Wydział Nauk Technicznych

UNIVERSITY OF WARMIA AND MAZURY IN OLSZTYN
The Faculty of Technical Sciences
POLAND, 10-957 Olsztyn, M. Oczapowskiego 11
tel.: (48)(89) 5-23-32-40, fax: (48)(89) 5-23-32-55
URL: http://www.uwm.edu.pl/edu/sobieski/ (in Polish)

GEOMETRIA WYKREŚLNA

Wprowadzenie. Punkty. Proste.

wersja: 16 grudnia 2022

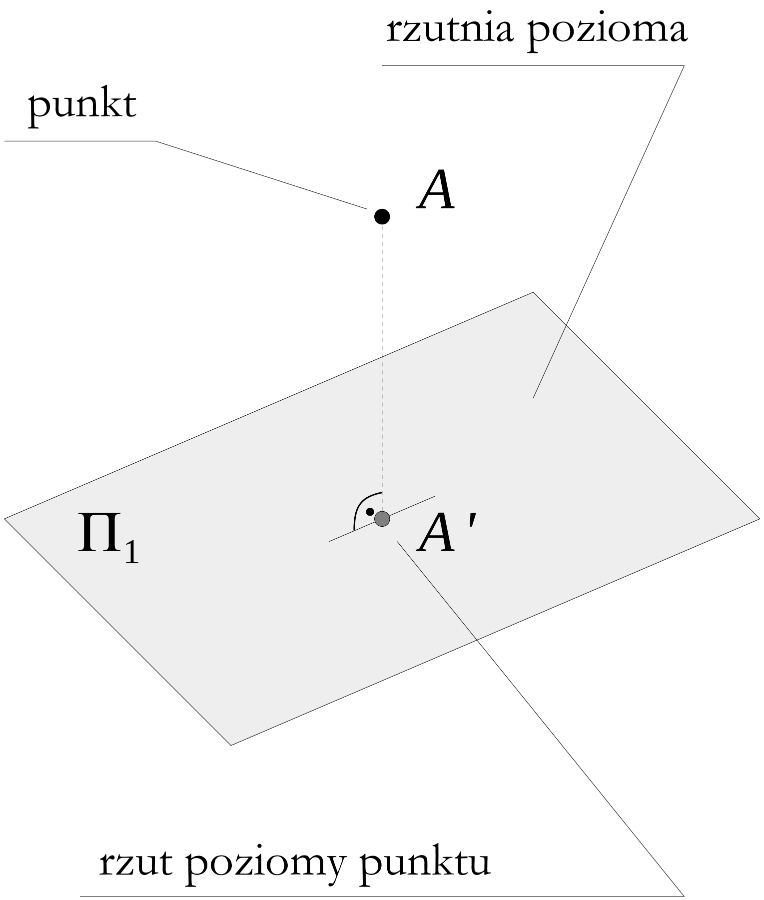
Wojciech Sobieski

Olsztyn, 2021-2022

Idea rzutowania

Co można powiedzieć o położeniu obiektu,
jeżeli mamy tylko jedną płaszczyznę odniesienia?

Idea rzutowania



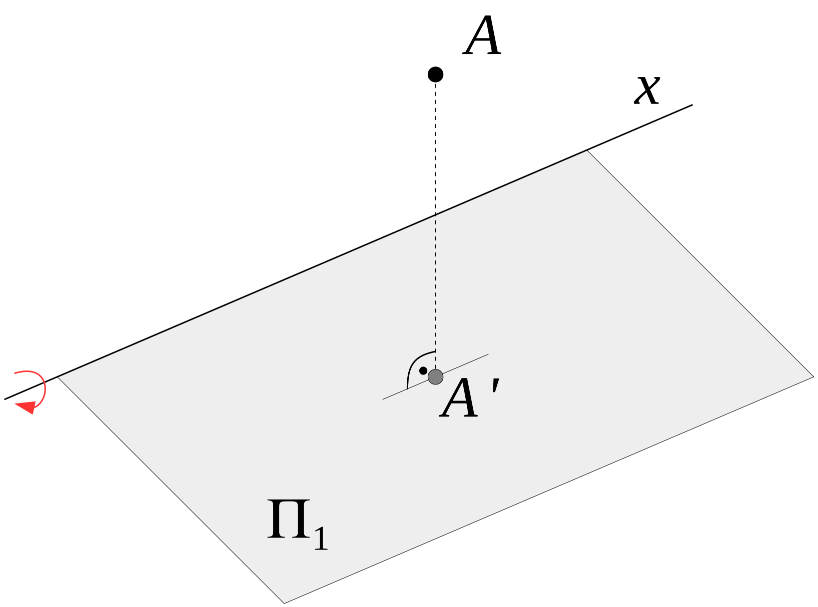
Rzutnia – płaszczyzna zorientowana w przestrzeni
w ściśle określony sposób.

Rzut punktu – miejsce na rzutni,
leżące w najmniejszej możliwej odległości od tego punktu.

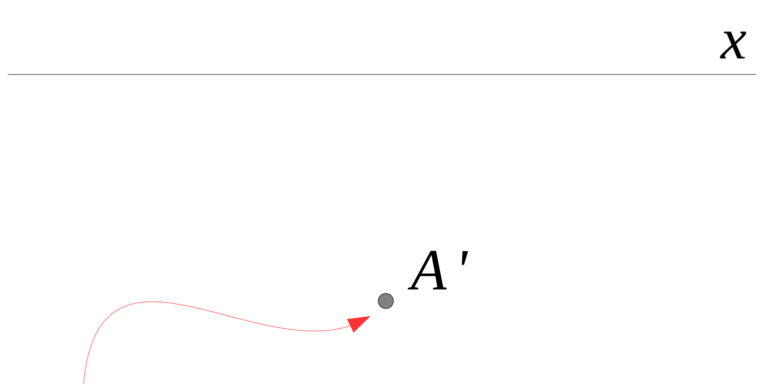
Punkty oznacza się wielkimi literami
alfabetu łacińskiego.

Idea rzutowania

Rzutowanie izometryczne



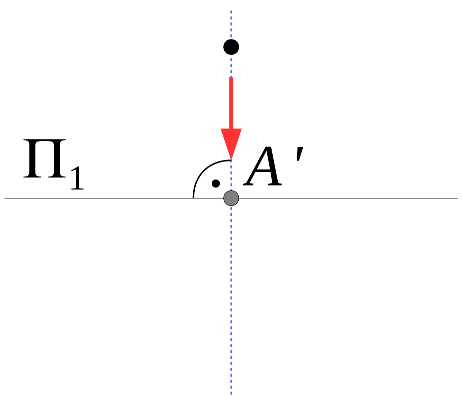
Rzutowanie (metoda) Monge'a

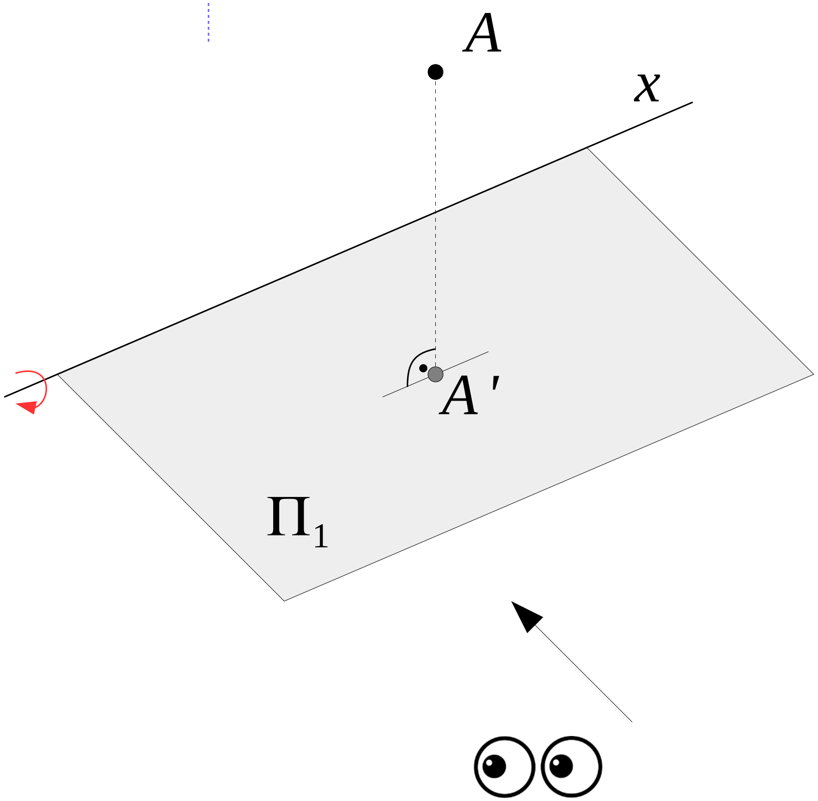


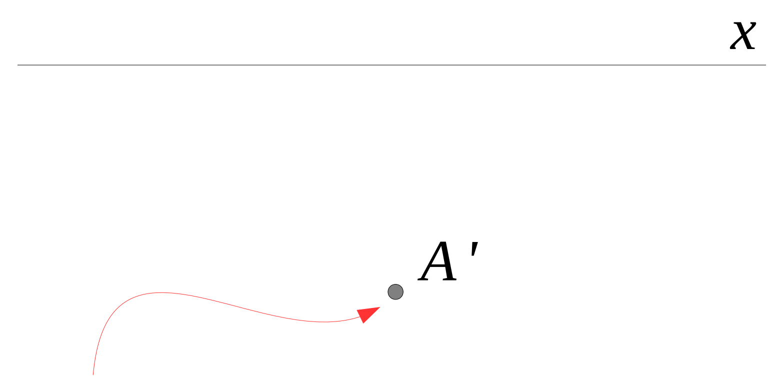
Nie widzimy bezpośrednio punktu A,
tylko dowód jego istnienia w postaci jednego rzutu.

Punkt A znajduje się powyżej czy poniżej rzutni?

Idea rzutowania



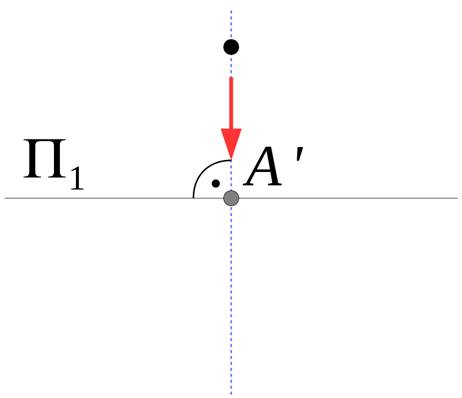


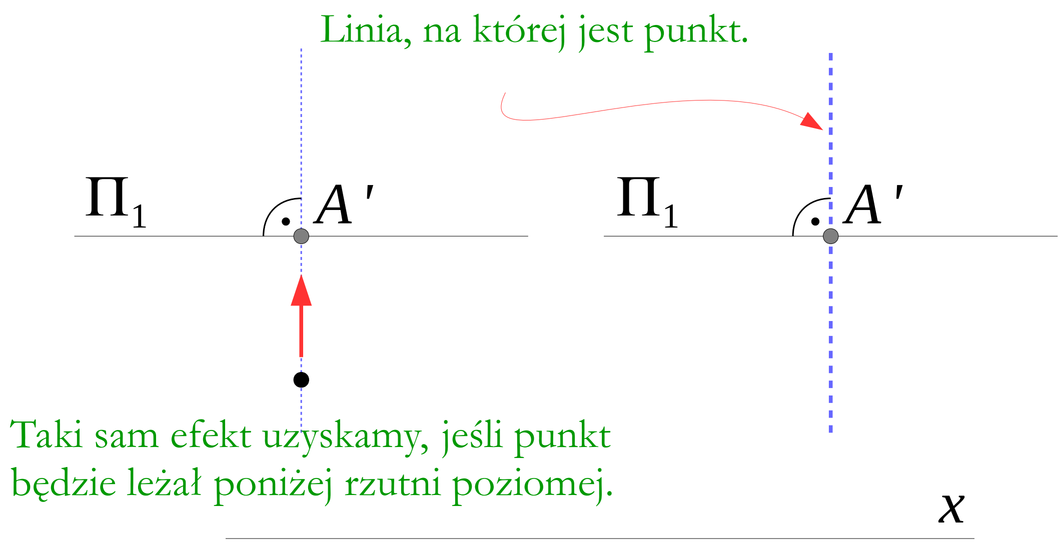


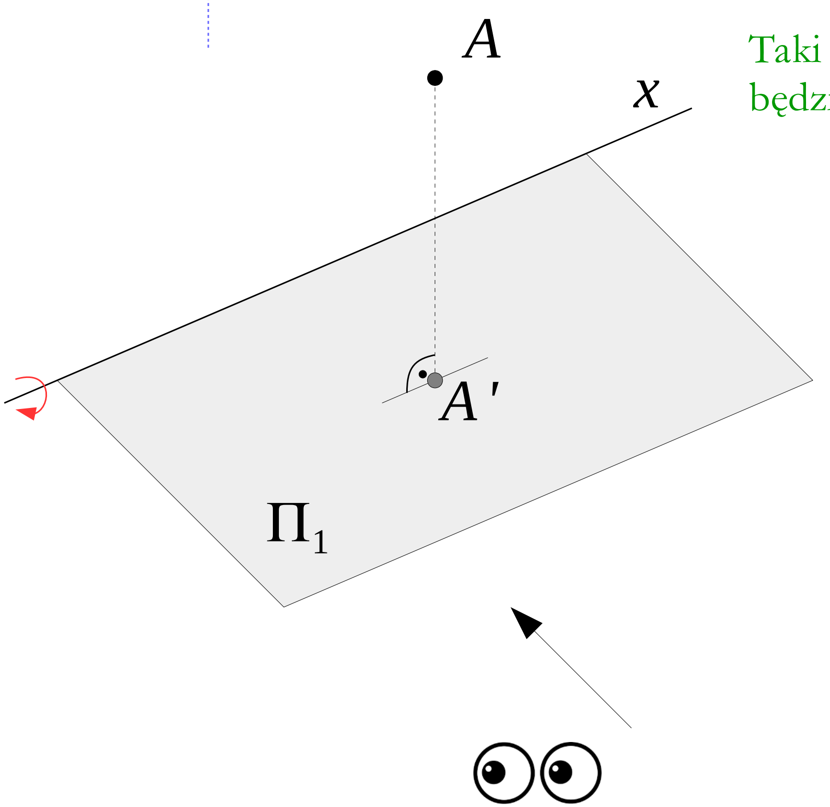
Nie widzimy bezpośrednio punktu A,
tylko dowód jego istnienia w postaci jednego rzutu.

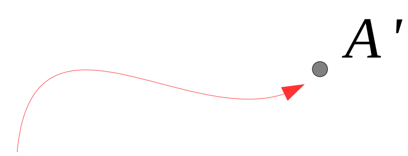
Punkt A znajduje się powyżej czy poniżej rzutni?

Idea rzutowania





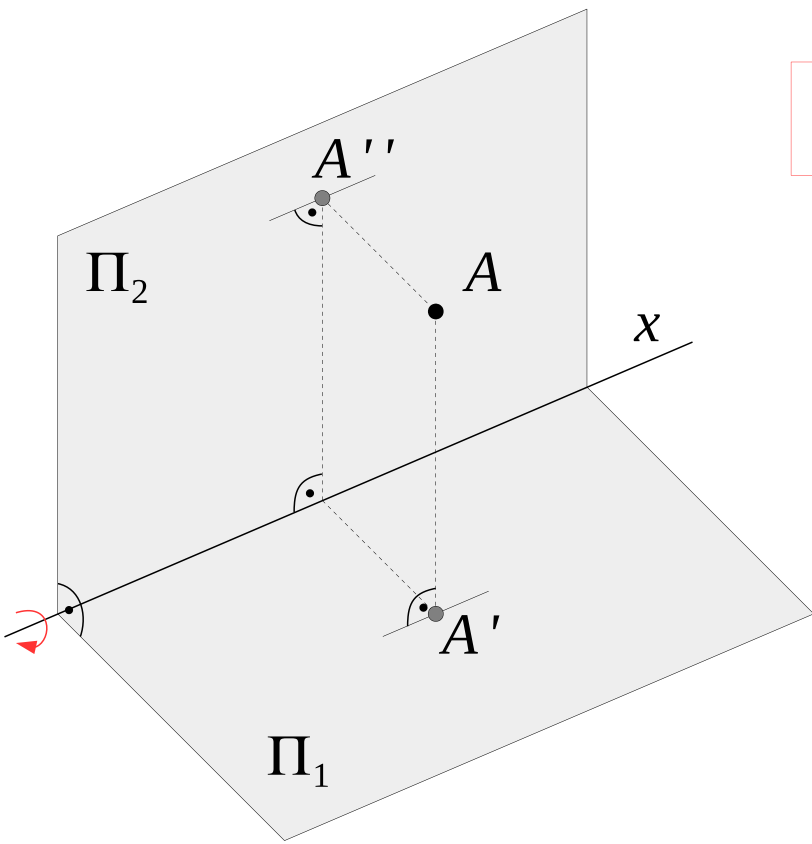




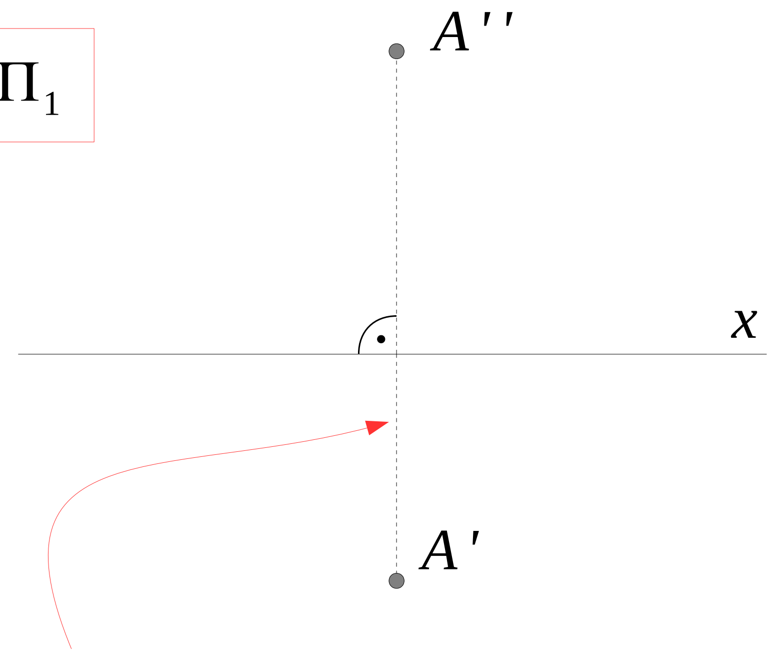
Nie widzimy bezpośrednio punktu A,
tylko dowód jego istnienia w postaci jednego rzutu.

Punkt A znajduje się powyżej czy poniżej rzutni?

