sqrt{g H} \quad H \text{ - maksymalna głębokość [m]}$$

# Warunki brzegowe

Podstawowe rodzaje warunków brzegowych:

- zastosowanie sztucznej siły odpychającej, np.:

$$f(r_{ij}) = \begin{cases} D \left( \left( \frac{r_0}{r_{ij}} \right)^{12} - \left( \frac{r_0}{r_{ij}} \right)^4 \right) \frac{\vec{x}_{ij}}{r_{ij}^2} & \text{dla } r_{ij} \leq r_0 \\ 0 & \text{dla } r_{ij} > r_0 \end{cases}$$

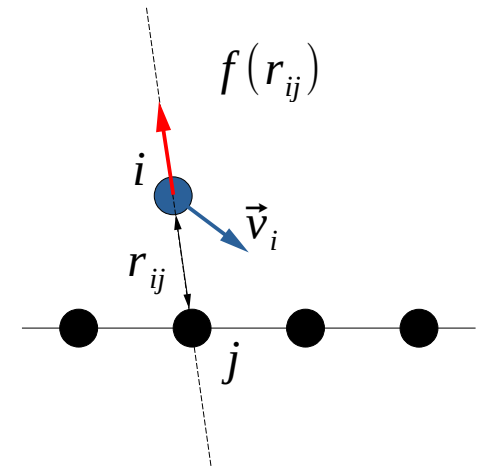
$f(r_{ij})$  - jednostkowa siła masowa [ $\text{m}^2/\text{s}$ ]

$r_{ij}$  - moduł odległości między cząstką płynu a cząstką ścianki [m]

$D$  - stała modelu zależna od zagadnienia [ $\text{m}^2/\text{s}^2$ ], np.:  $D \approx v_{max}^2$

$r_0$  - początkowa odległość między cząstkami (równa krokowi przestrzennemu) [m]

$\vec{x}_{ij}$  - wektor odległości między cząstką płynu a cząstką ścianki [m]

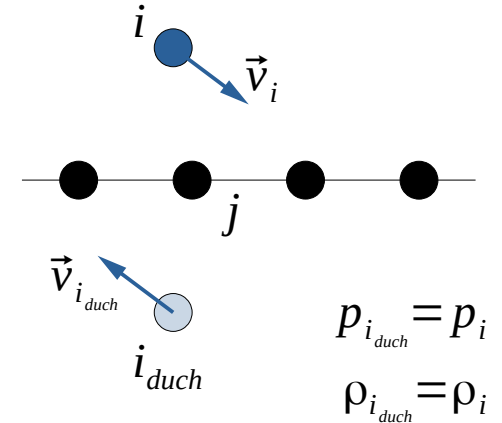
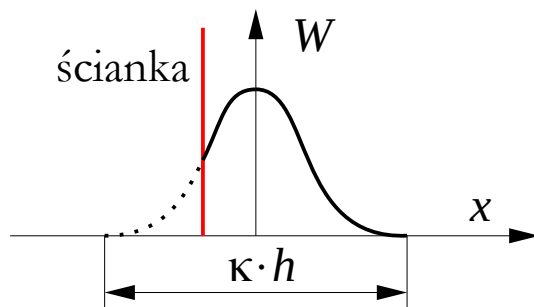


W literaturze dostępne są również inne modele siły odpychającej (zobacz np. program SPHysics).

# Warunki brzegowe

Podstawowe rodzaje warunków brzegowych:

- zastosowanie cząstek „duchów”, których celem jest uzupełnienie domeny wsparcia obciętej przez ściankę (ponieważ warunek nie zapobiega całkowicie możliwości penetracji cząstek w ściankę, jest przeważnie stosowany łącznie z siłą odpychającą).



Dzięki odwróceniu wektora prędkości cząstki ducha, na granicy ścianki zeruje się zarówno prędkość normalna, jak i styczna.

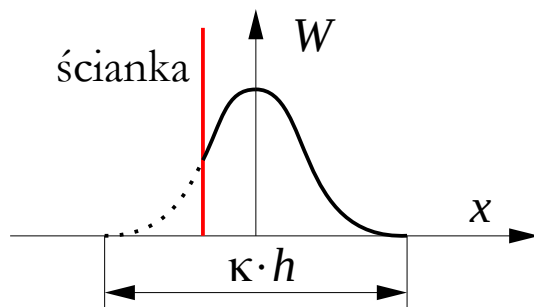
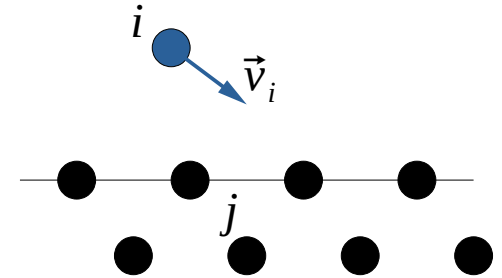