Idea rzutowania



$\Pi_2 \perp \Pi_1$



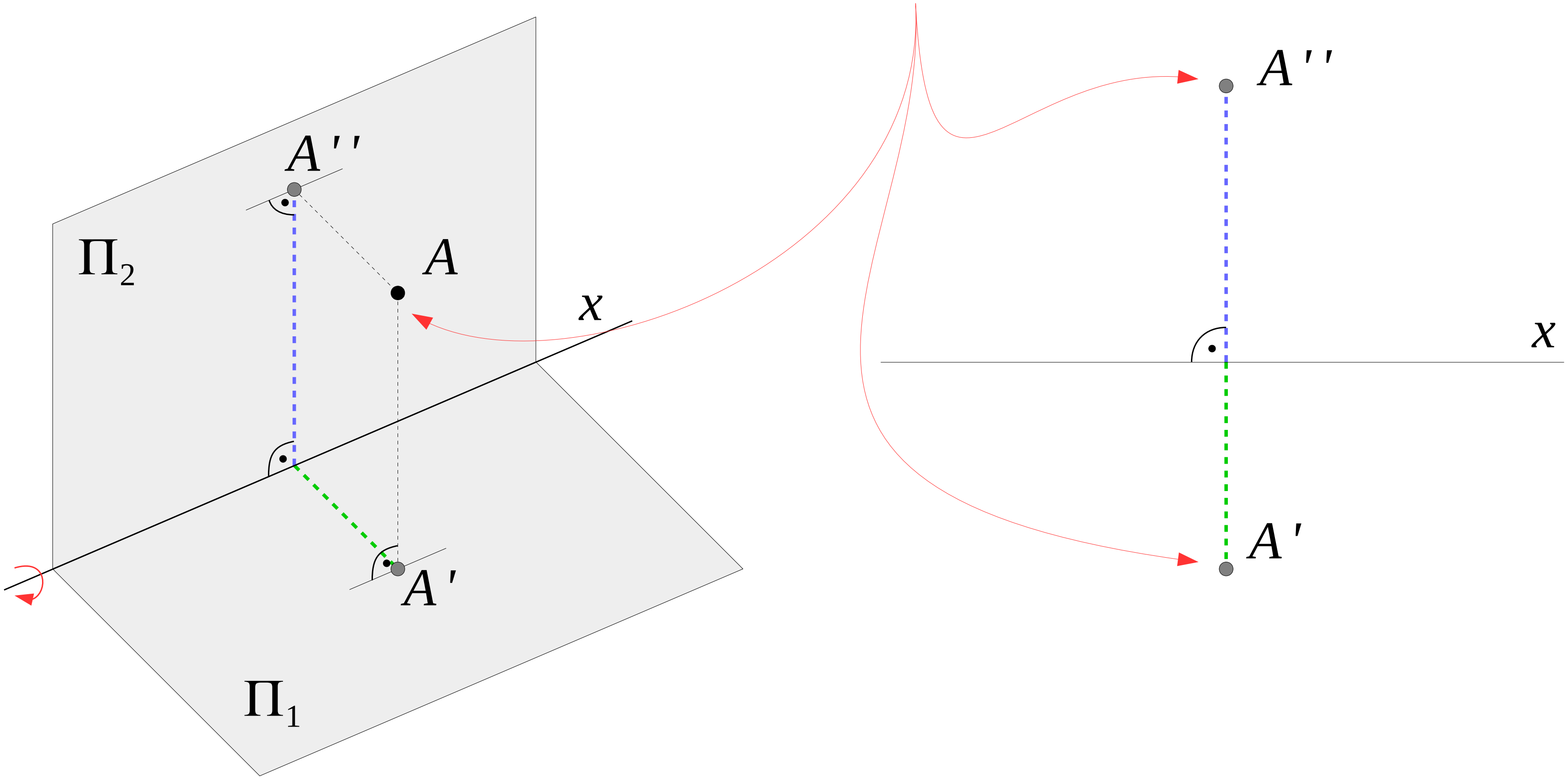
Tę linię nazywamy odnoszącą:

- Odnosząca jest zawsze prostopadła do osi x.
- Rzut poziomy i rzut pionowy punktu leżą (**zawsze**, **zawsze**) na jednej odnoszącej.

Jak dokładniej określić położenie punktu – może dodać więcej rzutni?

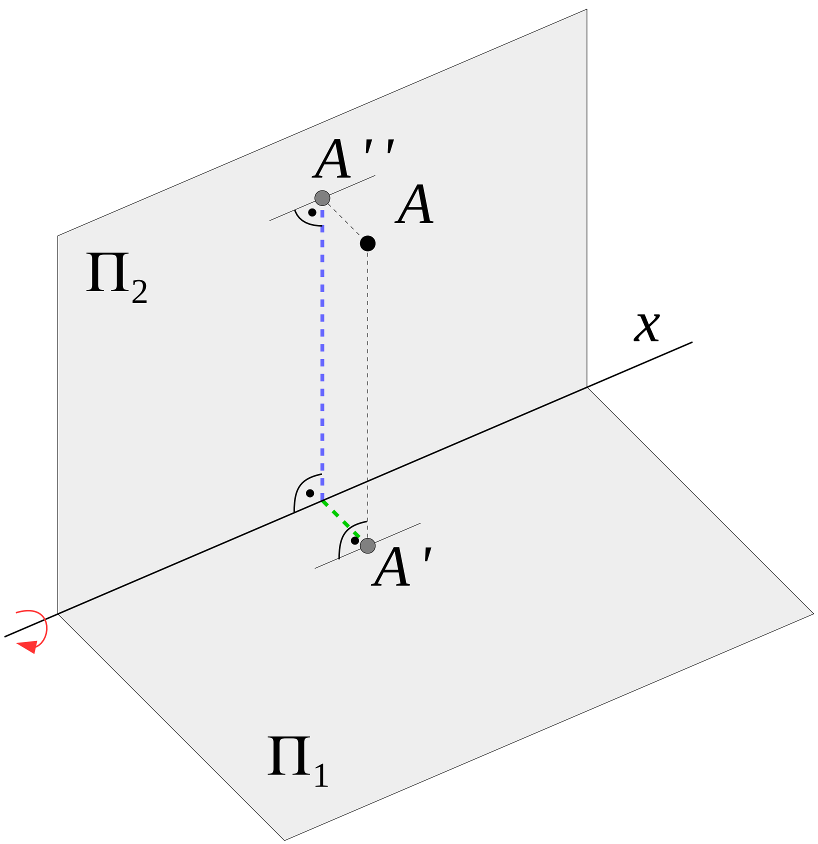
Idea rzutowania

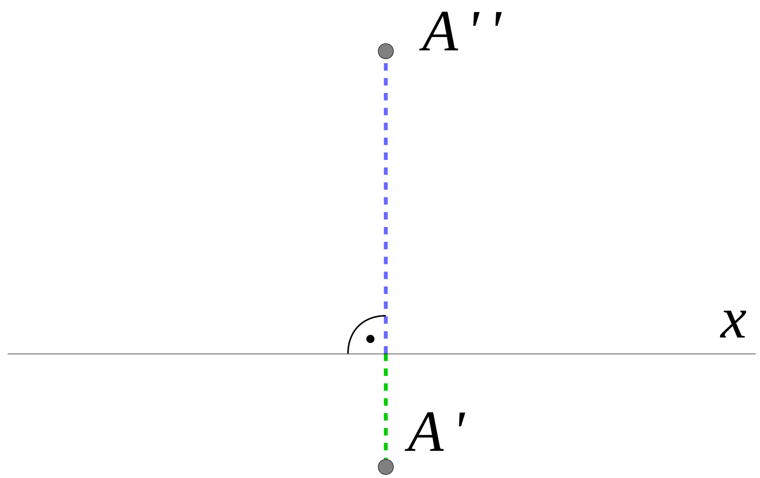
Punkt jest czarny, a jego rzut szary.



Zwróćmy uwagę na odległości – które są sobie równe?

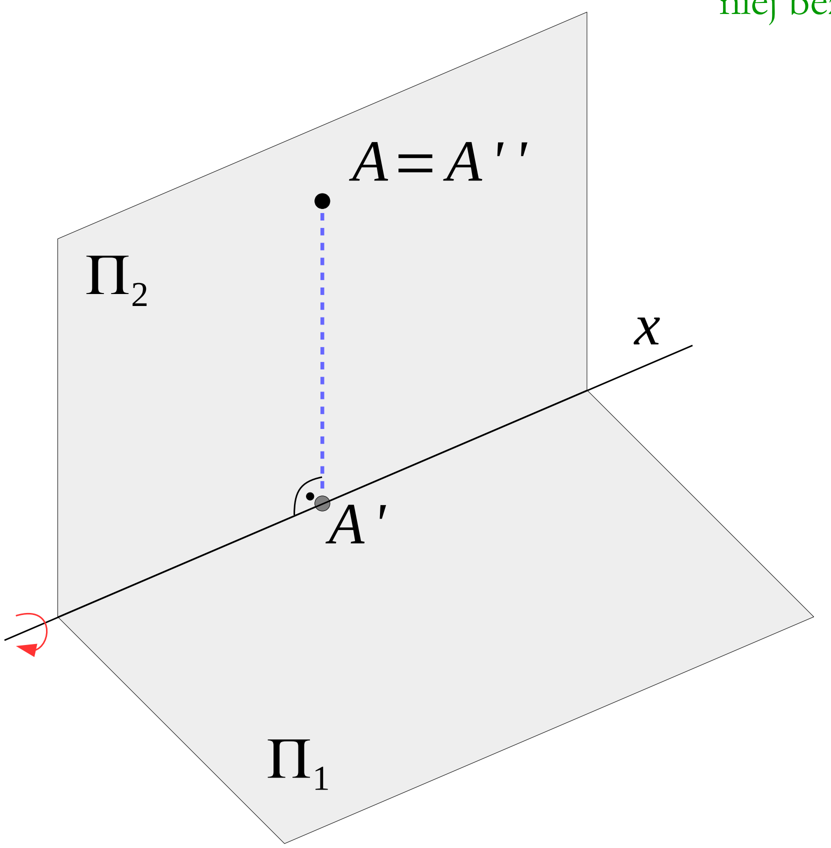
Idea rzutowania



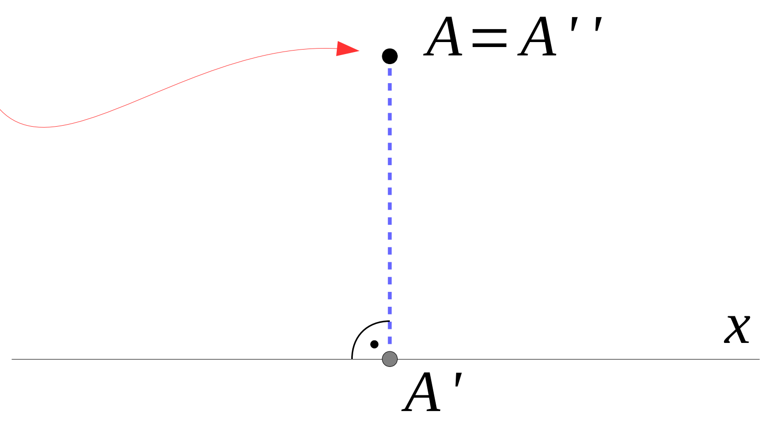


Co będzie się działo,
gdy przysuniemy punkt A bliżej rzutni pionowej?

Idea rzutowania

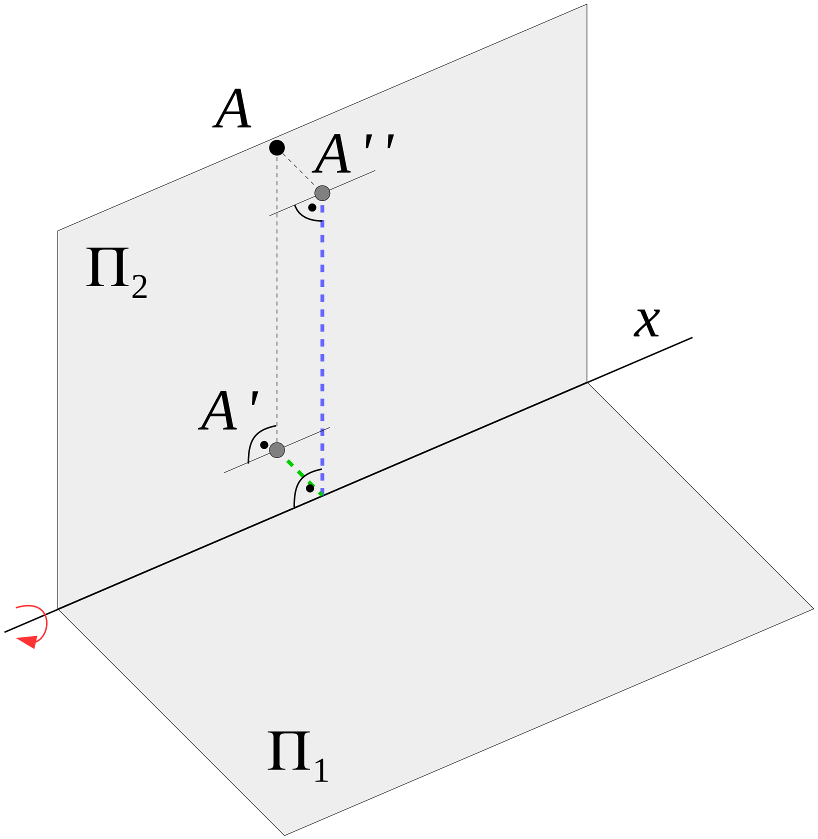


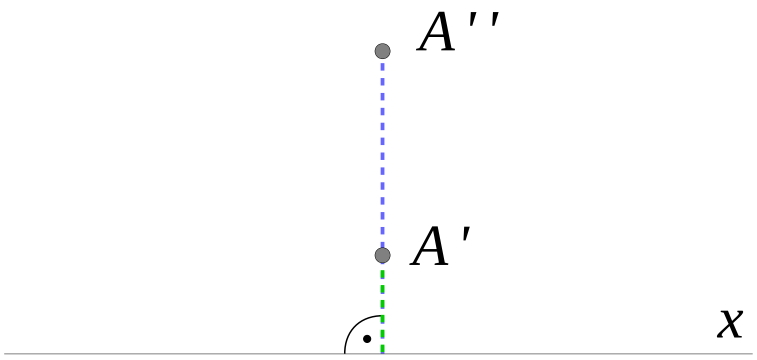
W tym przypadku punkt leży na rzutni, a więc może być na niej bezpośrednio zaznaczony.



Czy punkt A może leżeć na rzutni pionowej?

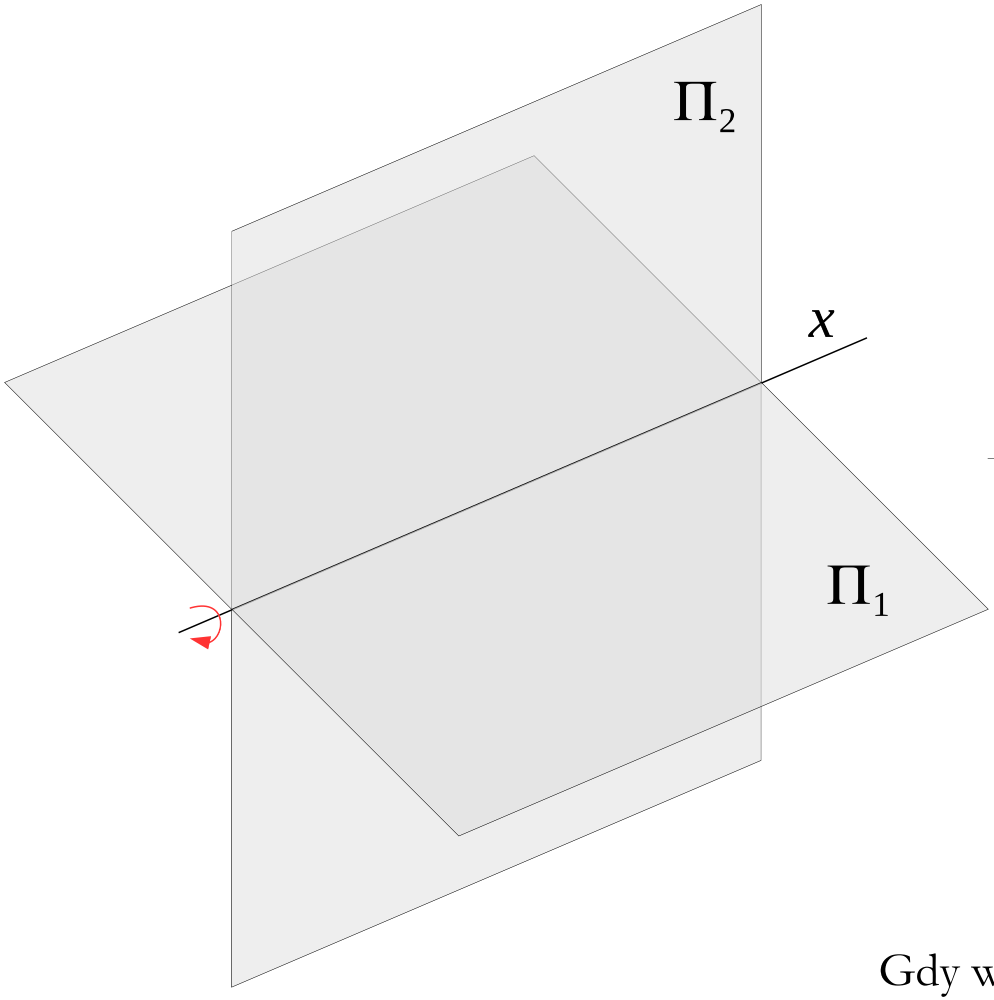
Idea rzutowania





Czy punkt A może leżeć za rzutnią pionową?

Układ rzutni w przestrzeni 2D

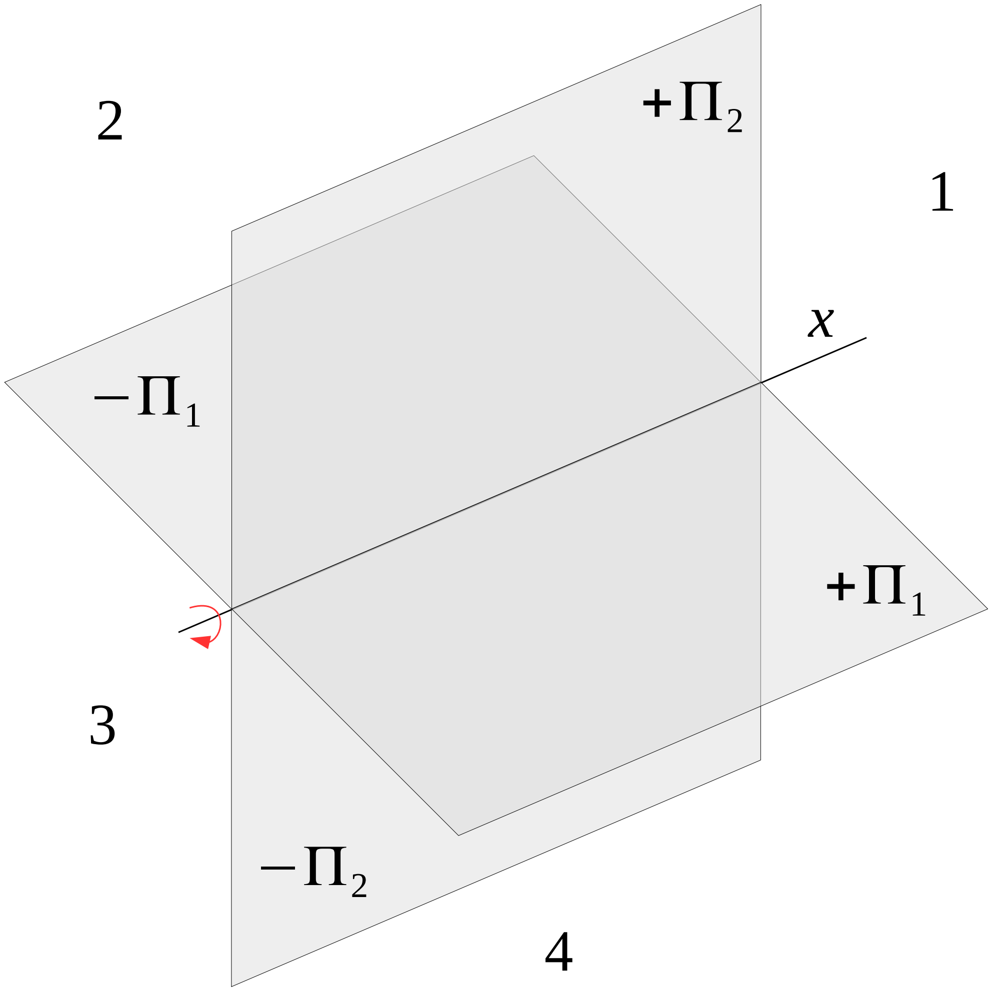


Obszar nad osią x reprezentuje
górną połowę rzutni pionowej
i jednocześnie tylną połowę rzutni poziomej.

Obszar pod osią x reprezentuje
przednią połowę rzutni poziomej
i jednocześnie dolną połowę rzutni pionowej.

Gdy wprowadzimy 2 płaszczyzny rzutujące,
to ile mamy fragmentów przestrzeni?

Układ rzutni w przestrzeni 2D



Czasami połówki rzutni oznacza się niezależnie, dodając znak „+” lub „–”.

$+\Pi_1 \quad +\Pi_2$ - obszar ćwiartki 1

$-\Pi_1 \quad +\Pi_2$ - obszar ćwiartki 2

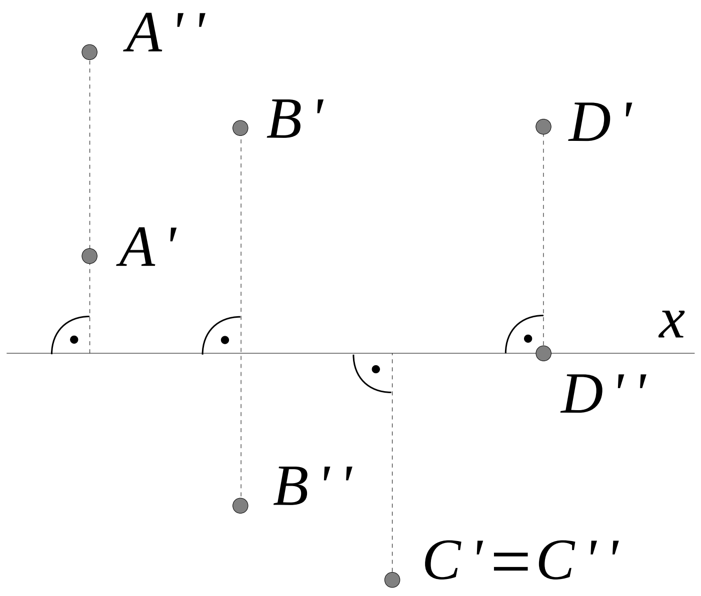
$-\Pi_1 \quad -\Pi_2$ - obszar ćwiartki 3

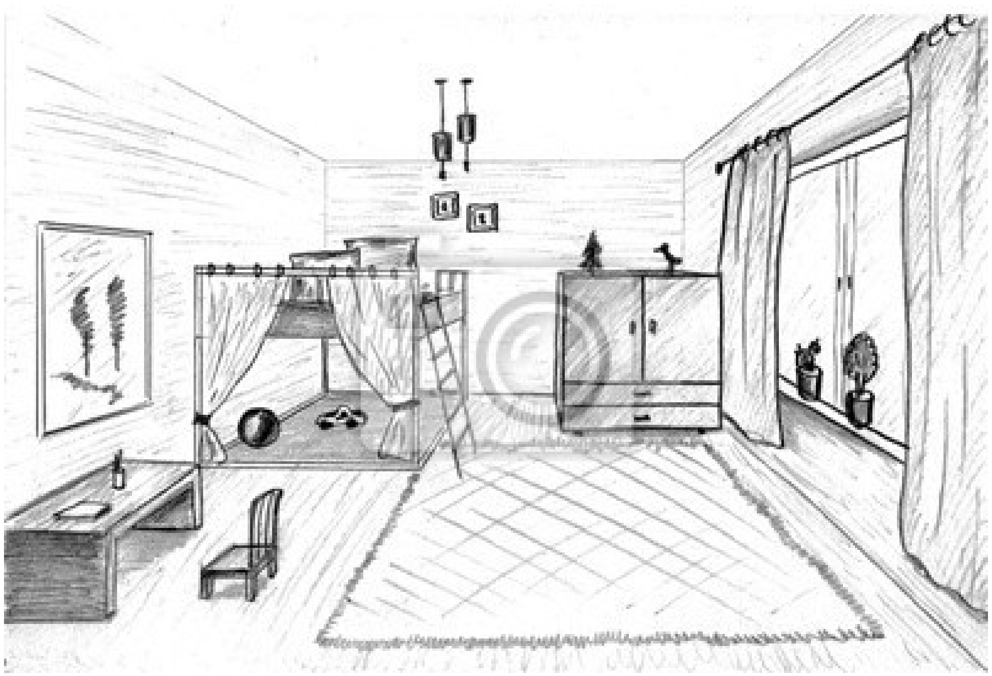
$+\Pi_1 \quad -\Pi_2$ - obszar ćwiartki 4

Skoro są 4 fragmenty, to nazywamy je ćwiartkami.

Punkt w przestrzeni 2D

Mając dane rzuty punktu można określić,
w której ćwiartce znajduje się ten punkt.

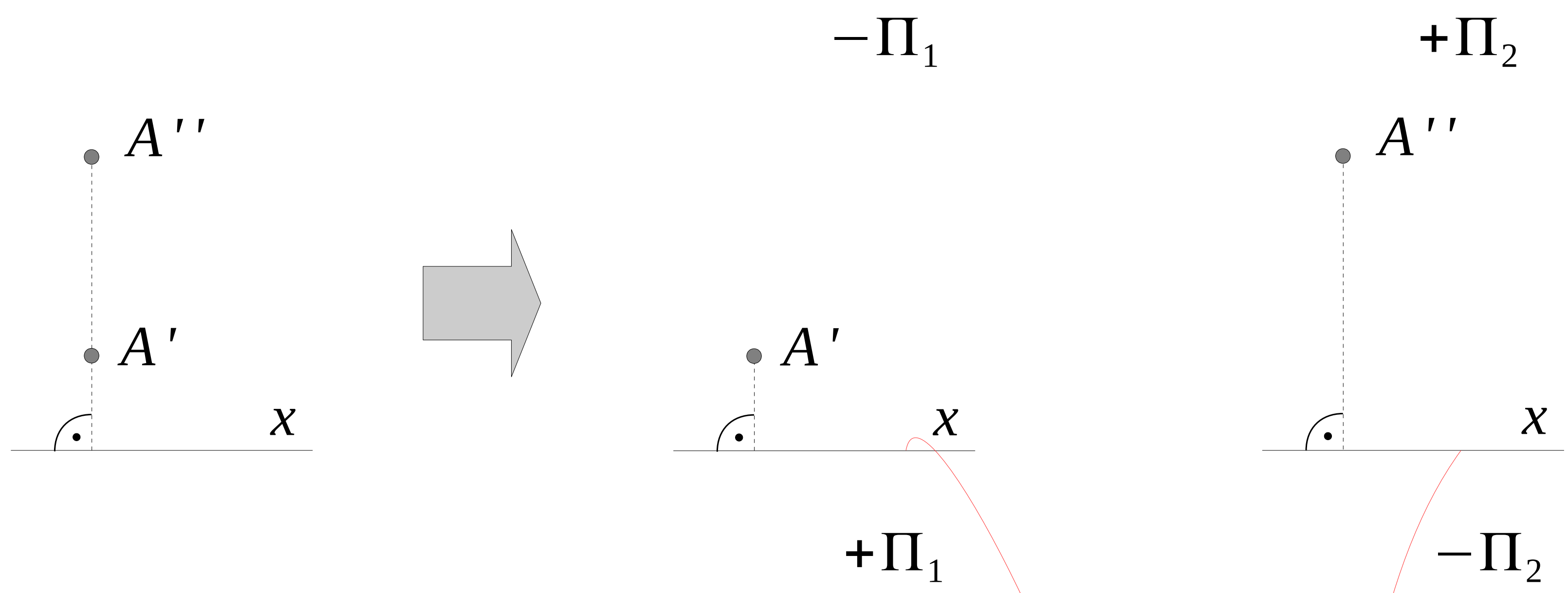




W których ćwiartkach znajdują się punkty A, B, C i D?

Wyobrażenie pokoju ułatwi odpowiedź na pytanie („primy" – podłoga, „bisy" – ściana).

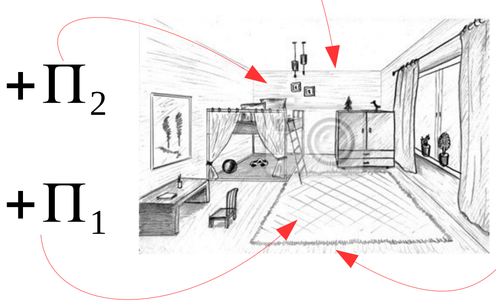
Punkt w przestrzeni 2D



tu oś x reprezentuje
„ścianę" widzianą od góry

Rysunek jest złożeniem (nałożeniem na siebie) dwóch widoków:

- z góry – gdy patrzymy na „primy",
- z przodu – gdy patrzymy na „bisy".

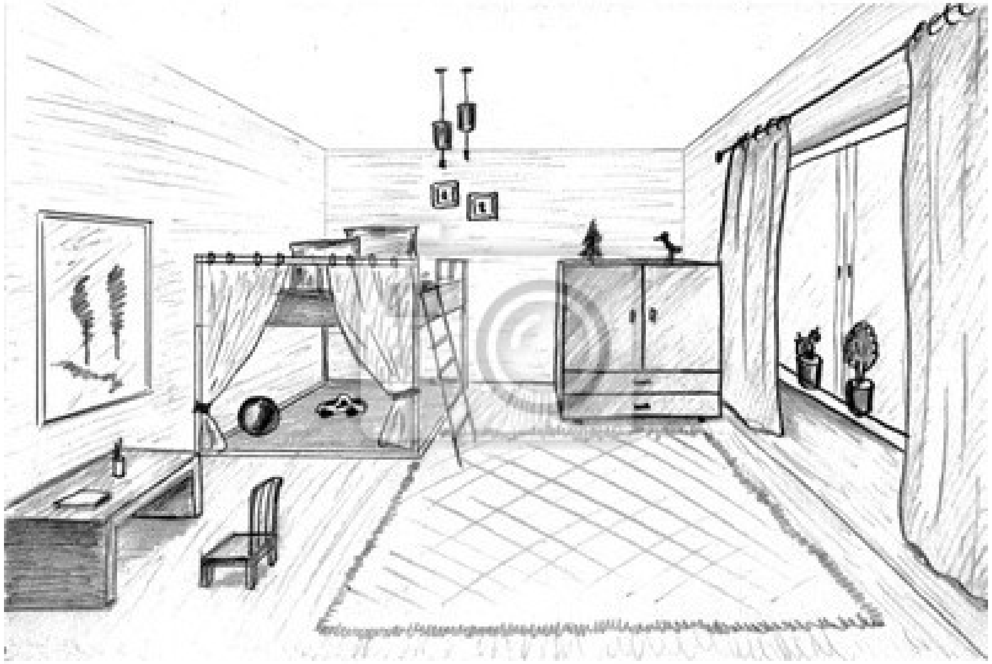


tu oś x reprezentuje
„podłogę" widzianą od przodu

Punkt w przestrzeni 2D

$$\overset{y\ \ z}{X(g,w)}$$

Mając współrzędne punktu można określić,
w której ćwiartce znajduje się ten punkt.



Sądząc po głębokości,
punkt A leży w ćwiartce 1 lub 4.

Sądząc po wysokości,
punkt A leży w ćwiartce 3 lub 4.

1,4 3,4 $\longrightarrow$ 4

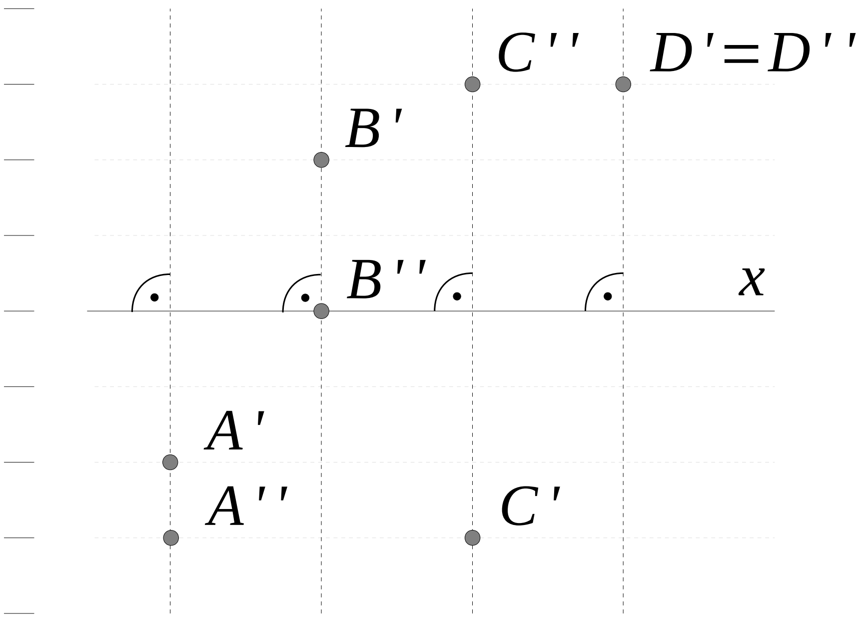
$A(2,-3)$ $C(3,3)$

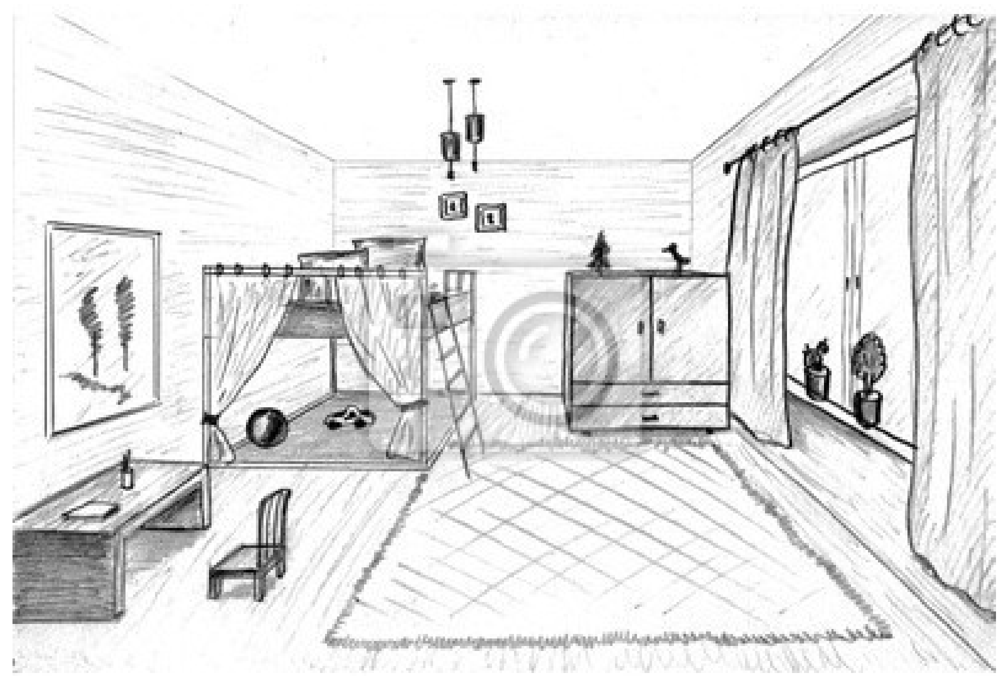
$B(-2,0)$ $D(-3,3)$

głębokość (g) – odległość od Π_2 (+ przód, – tył)

wysokość (w) – odległość od Π_1 (+ góra, – dół)

Punkt w przestrzeni 2D



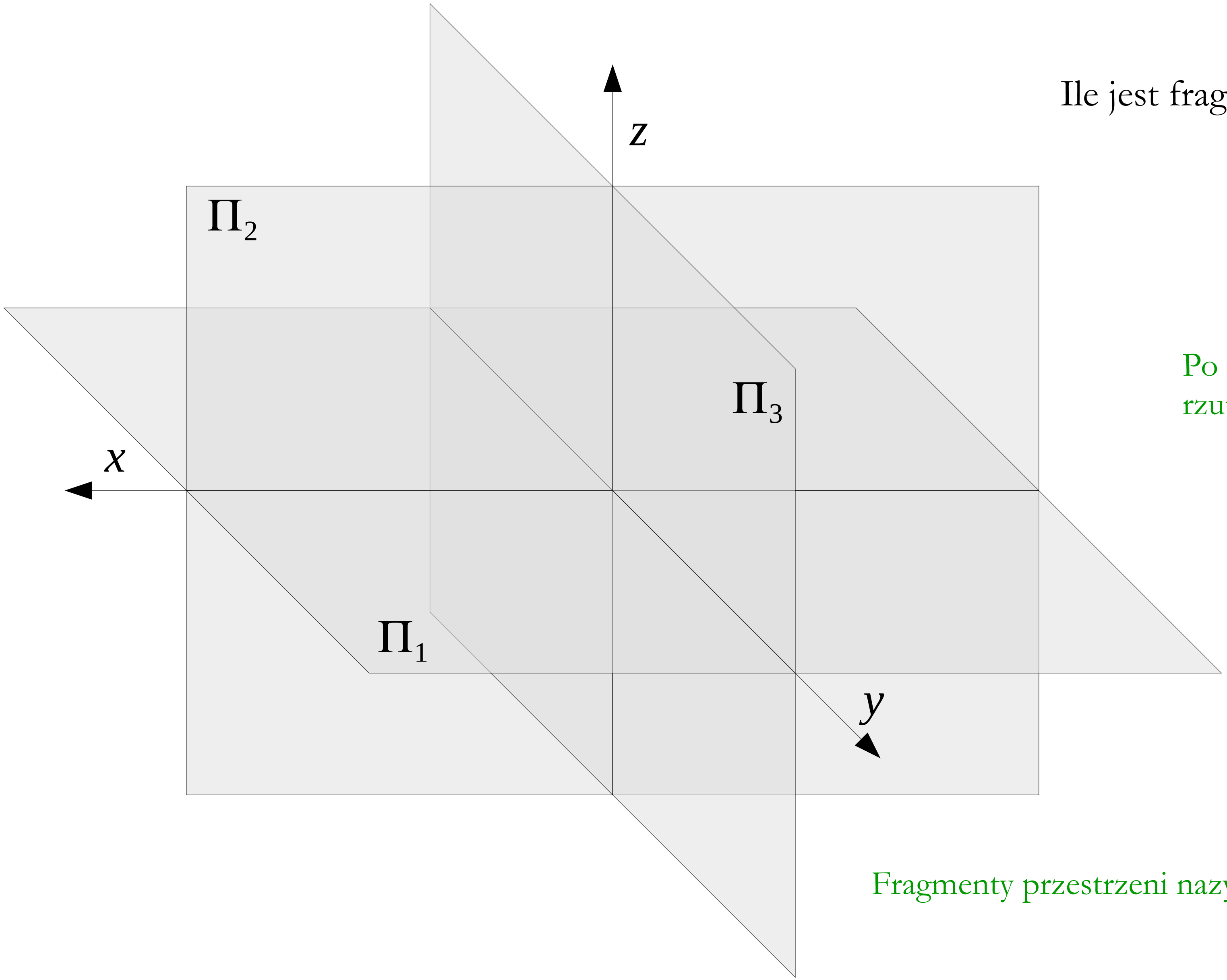


$A(2,-3)$ $C(3,3)$

$B(-2,0)$ $D(-3,3)$

Aby rysować położenie,
trzeba wprowadzić jakąś jednostkę długości.