# Warunki brzegowe

---

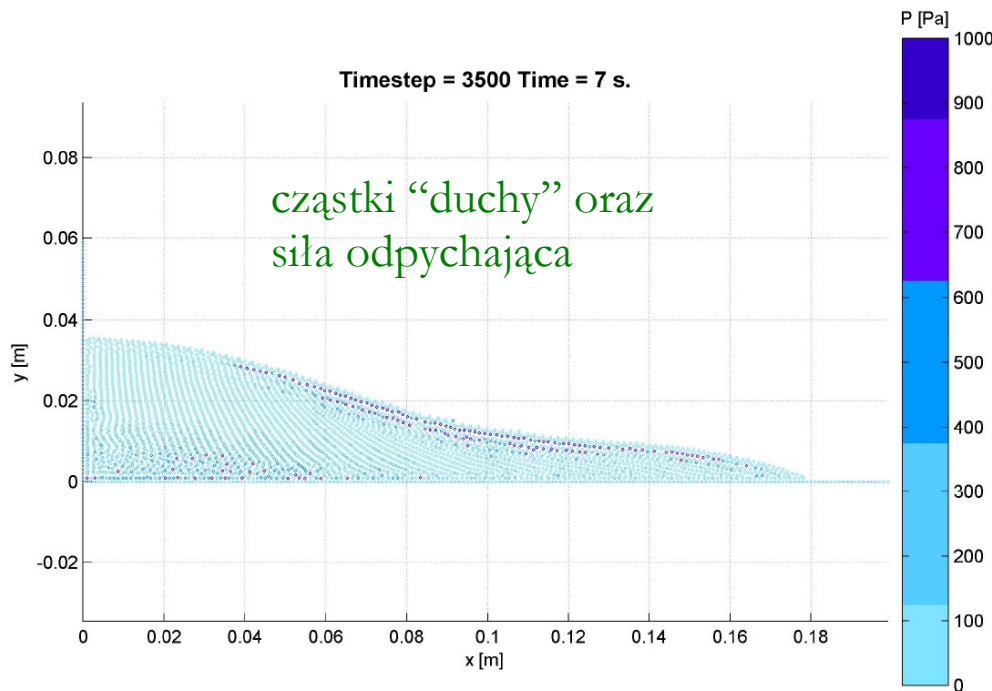
Podstawowe rodzaje warunków brzegowych:

- zastosowanie cząstek quasi-fluid.

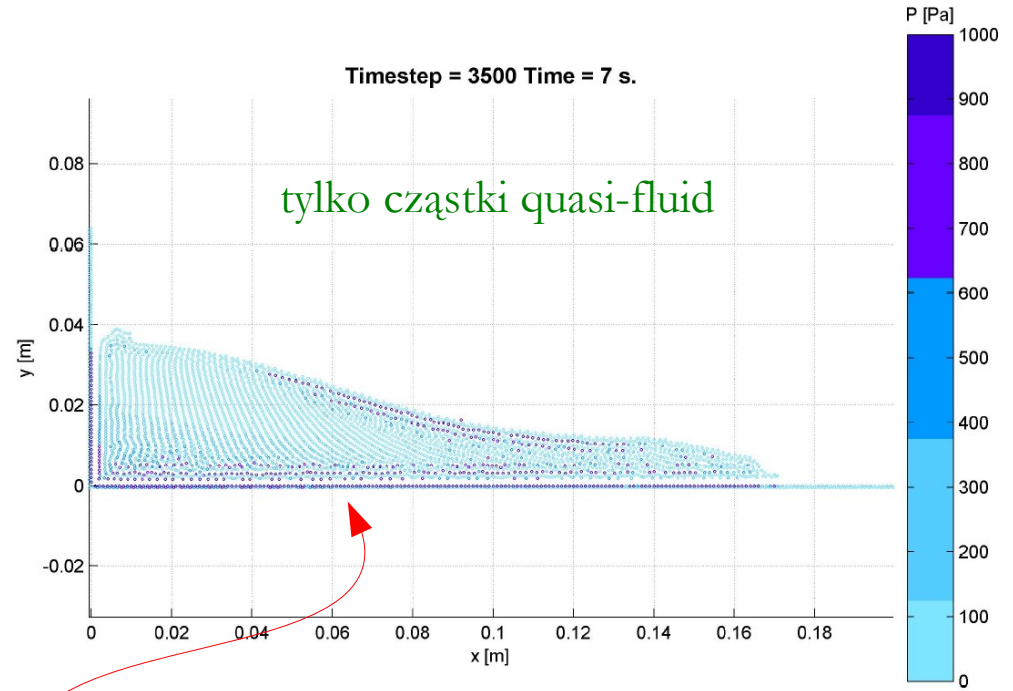


Cząstki ścianki (tu potrzebne są dwa rzędy) posiadają takie same parametry jak cząstki płynu – jedyną różnicą jest taka, że mają niezmiennie położenie oraz zerowe prędkości.