Układ rzutni w przestrzeni 3D



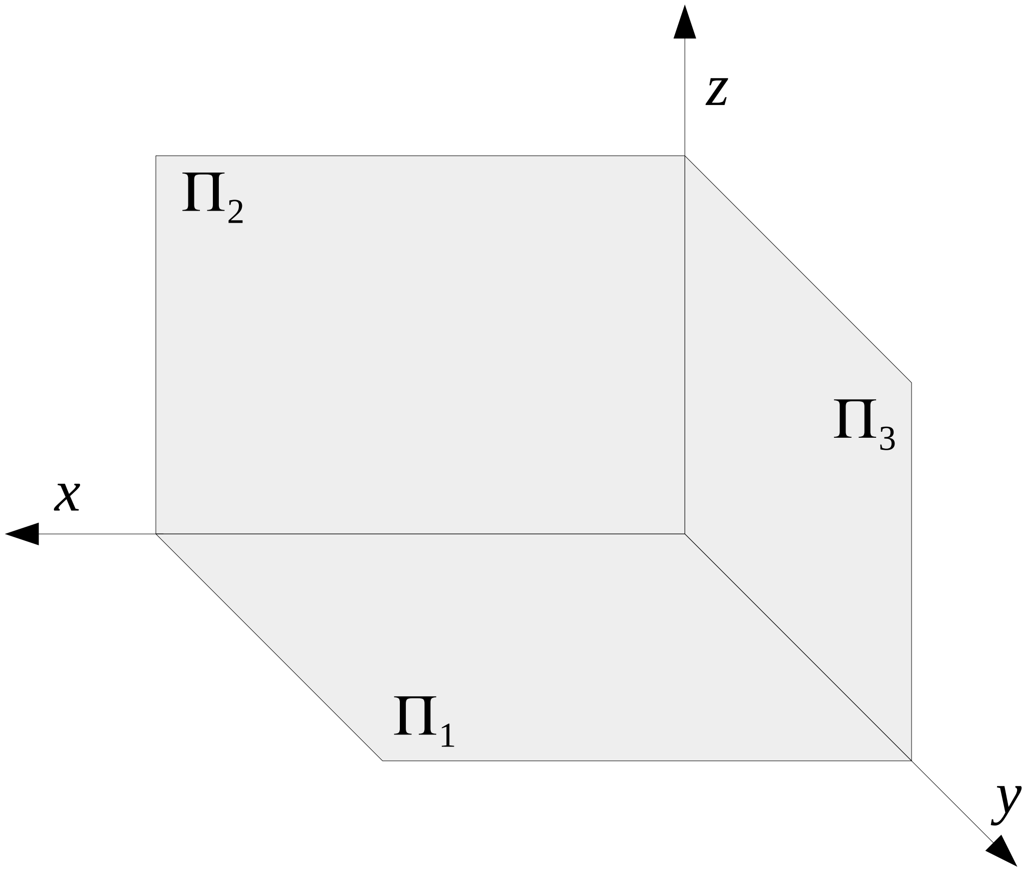
Ile jest fragmentów przestrzeni?

Po prawej stronie dodajemy rzutnię boczną.

$$\Pi_3 \perp \Pi_1$$
$$\Pi_3 \perp \Pi_2$$

Fragmenty przestrzeni nazywamy oktanami.

Punkt w przestrzeni 3D



Teraz aby określić położenie punktu potrzebne są trzy odległości (współrzędne).

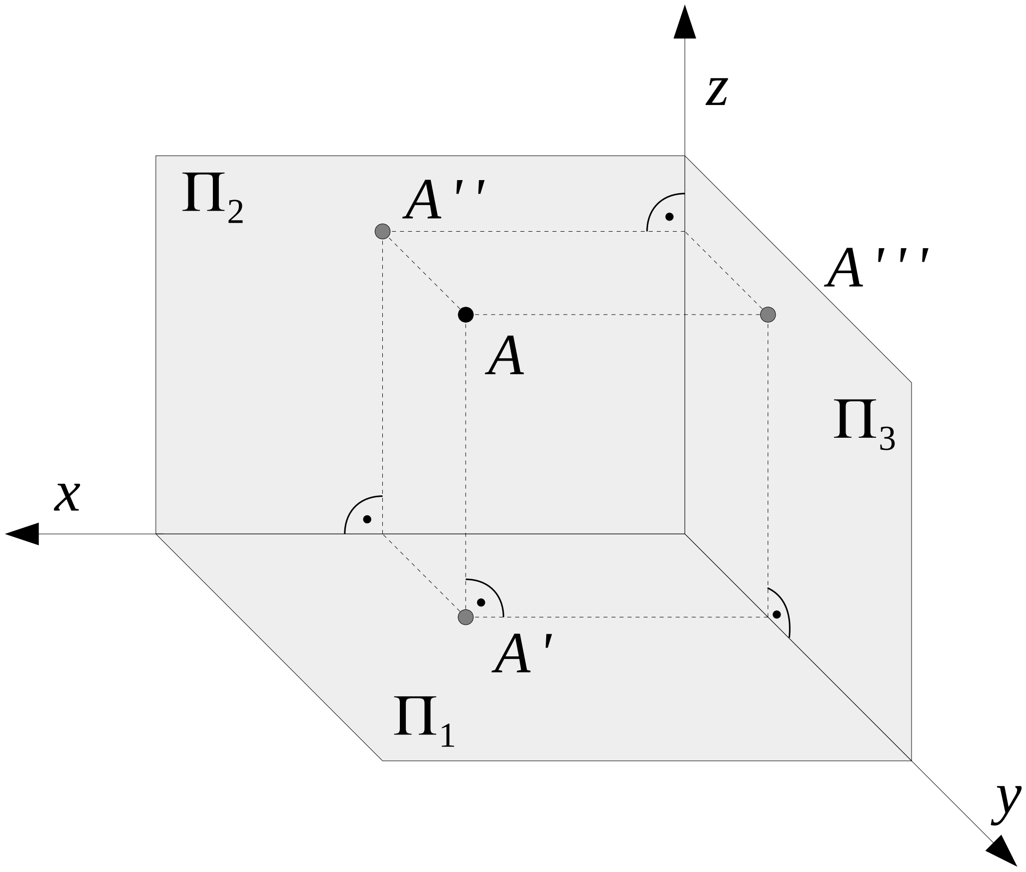
$$X(\overset{x}{s}, \overset{y}{g}, \overset{z}{w})$$

szerokość (s) – odległość od Π_3
(+ lewa strona, – prawa strona)

głębokość (g) – odległość od Π_2 (+ przód, – tył)

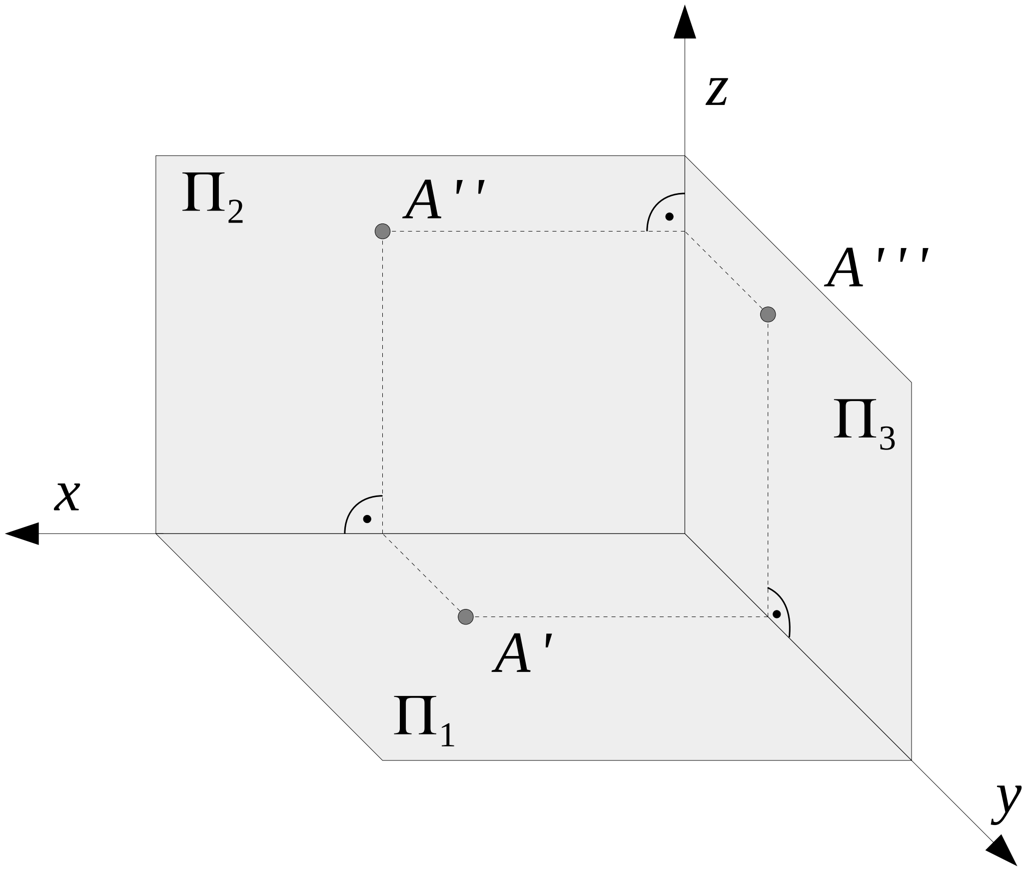
wysokość (w) – odległość od Π_1 (+ góra, – dół)

Punkt w przestrzeni 3D



Jak przedstawić trzy rzuty punktu znajdującego się w przestrzeni na jednej płaszczyźnie (kartce)?

Punkt w przestrzeni 3D

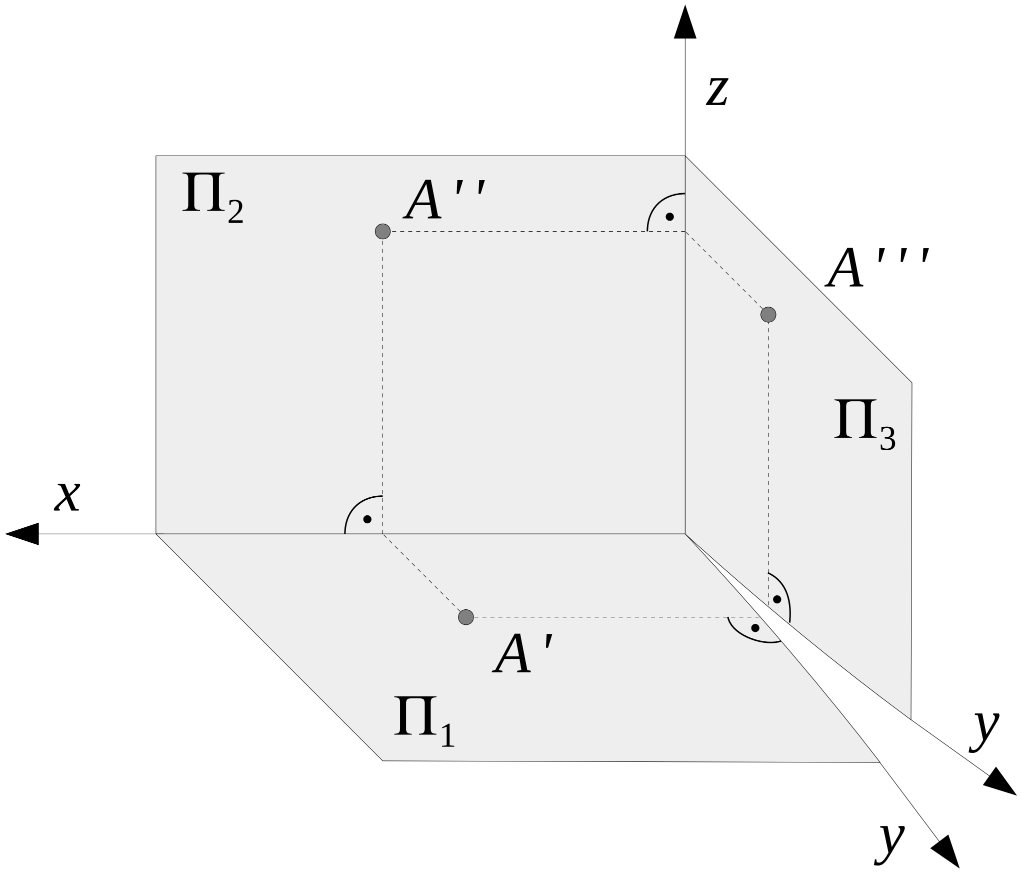


Jak przedstawić trzy rzuty punktu znajdującego się w przestrzeni na jednej płaszczyźnie (kartce)?

- usuwamy sam punkt, zostawiając tylko jego rzuty

Nie może pozostać nic, co nie leży bezpośrednio na którejś z rzutni.

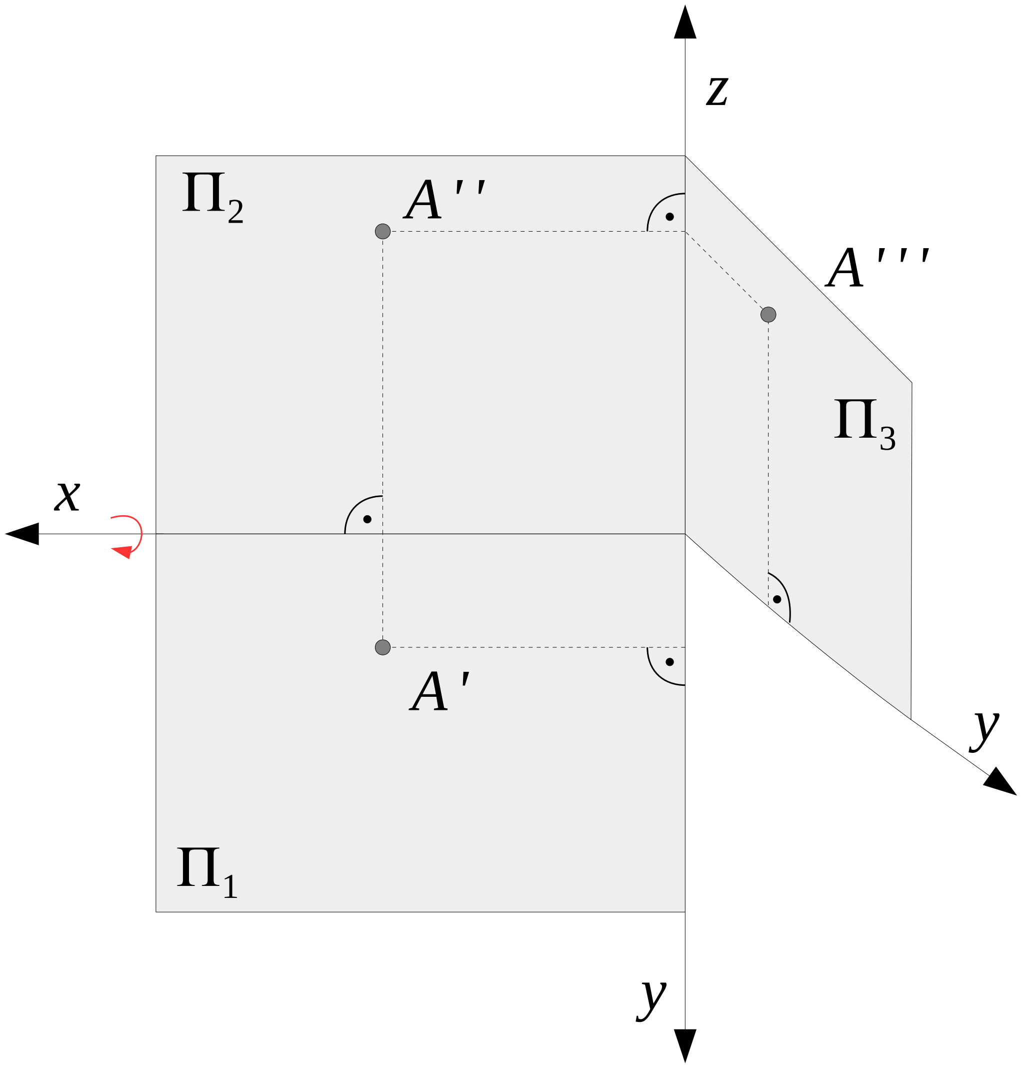
Punkt w przestrzeni 3D



Jak przedstawić trzy rzuty punktu znajdującego się w przestrzeni na jednej płaszczyźnie (kartce)?

- „rozcinamy” oś y

Punkt w przestrzeni 3D

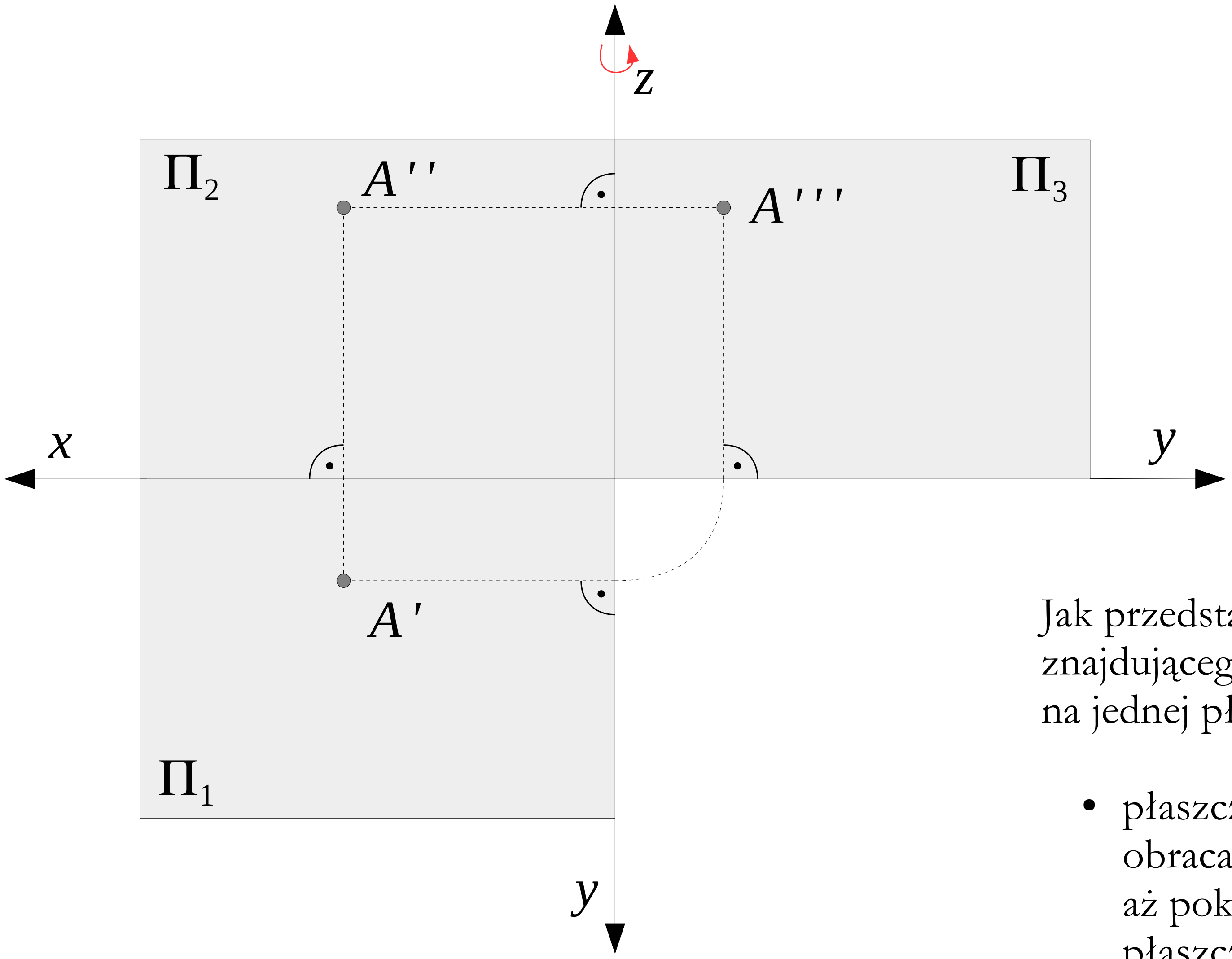


Jak przedstawić trzy rzuty punktu znajdującego się w przestrzeni na jednej płaszczyźnie (kartce)?

- płaszczyznę poziomą obracamy względem osi x, aż pokryje się ona z płaszczyzną pionową

Wcześniej robiliśmy dokładnie tak samo!

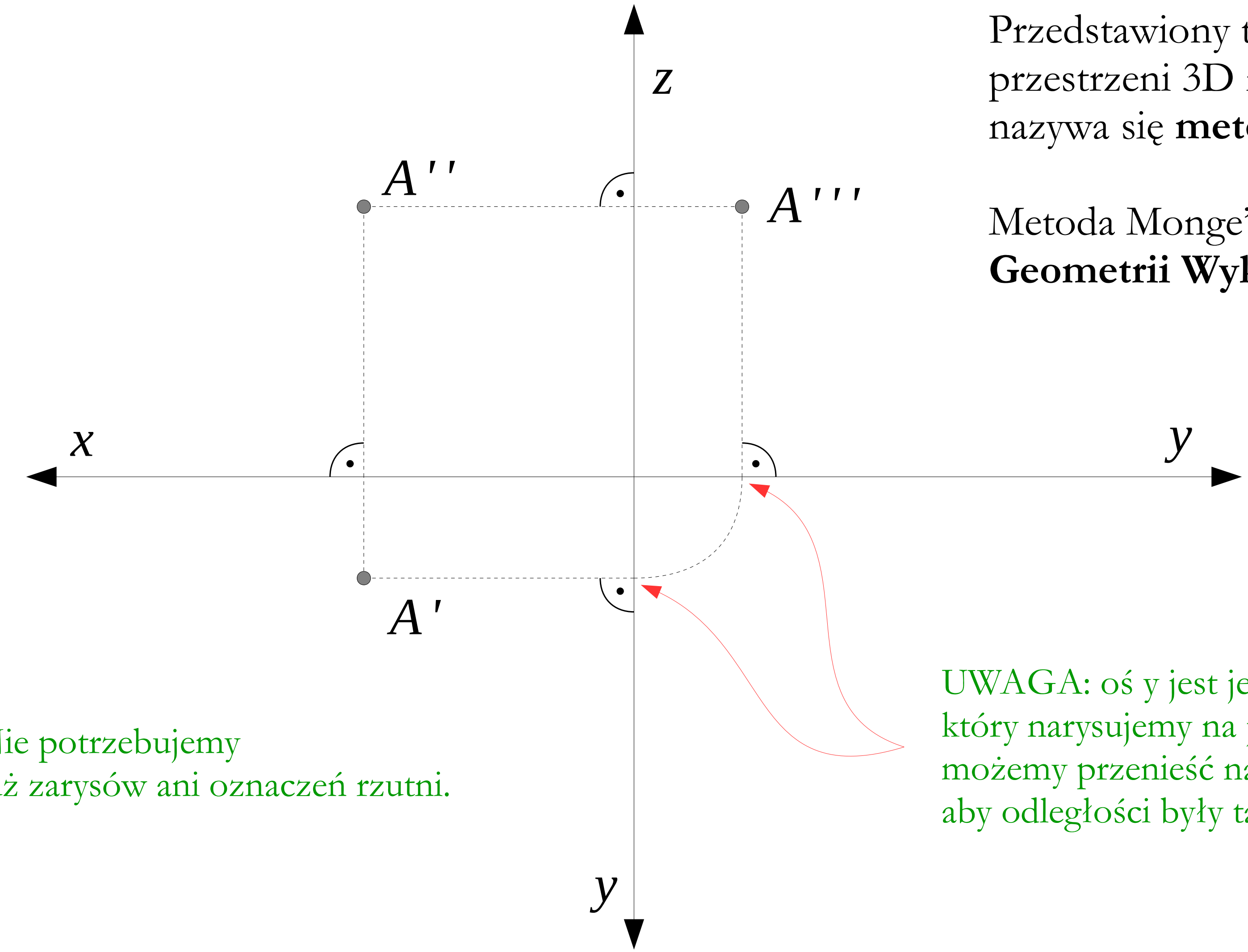
Punkt w przestrzeni 3D



Jak przedstawić trzy rzuty punktu znajdującego się w przestrzeni na jednej płaszczyźnie (kartce)?

- płaszczyznę boczną obracamy względem osi z, aż pokryje się ona z płaszczyzną pionową

Punkt w przestrzeni 3D



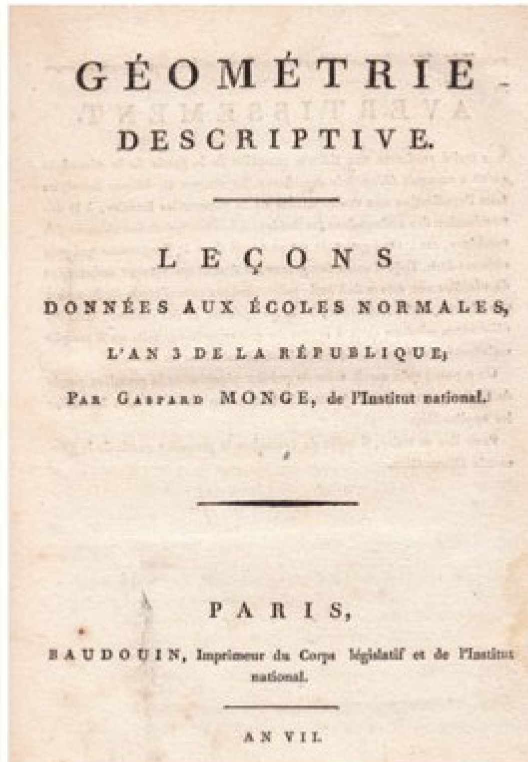
Przedstawiony tu sposób odwzorowania przestrzeni 3D na płaszczyźnie (kartce) nazywa się **metodą Monge'a**.

Metoda Monge'a stanowi podstawę **Geometrii Wykreślnej**.

UWAGA: oś y jest jedna i każdy punkt, który narysujemy na jednej jej części, możemy przenieść na drugą – ważne jedynie, aby odległości były takie same.

Nie potrzebujemy już zarysów ani oznaczeń rzutni.

Punkt w przestrzeni 3D



GÉOMÉTRIE
DESCRIPTIVE.

LEÇONS
DONNÉES AUX ÉCOLES NORMALES,
L'AN 3 DE LA RÉPUBLIQUE;
PAR GASPARD MONGE, de l'Institut national.

PARIS,
BAUDOUIN, Imprimeur du Corps législatif et de l'Institut national.

AN VII.

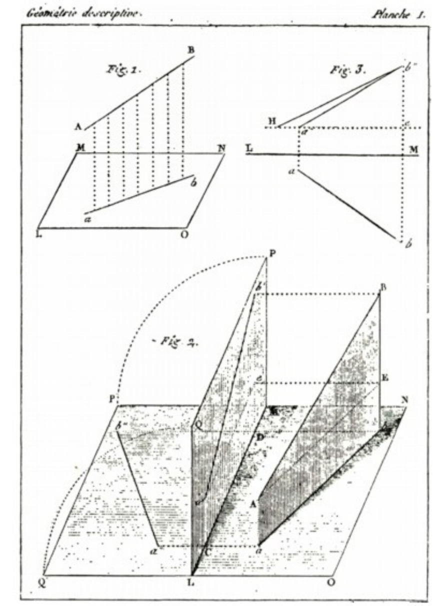
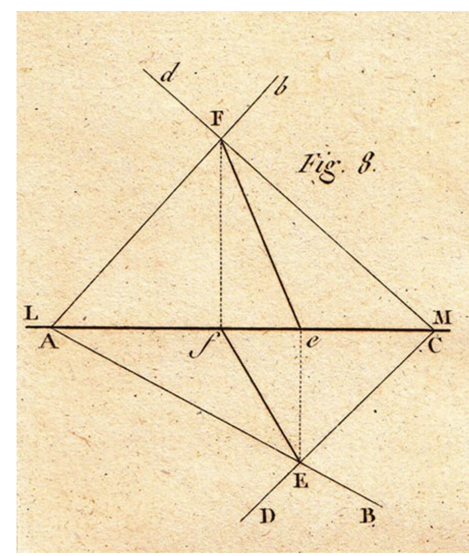
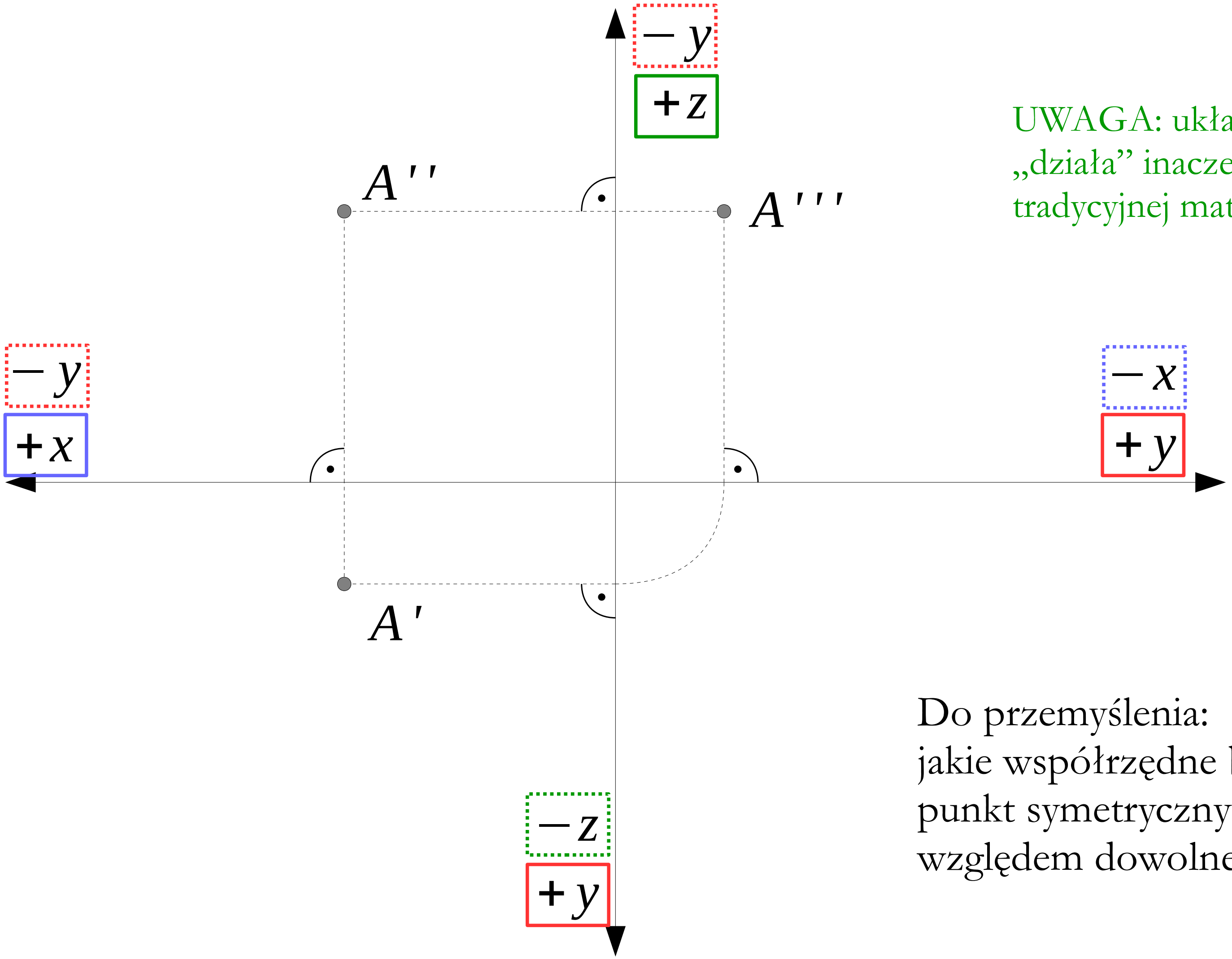


Figure 3



Gaspard Monge (1746-1818) – francuski polityk i naukowiec: matematyk, fizyk oraz chemik, uważany za twórcę geometrii wykreślnej (ang. descriptive geometry).

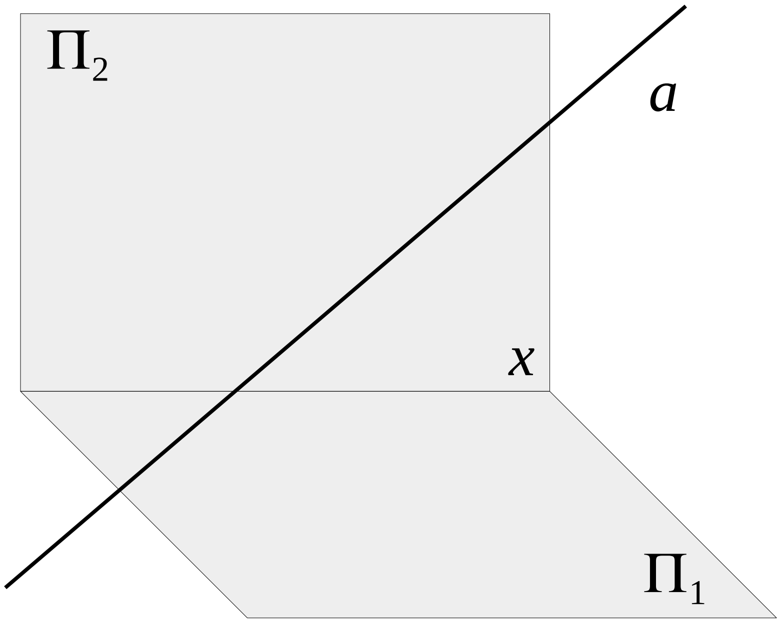
Punkt w przestrzeni 3D



UWAGA: układ współrzędnych „działa" inaczej niż w tradycyjnej matematyce!

Do przemyślenia:
jakie współrzędne będzie miał punkt symetryczny do punktu A, względem dowolnej rzutni lub osi?

Prosta w przestrzeni 2D

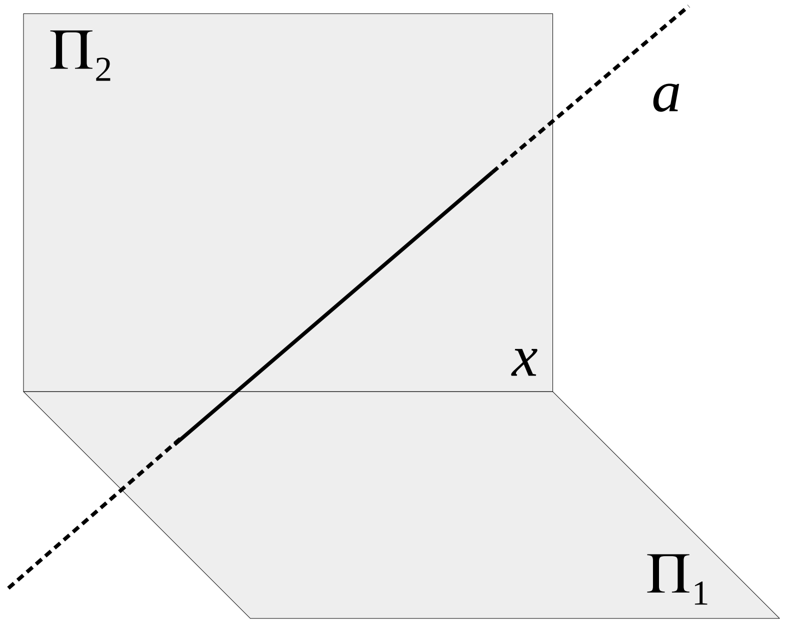


Czy da się określić jak prosta a
jest ułożona w przestrzeni?

Co zrobić, aby było jasne,
jak dana prosta przebiega w przestrzeni?

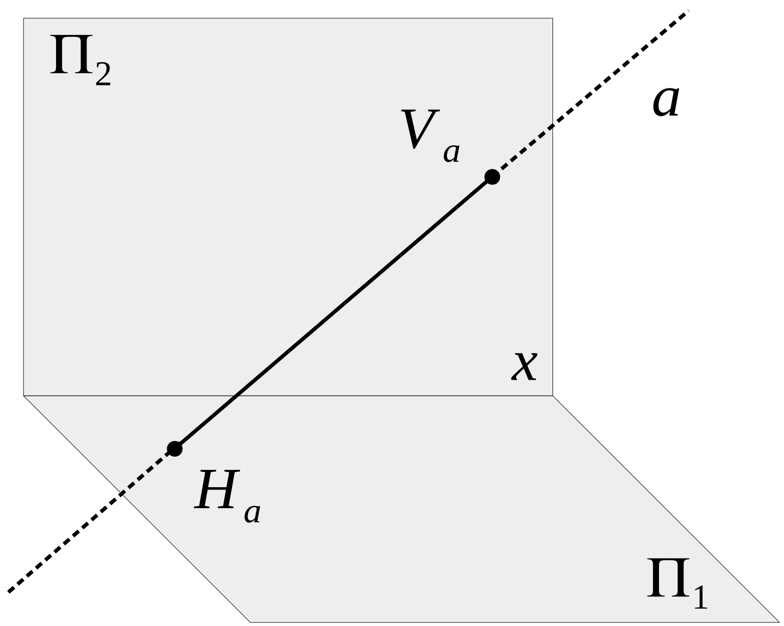
Proste oznacza się małymi literami alfabetu łacińskiego.

Prosta w przestrzeni 2D



Czy prosta posiada jakieś wyróżniające się punkty?

Prosta w przestrzeni 2D



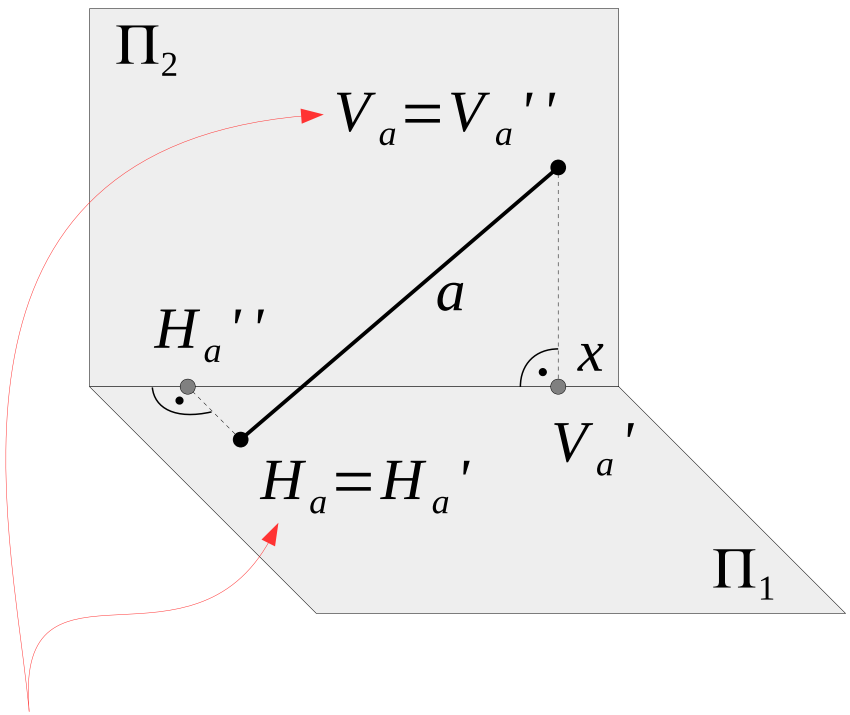
Rozwiązaniem problemu jest wskazaniem miejsc, w których prosta przebija rzutnie:

- ślad poziomy (H) – jest to miejsce, w którym prosta przebija rzutnię poziomą,
- ślad pionowy (V) – jest to miejsce, w którym prosta przebija rzutnię pionową.