# Warunki brzegowe



(a) Boundary 1 = boundary and ghost particles



(b) Boundary 2 = quasi fluid particles

Przykład testowania warunków brzegowych.

„Wyniki są wrażliwe na początkową odległość między płynem a ścianką. Gdy początkowa odległość jest zbyt duża, płyn może przemieszczać się w kierunku granicy. Gdy początkowa odległość jest zbyt mała, cząsteczka płynu będzie odczuwać ssanie podczas oddalania się od granicy.”

# Dyskretyzacja czasu

Najprostszym sposobem dyskretyzacji czasu jest użycie schematu Eulera:

$$\rho_i^{n+1} = \rho_i^n + \frac{d\rho_i}{dt} \Delta t \quad \longleftarrow \quad \frac{d\rho_i}{dt} = \sum_{j=1}^n m_j (\vec{v}_i - \vec{v}_j) \cdot \nabla_i W_{ij}$$

$$p = B \left[ \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^y - 1 \right] \quad \Pi_{ij} = \begin{cases} -\frac{\alpha \bar{c}_{ij} \mu_{ij} + \beta \mu_{ij}^2}{\bar{\rho}_{ij}} & \text{dla } v_{ij} \cdot r_{ij} < 0 \\ 0 & \text{dla } v_{ij} \cdot r_{ij} \geq 0 \end{cases}$$

$$\vec{v}_i^{n+1} = \vec{v}_i^n + \frac{d\vec{v}_i}{dt} \Delta t \quad \longleftarrow \quad \frac{d\vec{v}_i}{dt} = - \sum_{j=1}^n m_j \left( \frac{p_i}{\rho_i^2} + \frac{p_j}{\rho_j^2} \right) \nabla_i W_{ij} +$$

$$\vec{x}_i^{n+1} = \vec{x}_i^n + \vec{v}_i^{n+1} \Delta t \quad \underbrace{+ \sum_{j=1}^n m_j \Pi_{ij} \nabla_i W_{ij} + \vec{f}}_{\text{przykładowa konfiguracja modelu}}$$

przykładowa konfiguracja modelu

# Dyskretyzacja czasu

---

Obliczanie maksymalnego kroku czasowego:

- warunek Monaghana

$$\Delta t_f = \min \left( \frac{h_i}{f_i} \right)^{0.5}$$

człon uwzględniający  
jednostkowe siły masowe

człon uwzględniający  
lepkość płynu

$$\Delta t = \min(0.4 \Delta t_f, 0.25 \Delta t_{CV})$$

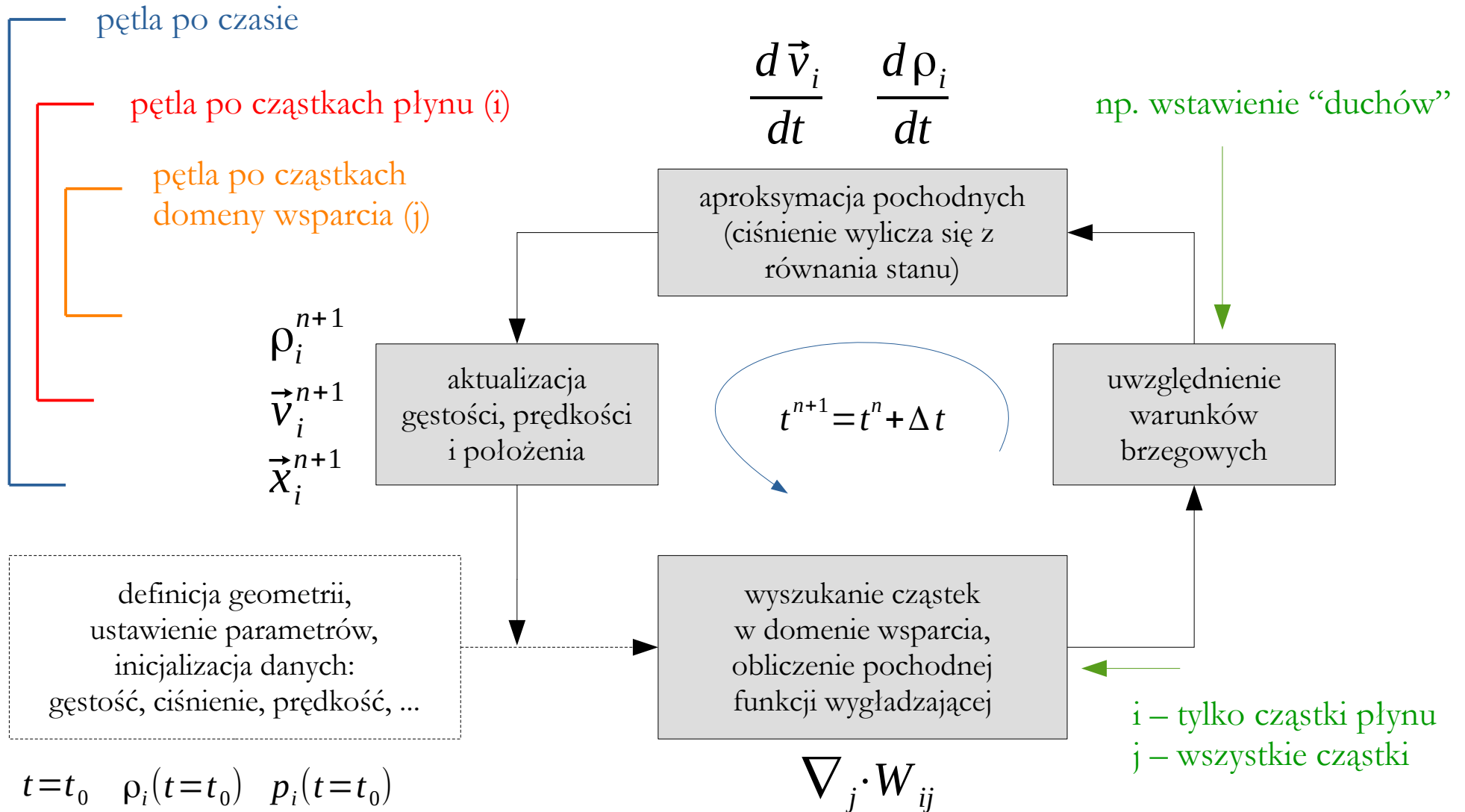
$$\Delta t_{CV} = \min \left( \frac{h_i}{c_i + 0.6 (\alpha_{\Pi} c_i + \beta_{\Pi} \max(\mu_{ij}))} \right)$$

- warunek Morrisa

$$\Delta t = 0.125 \frac{\rho h^2}{\mu}$$

symbole mają takie samo znaczenie jak  
w modelu opisującym sztuczną lepkość

# Algorytm obliczeniowy



# Kody SPH

---

**SPHysics** (FORTRAN, GPU, single/parallel, 2D/3D):



- licencja typu open-source
- brak interfejsu
- dostępna podstawowa dokumentacja w formacie PDF
- stworzony pierwotnie do modelowania ruchów lawy
- w pakiecie instalacyjnym dostępnych jest 7 przykładów
- umożliwia modelowanie przepływów jednofazowych
- umożliwia modelowanie przepływów z powierzchnią swobodną
- umożliwia modelowanie przepływów z obiektami pływającymi
- posiada wiele różnych warunków brzegowych (w tym ruchome ścianki)

Lista kodów SPH:

<https://www.spheric-sph.org/sph-projects-and-codes>

# Kody SPH

---

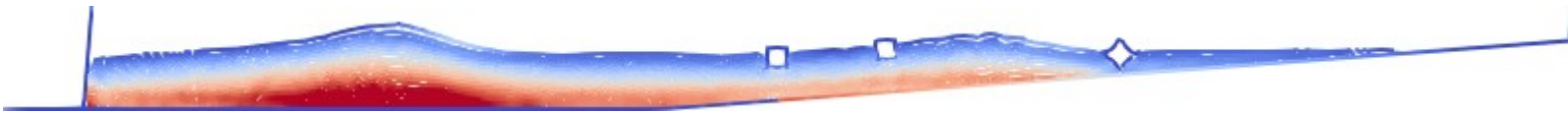
Skrypt \*.sh do uruchamiania przykładów:

```
#!/bin/bash
cd source/SPHYSICSgen2D
make -f SPHYSICSgen_gfortran.mak clean
make -f SPHYSICSgen_gfortran.mak
cd ../../run_directory/Case1
../../execs/SPHYSICSgen_2D < Case1.txt > Case1.out
cp SPHYSICS.mak ../../source/SPHYSICS2D
cd ../../source/SPHYSICS2D
make -f SPHYSICS.mak clean
make -f SPHYSICS.mak
cd ../../run_directory/Case1
../../execs/SPHYSICS_2D
```