H – od słowa „horizontal”
V – od słowa „vertical”

Jeśli nie ma takiej potrzeby, to nie rysuje się tych fragmentów prostej, które leżą poza ćwiartką pierwszą.

Prosta w przestrzeni 2D



Ślady to punkty leżące na rzutniach,
a zatem można pokazać ich położenie,
a nie tylko położenie samych rzutów.

Ślady to też punkty, a zatem można je rzutować.

- ślad poziomy posiada zerową wysokość, a zatem jego rzut pionowy (**zawsze**, **zawsze**) leży na osi x,

- ślad pionowy posiada zerową głębokość, a zatem jego rzut poziomy (**zawsze**, **zawsze**) leży na osi x.

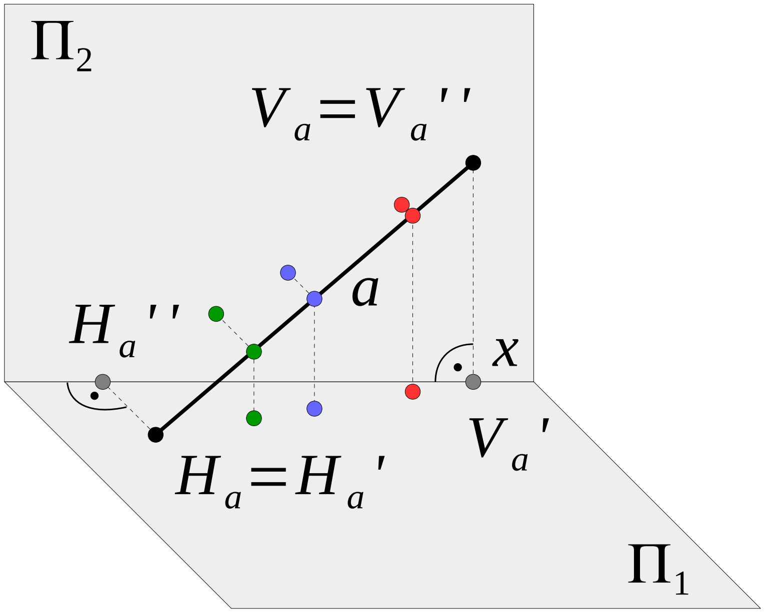
$$H_a = H_a'$$

$$V_a = V_a''$$

$$H_a'' \in x$$

$$V_a' \in x$$

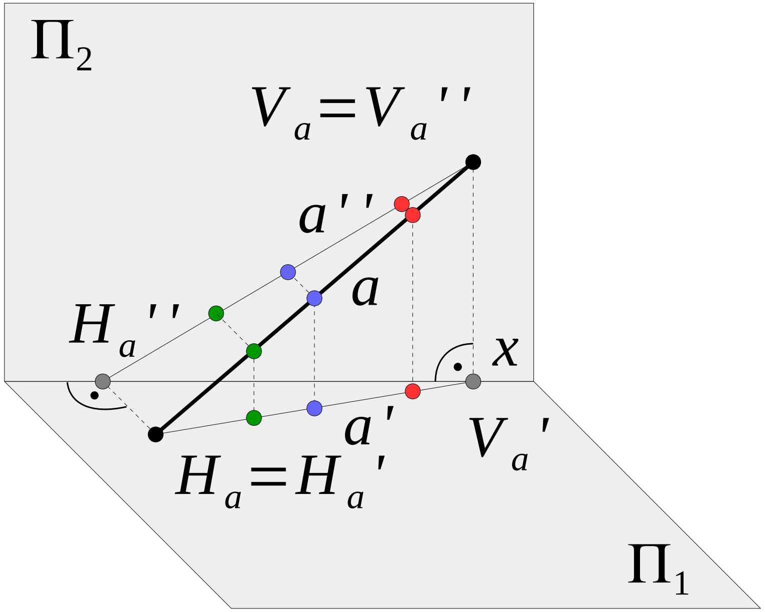
Prosta w przestrzeni 2D



Prosta to zbiór punktów,
a każdy z nich również można rzutować.

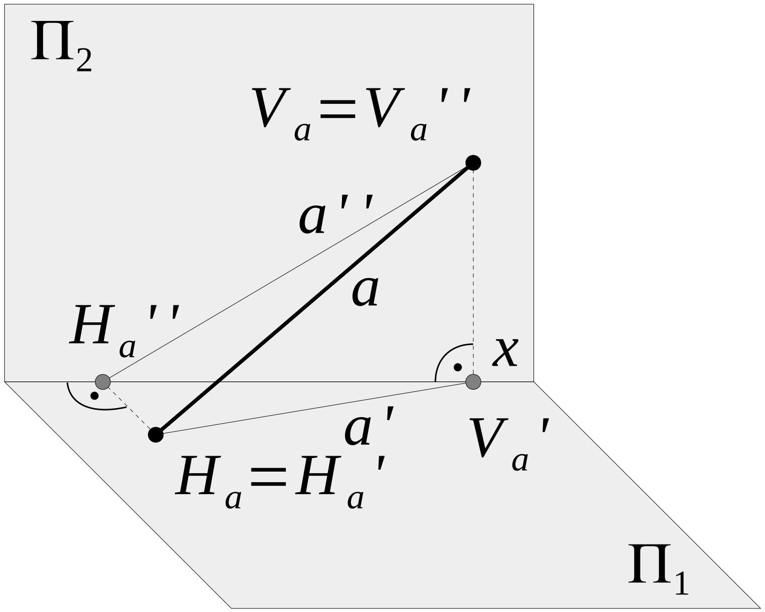
Ile trzeba rzutów punktów,
aby uzyskać rzut prostej?

Prosta w przestrzeni 2D



Jeżeli są określone ślady, to nie ma sensu wprowadzania kolejnych punktów tylko po to, aby wyznaczyć rzuty prostej – i tak wszystkie punkty układają się wzdłuż linii prostych.

Prosta w przestrzeni 2D

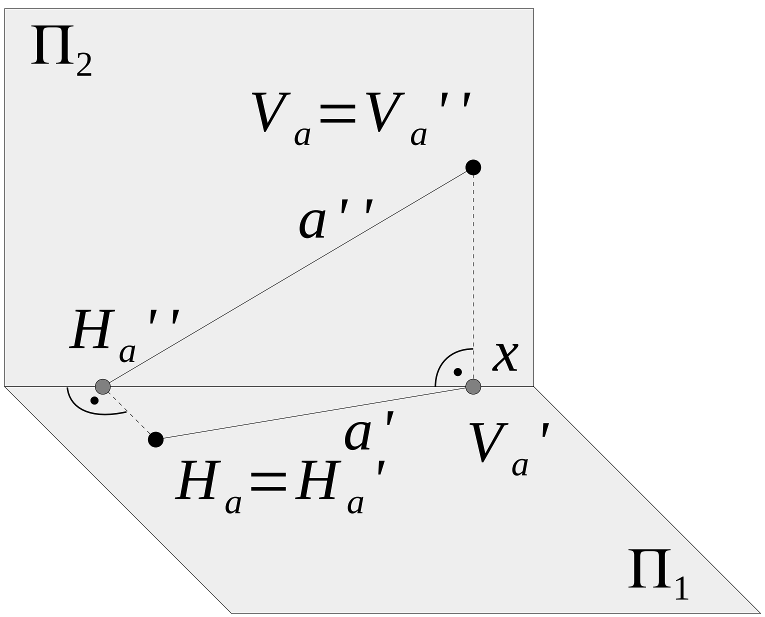


Wniosek: aby narysować rzuty prostej, to wystarczy połączyć ze sobą **odpowiednie** rzuty śladów.

a' - rzut poziomy prostej a

a'' - rzut pionowy prostej a

Prosta w przestrzeni 2D

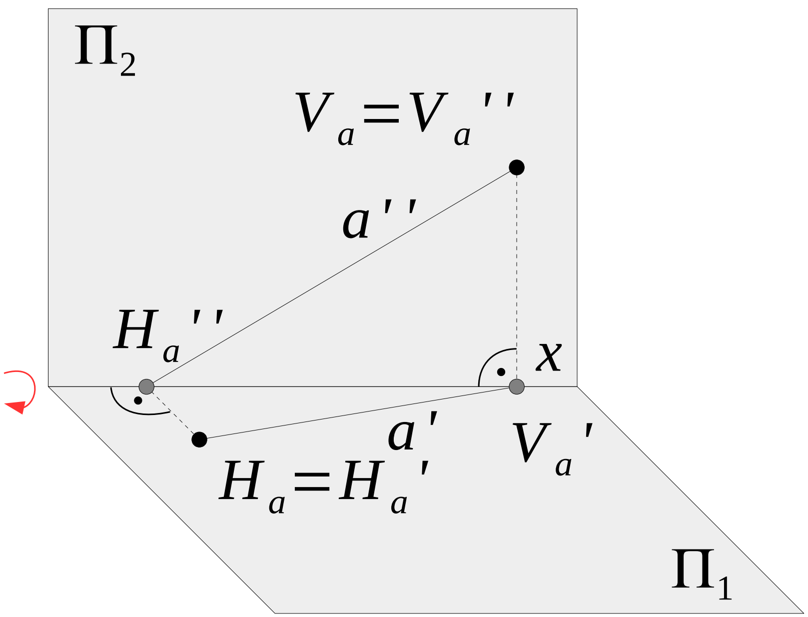


Aby jednoznacznie wyobrazić sobie przebieg prostej w przestrzeni **wystarczą same ślady** (lub rzuty).

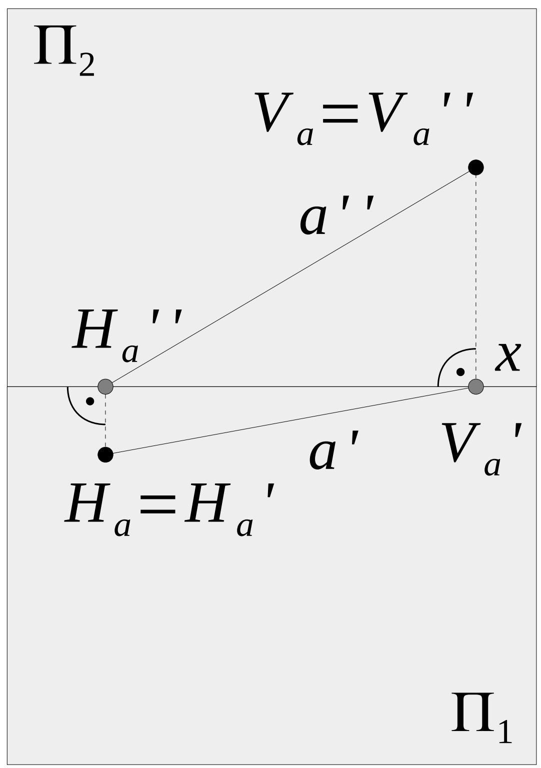
Poza tym i tak przed zastosowaniem metody Monge'a trzeba usunąć z przestrzeni wszystko, co nie leży bezpośrednio na rzutniach.

Prosta w przestrzeni 2D

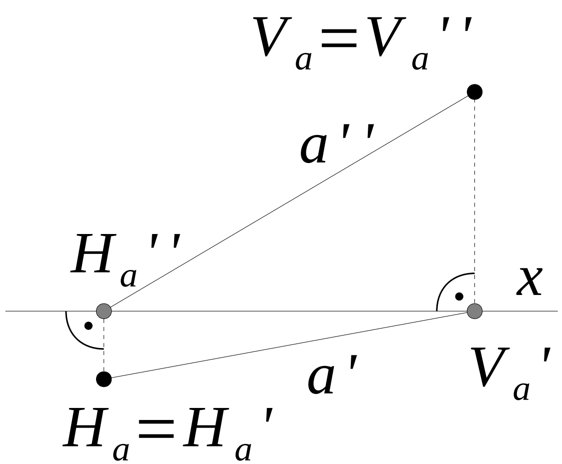
Zastosowanie metody Monge'a w stosunku do prostej.



Usunięcie z przestrzeni wszystkiego, co nie leży na rzutniach.



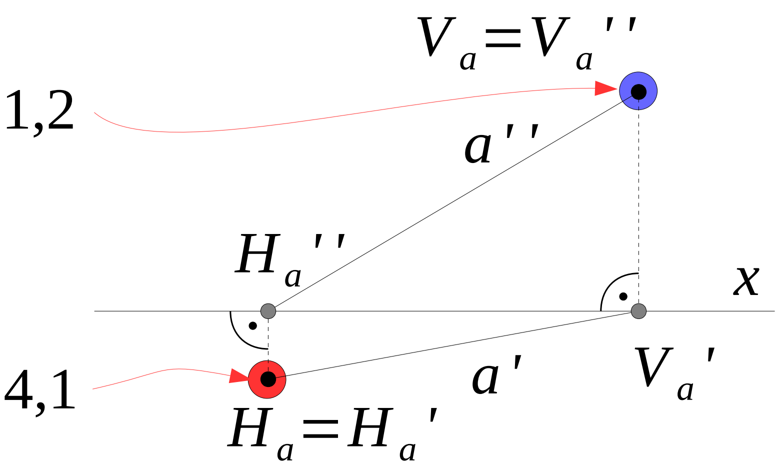
Obrót i nałożenie na siebie rzutni.

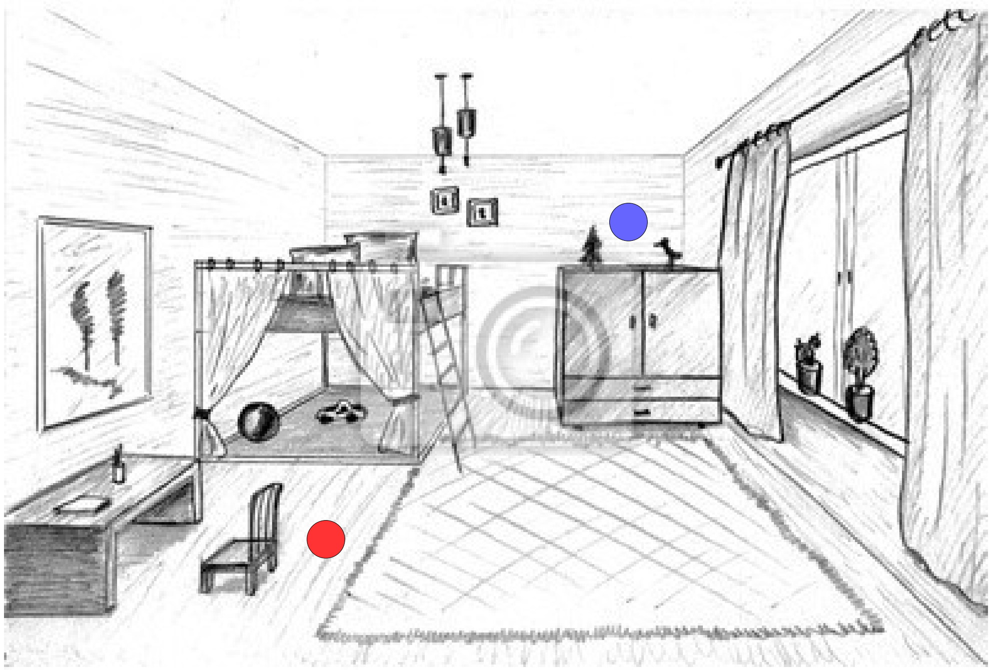


Efekt finalny.

Prosta w przestrzeni 2D

Wyobrażając sobie położenia śladów można łatwo określić kolejność ćwiartek (od lewej do prawej), przez które przechodzi dana prosta.



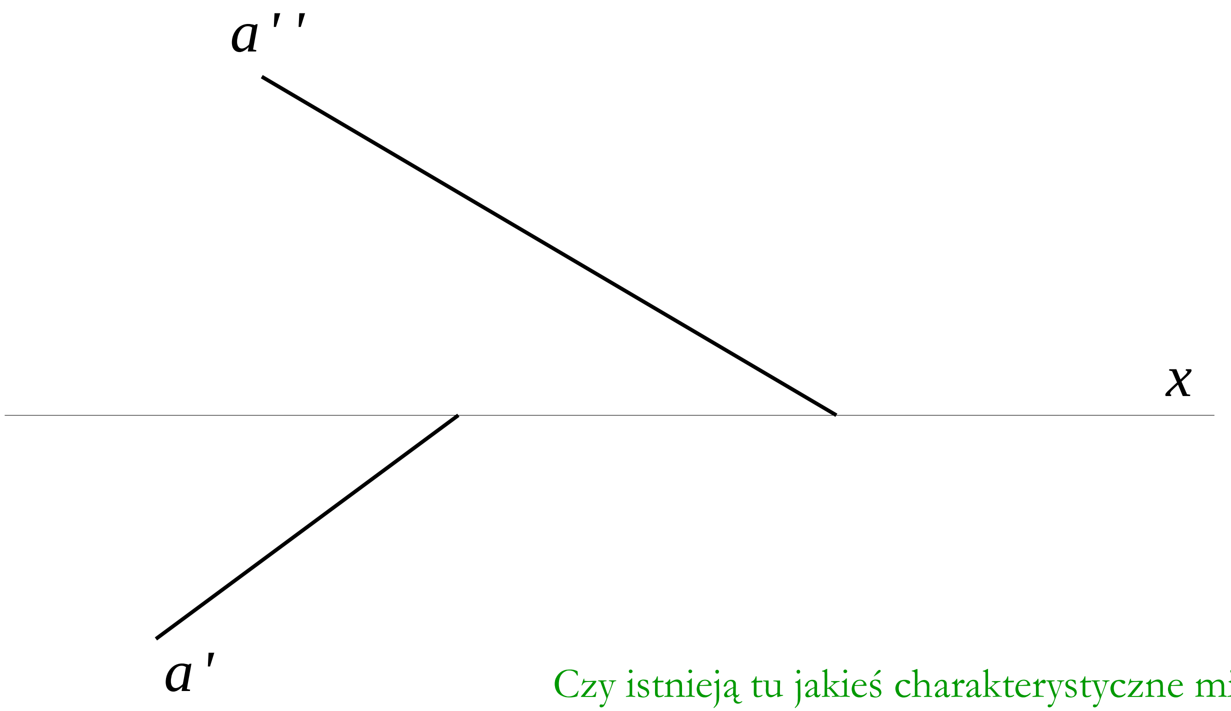


Ślad poziomy jest na „podłodze” przed „ścianą” – a zatem prosta przechodzi z ćwiartki 4 do 1.

Ślad pionowy jest na „ścianie” nad „podłogą” – a zatem prosta przechodzi z ćwiartki 1 do 2.

Prosta w przestrzeni 2D

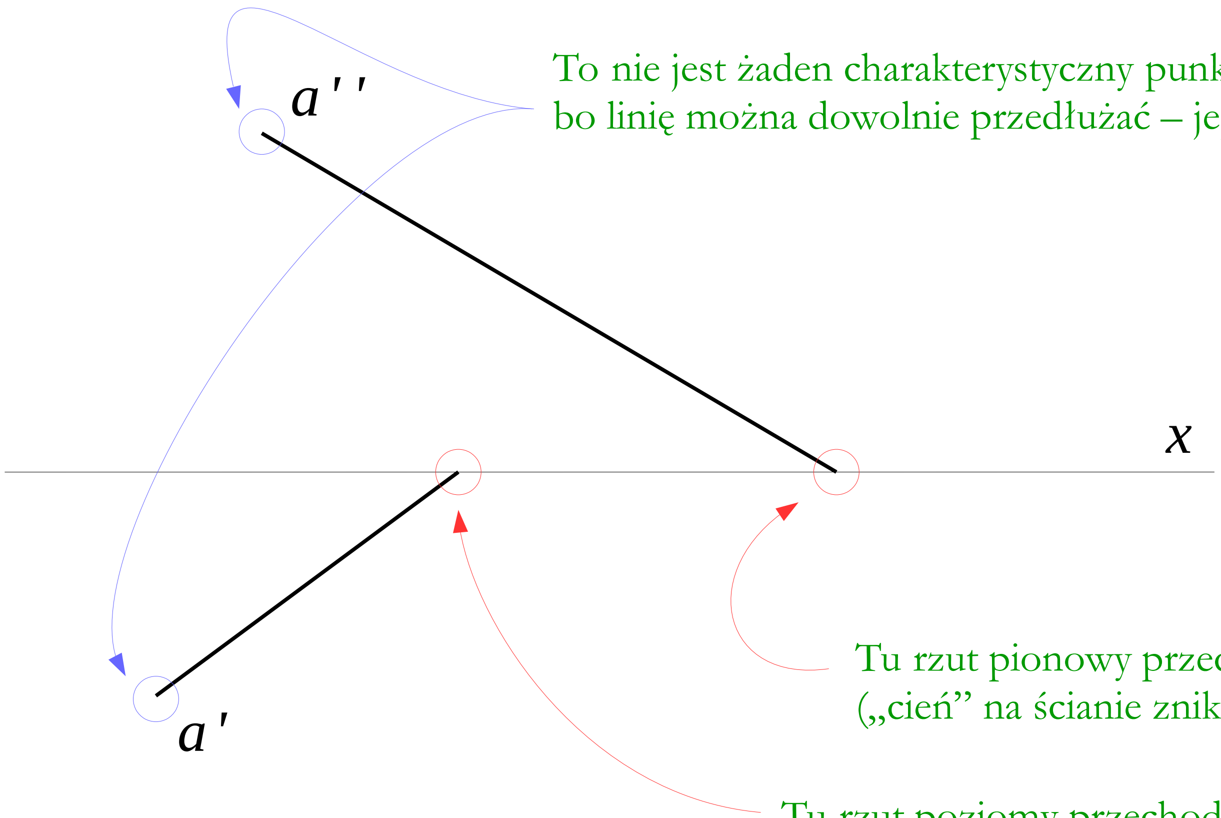
Jak wyznaczyć ślady prostej mając jej rzuty?



Czy istnieją tu jakieś charakterystyczne miejsca?

Prosta w przestrzeni 2D

Jak wyznaczyć ślady prostej mając jej rzuty?



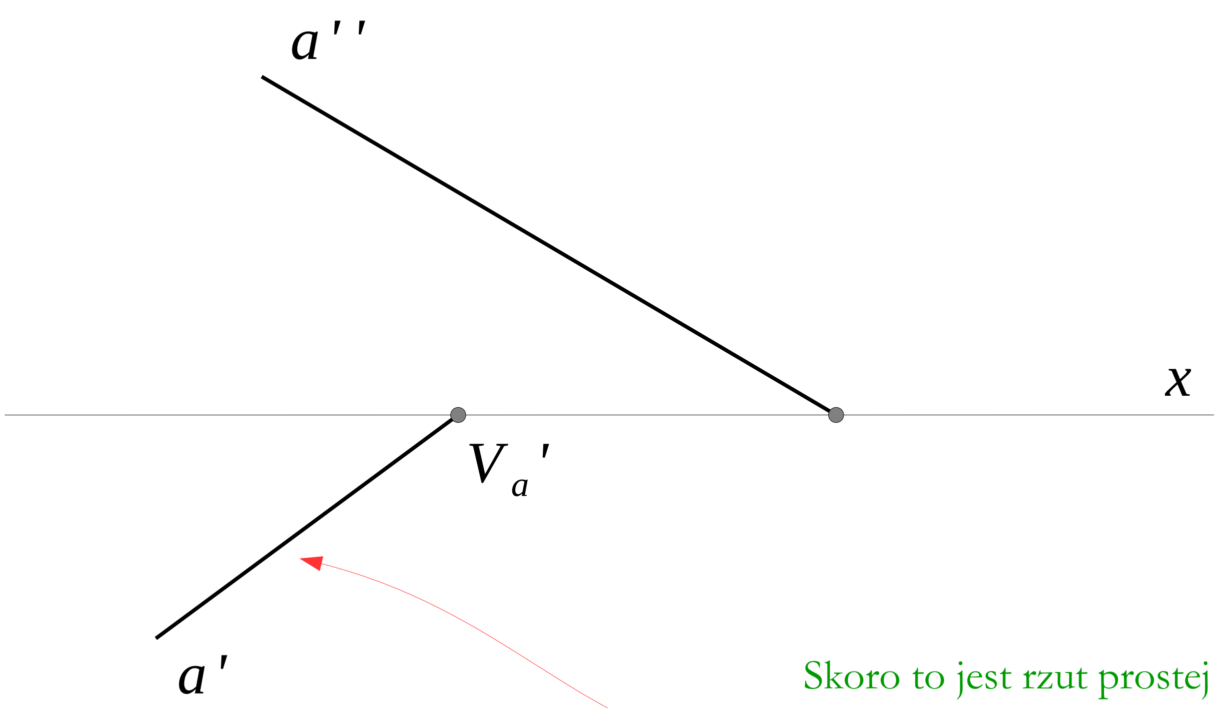
To nie jest żaden charakterystyczny punkt,
bo linię można dowolnie przedłużać – jej koniec ma znaczenie umowne.

Tu rzut pionowy przechodzi przez rzutnię poziomą
(„cień” na ścianie znika pod podłogą).

Tu rzut poziomy przechodzi przez rzutnię pionową
(„cień” na podłodze znika za ścianą).

Prosta w przestrzeni 2D

Jak wyznaczyć ślady prostej mając jej rzuty?



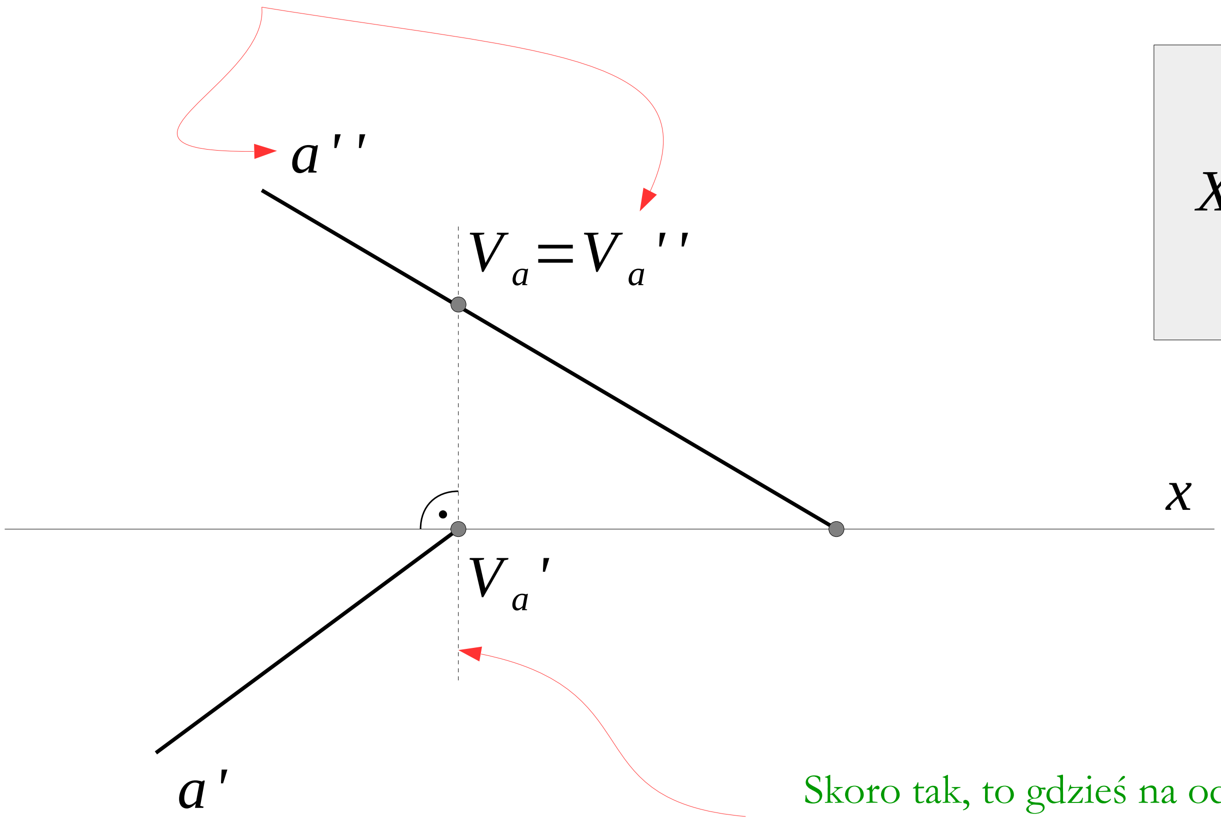
Skoro to jest rzut prostej na rzutnię poziomą
(„cień” prostej na podłodze), to gdzieś na tej linii musi leżeć
rzut poziomy śladu pionowego
(„cień” miejsca, w którym prosta przechodzi przez ścianę).

Prosta w przestrzeni 2D

Rzut punktu należącego do prostej
musi leżeć na rzucie tej prostej.

Jak wyznaczyć ślady prostej mając jej rzuty?

$$X \in a \longrightarrow \begin{cases} X' \in a' \\ X'' \in a'' \end{cases}$$

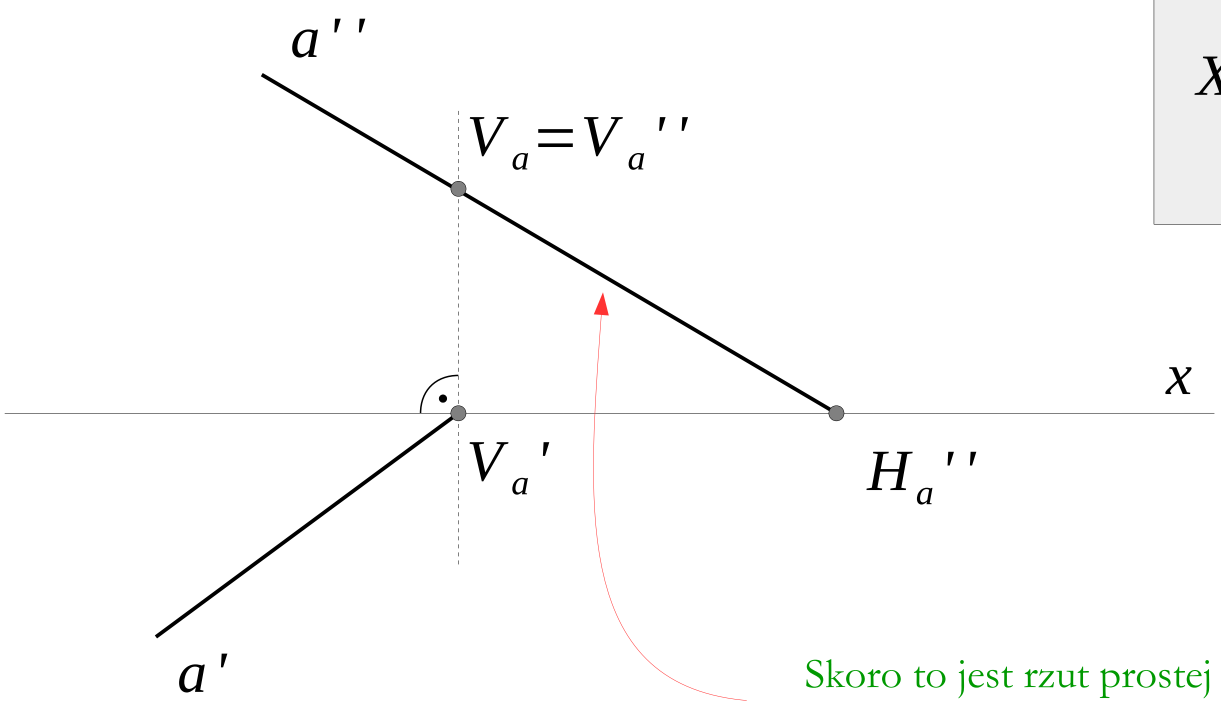


Skoro tak, to gdzieś na odnoszącej wykreślonej z tego punktu
musi leżeć zarówno ślad pionowy, jak i jego rzut pionowy.

Prosta w przestrzeni 2D

Jak wyznaczyć ślady prostej mając jej rzuty?

$$X \in a \longrightarrow \begin{cases} X' \in a' \\ X'' \in a'' \end{cases}$$

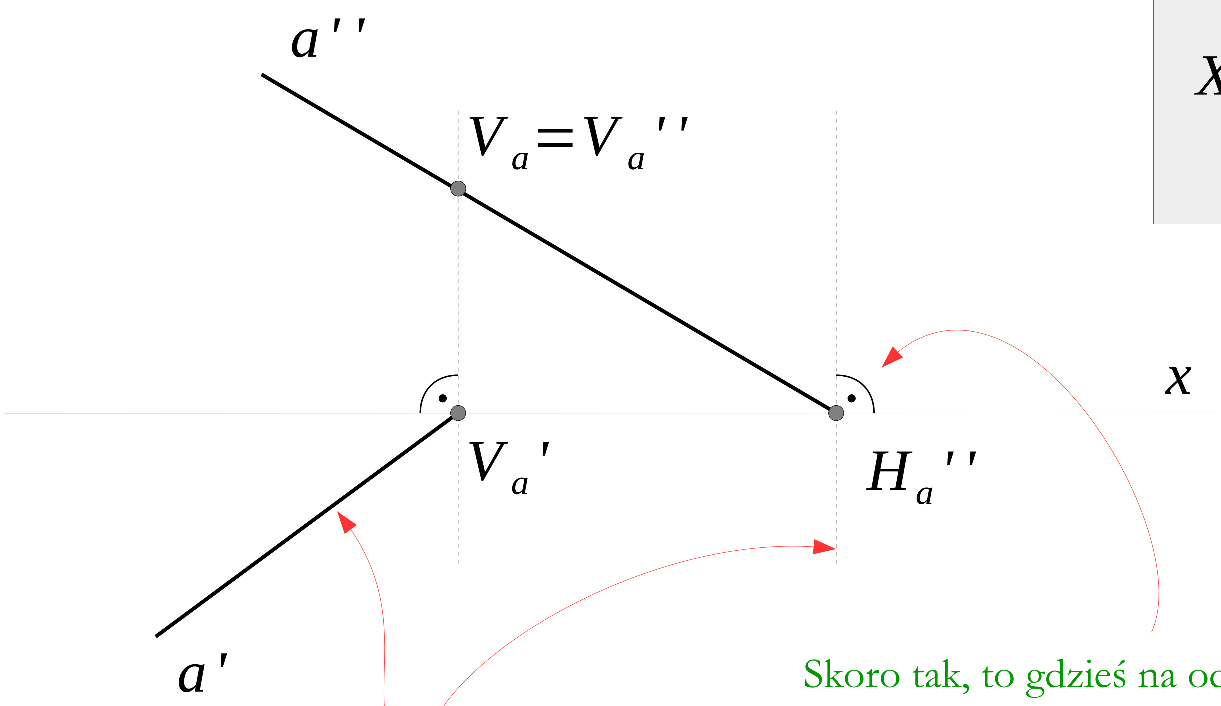


Skoro to jest rzut prostej na rzutnię pionową
(„cień” prostej na ścianie), to gdzieś na tej linii musi leżeć
rzut pionowy śladu poziomego
(„cień” miejsca, w którym prosta przechodzi przez podłogę).

Prosta w przestrzeni 2D

Jak wyznaczyć ślady prostej mając jej rzuty?

$$X \in a \longrightarrow \begin{cases} X' \in a' \\ X'' \in a'' \end{cases}$$



Skoro tak, to gdzieś na odnoszącej wykreślonej z tego punktu musi leżeć zarówno ślad poziomy, jak i jego rzut poziomy.

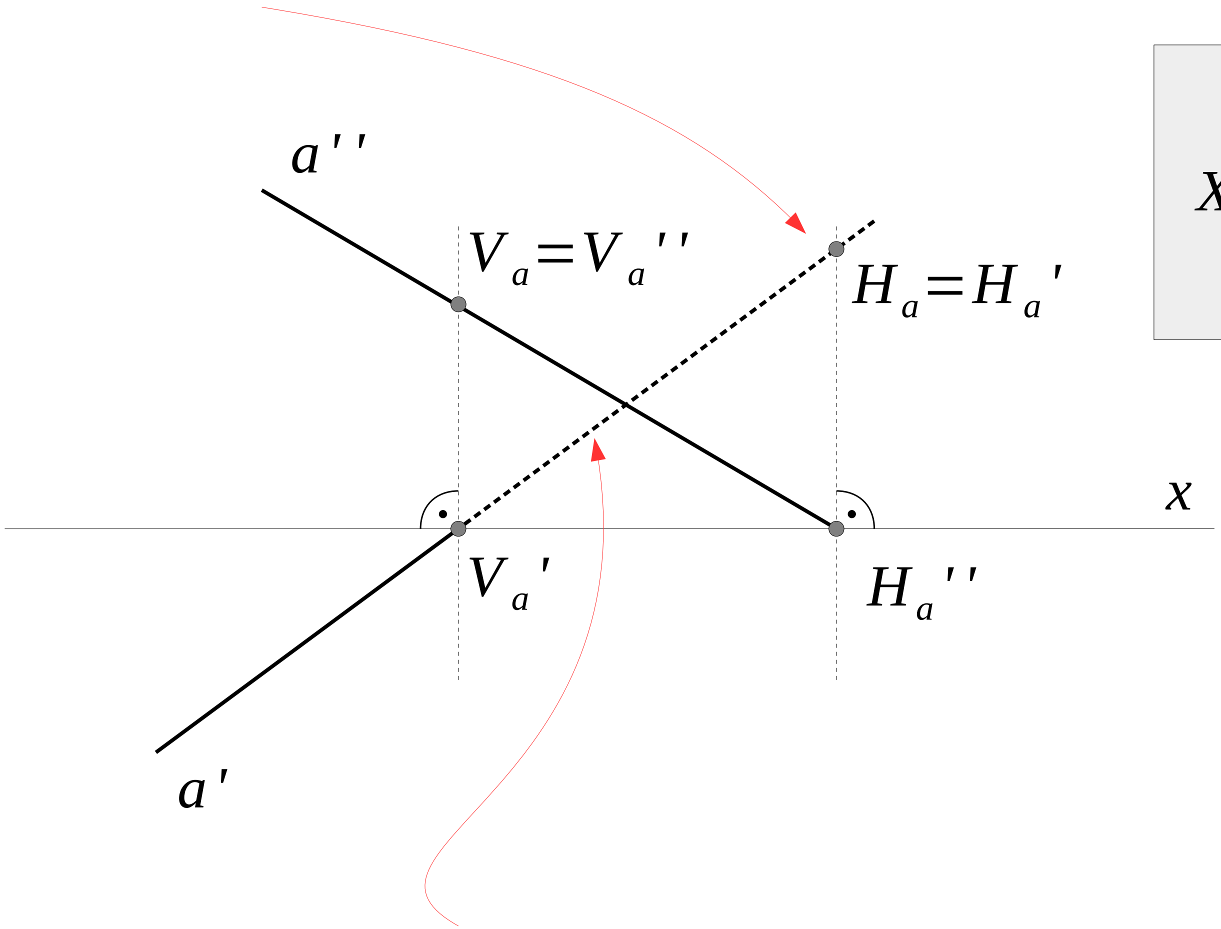
Gdzie spotykają się te linie?