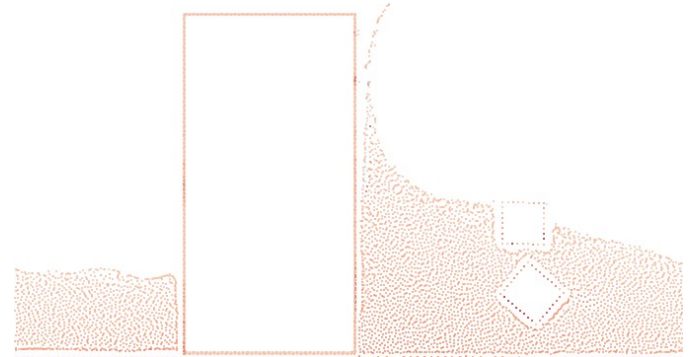
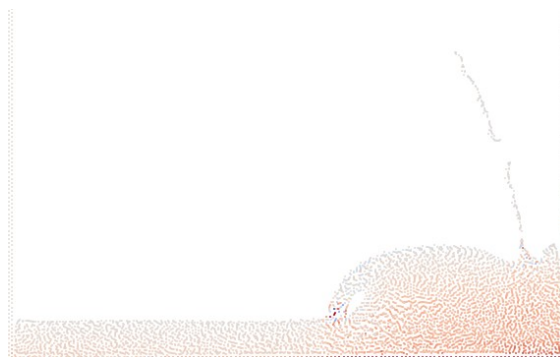


Przed uruchomieniem należy w pliku konfiguracyjnym danego przykładu (np. Case1.txt) ustawić rodzaj zastosowanego kompilatora.

# Kody SPH



Przykłady dostępne w  
programie SPHysics





# Kody SPH

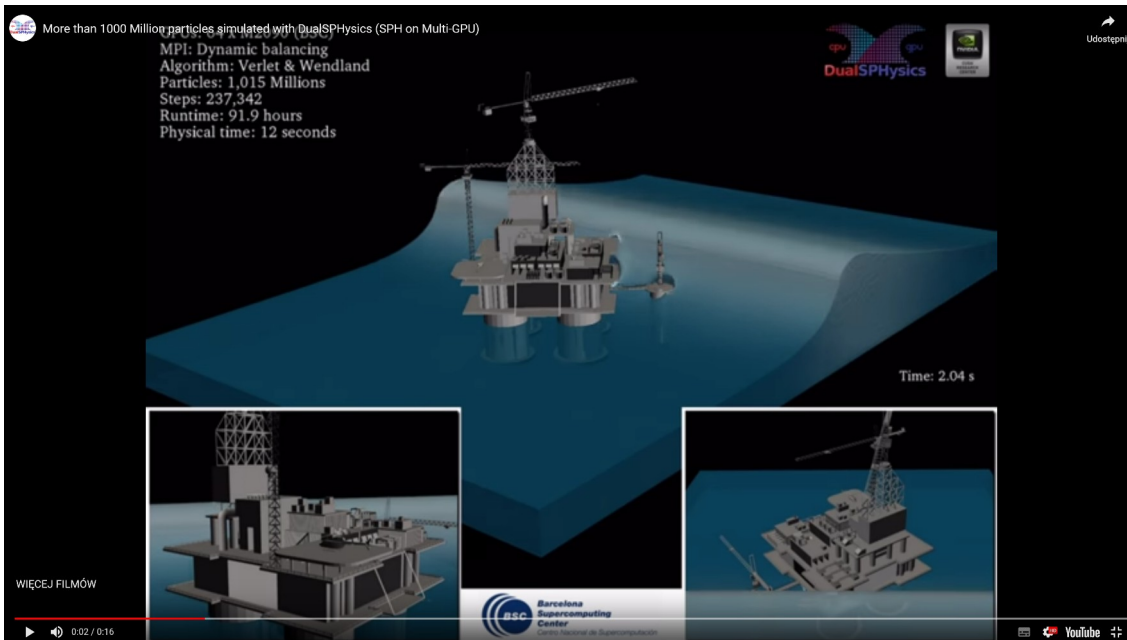
---

**DualSPHysics** (C++, CUDA, GPU, single/parallel, 3D):



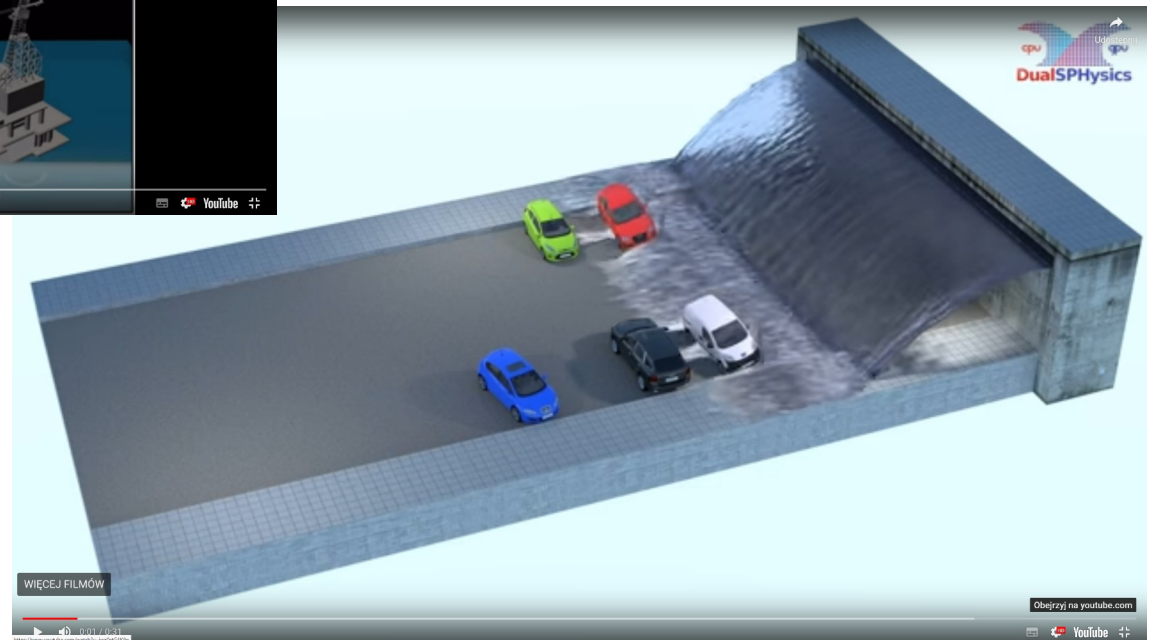
- licencja typu LGPL (wymaga rejestracja)
- brak interfejsu
- powstał na bazie programu SPHysics
- dostępna podstawowa dokumentacja (on-line)
- dostępne szkolenia
- jest kodem hybrydowym: SPH + DEM
- umożliwia modelowanie przepływów jedno i wielofazowych
- umożliwia modelowanie przepływów z powierzchnią swobodną
- umożliwia modelowanie przepływów z obiektami pływającymi
- umożliwia modelowanie płynów newtonowskich i nienewtonowskich
- posiada wiele różnych warunków brzegowych (w tym ruchome ścianki)
- może importować pliki VTK, PLY oraz STL
- posiada sporo narzędzi do obróbki i analizy wyników

# Kody SPH



Napływ fali na platformę wiertniczą

Oddziaływanie fali powodziowej na pojazdy



# Kody SPH

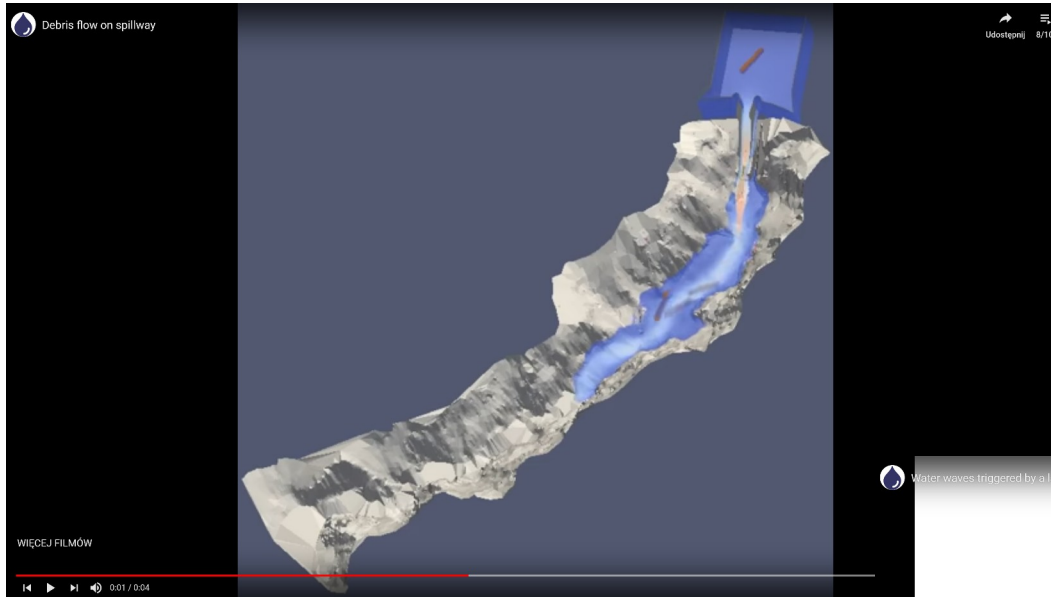
---

## GPUSPH ():



- licencja typu LGPL
- nie posiada interfejsu
- dostępna podstawowa dokumentacja w formacie PDF
- umożliwia modelowanie przepływów jednofazowych
- umożliwia modelowanie przepływów z powierzchnią swobodną
- posiada wiele różnych warunków brzegowych (w tym ruchome ścianki)
- posiada rozbudowane opcje modelowania fal uderzeniowych

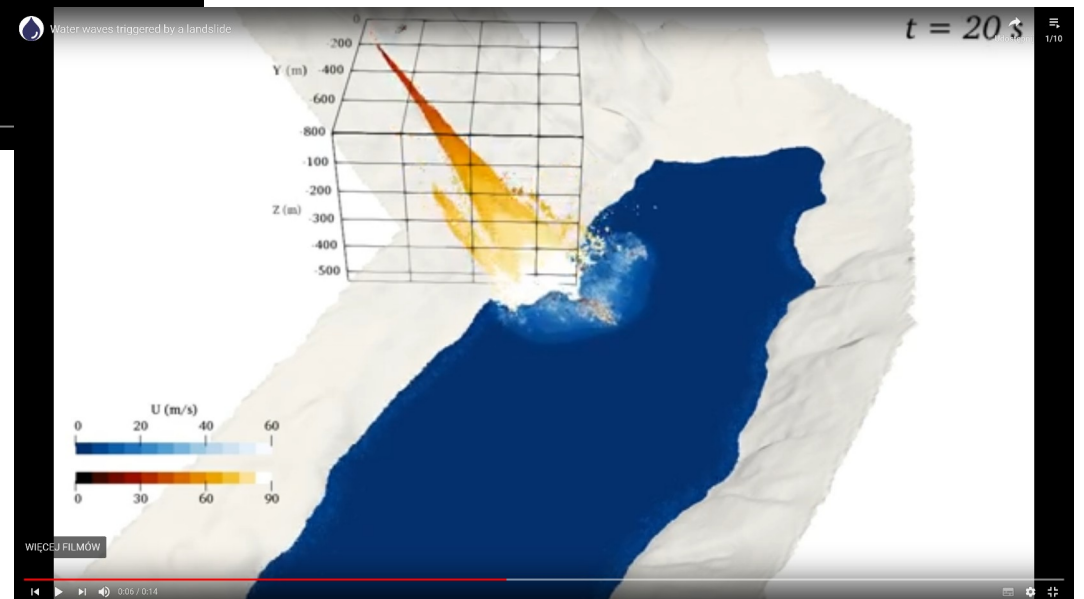
# Kody SPH



Modelowanie ruchu  
kłód drzewa w rzece

Modelowanie ruchów  
wody wywołanych  
osuwiskiem skalnym

 GPUSPH

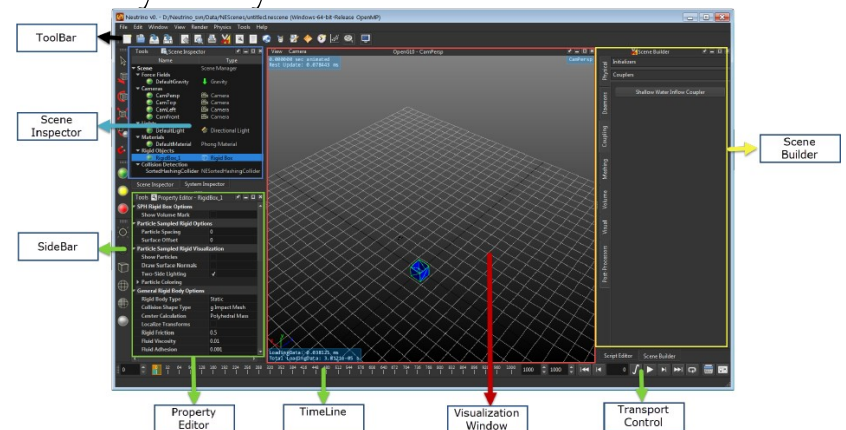


# Kody SPH

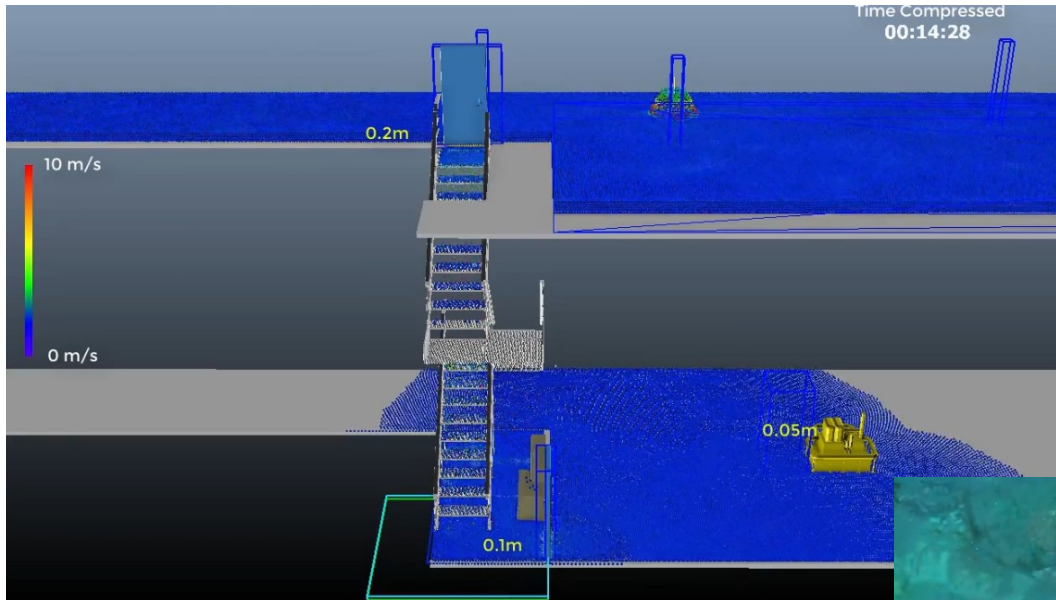
## Neutrino $\emptyset$ :

- produkt komercyjny
- darmowy dla zastosowań niekomercyjnych
- posiada graficzny interfejs użytkownika
- umożliwia modelowanie przepływów jedno i wielofazowych
- umożliwia modelowanie ruchomych ciał stałych (w tym elastycznych)
- umożliwia modelowanie oddziaływań typu fluid-solid
- posiada bardzo rozbudowany model matematyczny

**CENTROID LAB**



# Kody SPH



**CENTROID LAB**

Modelowanie zalewania  
biurowca wodą

Modelowanie ruchów  
roboty podwodnego

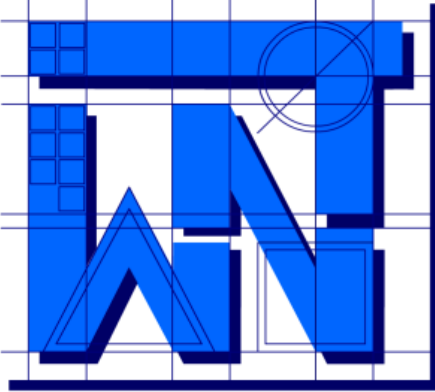


# Podsumowanie

---

Zagadnienia: metody numeryczne w mechanice, całkowita reprezentacja funkcji, domena wpływu i domena wsparcia, aproksymacja funkcji / funkcja wygładzająca, cechy funkcji wygładzającej, dokładność aproksymacji funkcji, aproksymacja pochodnej funkcji, Metoda Cząstek Wygładzonych, dyskretna postać reprezentacji funkcji, dyskretna postać reprezentacji pochodnej funkcji, tworzenie funkcji wygładzających, przykłady funkcji wygładzających, długość wygładzania, symetryzacja interakcji, podstawowe równania hydrodynamiki, aproksymacja równania bilansu masy, aproksymacja równania bilansu pędu, sztuczna lepkość, równanie stanu, równanie stanu, warunki brzegowe, dyskretyzacja czasu, algorytm obliczeniowy, kody SPH.

Wydział Nauk Technicznych



UNIVERSITY OF WARMIA AND MAZURY IN OLSZTYN  
The Faculty of Technical Sciences  
POLAND, 10-957 Olsztyn, M. Oczapowskiego 11  
tel.: (48)(89) 5-23-32-40, fax: (48)(89) 5-23-32-55  
URL: <http://www.uwm.edu.pl/edu/sobieski/> (in Polish)



---

**Dziękuję za uwagę**

**Wojciech Sobieski**

---

Lublana/Olsztyn, 2022-2024