Prosta w przestrzeni 2D

Rzut punktu należącego do prostej
musi leżeć na rzucie tej prostej.

Jak wyznaczyć ślady prostej mając jej rzuty?

$$X \in a \longrightarrow \begin{cases} X' \in a' \\ X'' \in a'' \end{cases}$$

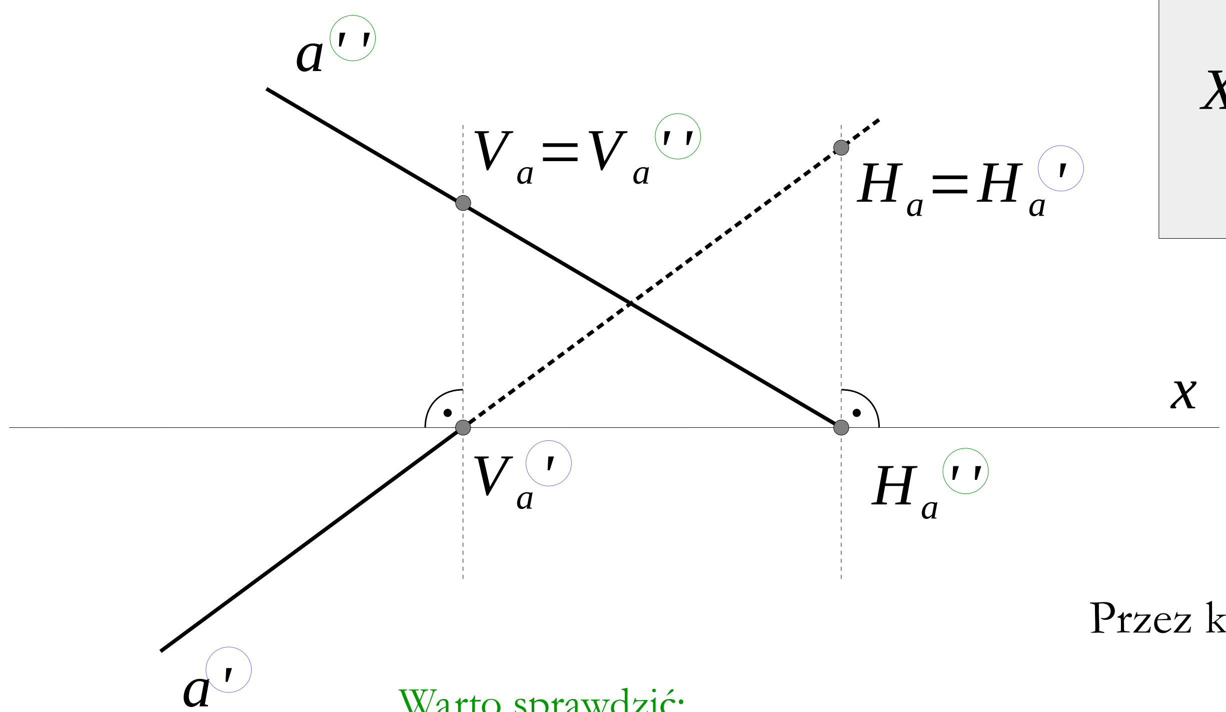


W tym przypadku należy przedłużyć linię rzutu.

Prosta w przestrzeni 2D

Jak wyznaczyć ślady prostej mając jej rzuty?

$$X \in a \longrightarrow \begin{cases} X' \in a' \\ X'' \in a'' \end{cases}$$



Przez które ćwiartki przechodzi prosta?

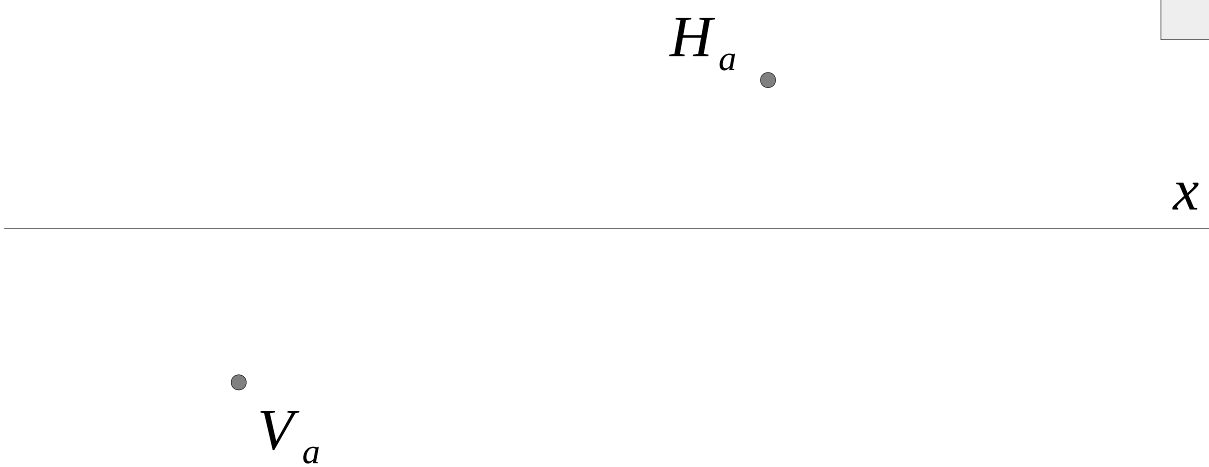
Warto sprawdzić:

- czy wszystkie „primy” leżą na rzucie poziomym prostej?
- czy wszystkie „bisy” leżą na rzucie pionowym prostej?

Prosta w przestrzeni 2D

Jak wyznaczyć rzuty prostej mając jej ślady?

$$X \in a \longrightarrow \begin{cases} X' \in a' \\ X'' \in a'' \end{cases}$$



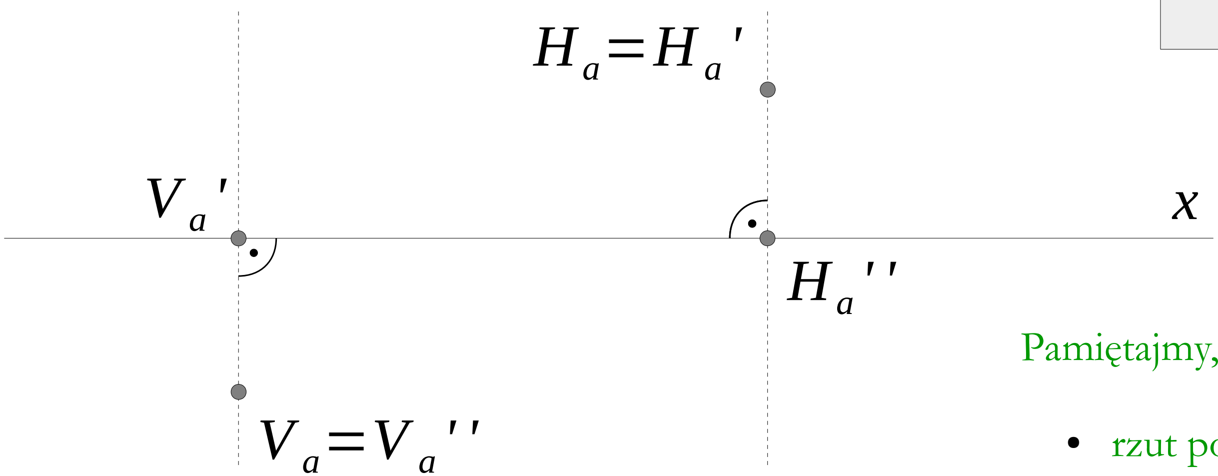
Ślady to punkty, więc można je rzutować.

Prosta w przestrzeni 2D

$$H_a = H_a'$$
$$V_a = V_a''$$

Jak wyznaczyć rzuty prostej mając jej ślady?

$$X \in a \longrightarrow \begin{cases} X' \in a' \\ X'' \in a'' \end{cases}$$



Pamiętajmy, że

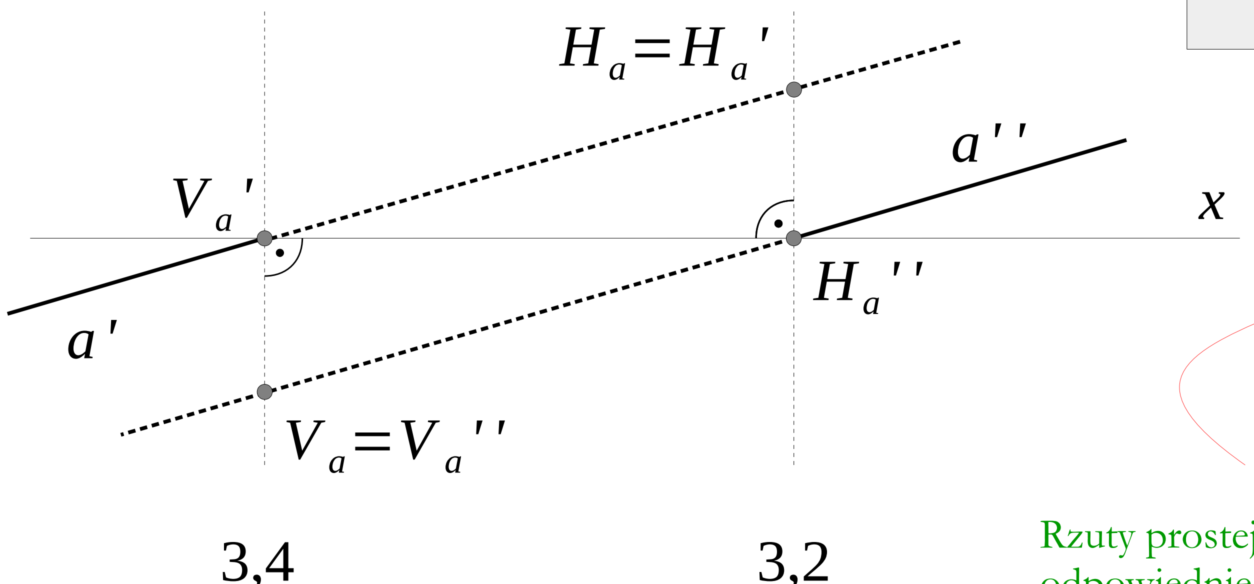
- rzut poziomy i rzut pionowy każdego punktu (**zawsze**, **zawsze**) leżą na jednej odnoszącej,
- ślady to punkty leżące na rzutniach, a zatem (**zawsze**, **zawsze**) $H_a = H_a'$ oraz $V_a = V_a''$.

Prosta w przestrzeni 2D

$$H_a = H_a'$$
$$V_a = V_a''$$

Jak wyznaczyć rzuty prostej mając jej ślady?

$$X \in a \longrightarrow \begin{cases} X' \in a' \\ X'' \in a'' \end{cases}$$



Rzuty prostej uzyskamy łącząc odpowiednie rzuty punktów H_a i V_a.

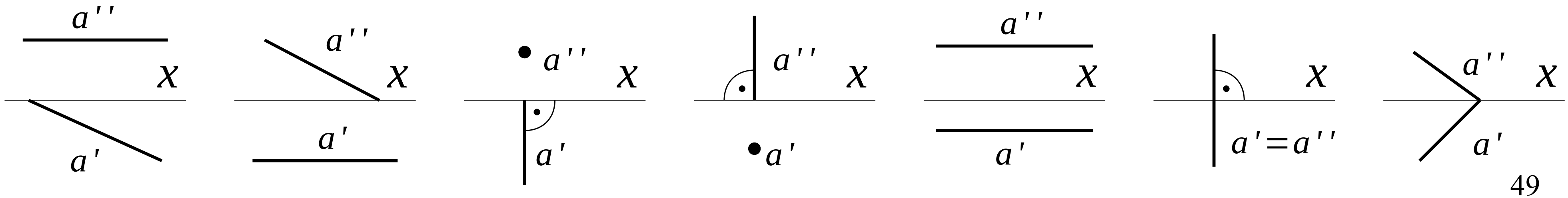
Przez które ćwiartki przechodzi prosta?

Proste szczególne w przestrzeni 2D

Prosta szczególna – prosta zorientowana w charakterystyczny sposób (prostopadle lub równolegle) względem rzutni lub osi układu współrzędnych.

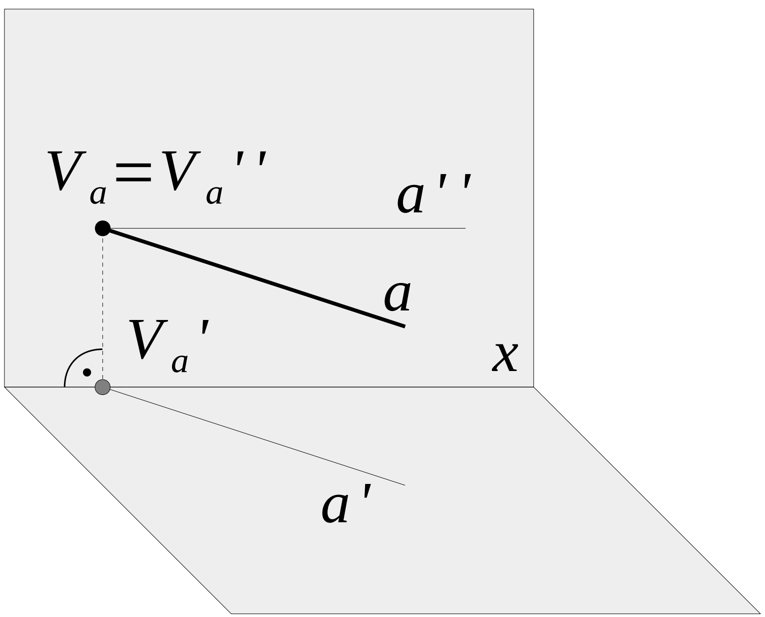
Proste szczególne:

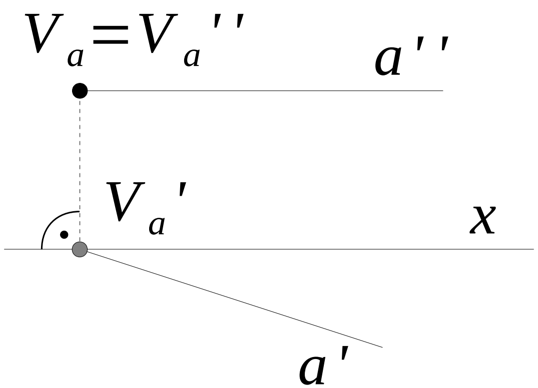
1. prosta pozioma
2. prosta czołowa
3. prosta celowa
4. prosta pionowa
5. prosta równoległa do osi x
6. prosta prostopadła do osi x
7. prosta przechodząca przez oś x

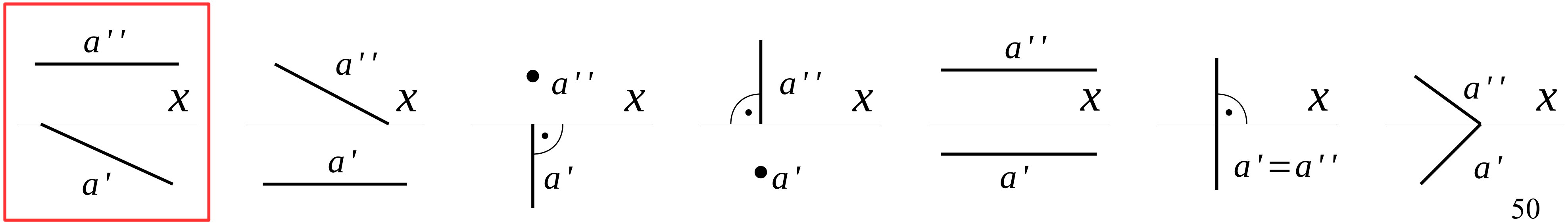


Proste szczególne w przestrzeni 2D

1. **Prosta pozioma** – prosta równoległa do Π_1

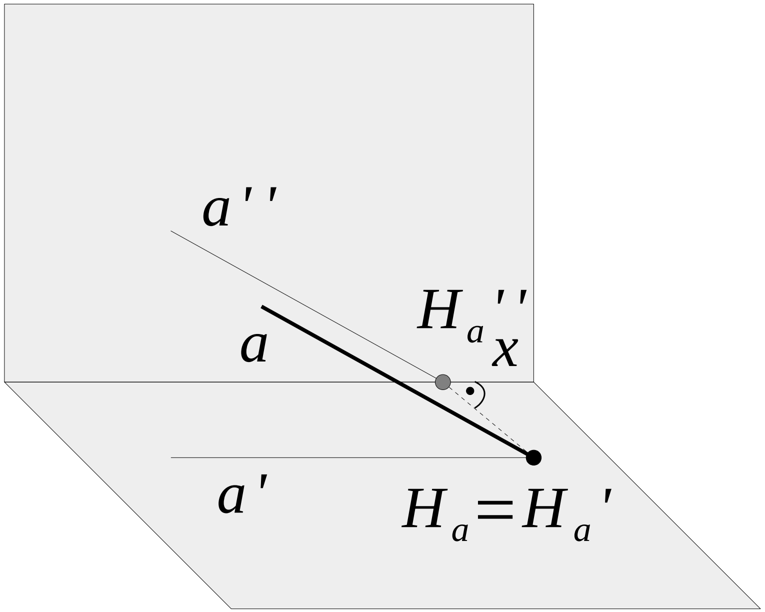


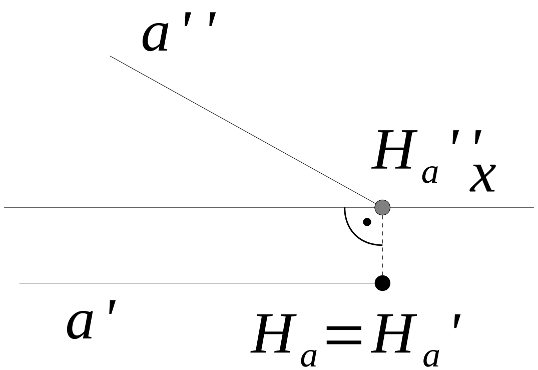


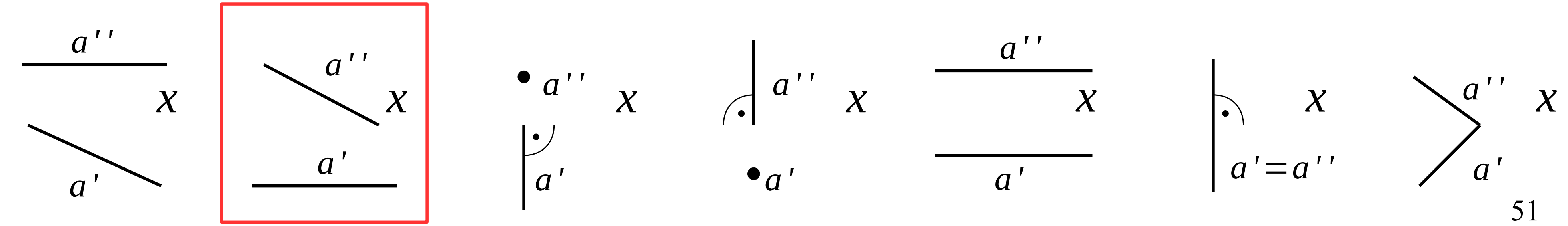


Proste szczególne w przestrzeni 2D

2. **Prosta czołowa** – prosta równoległa do Π_2

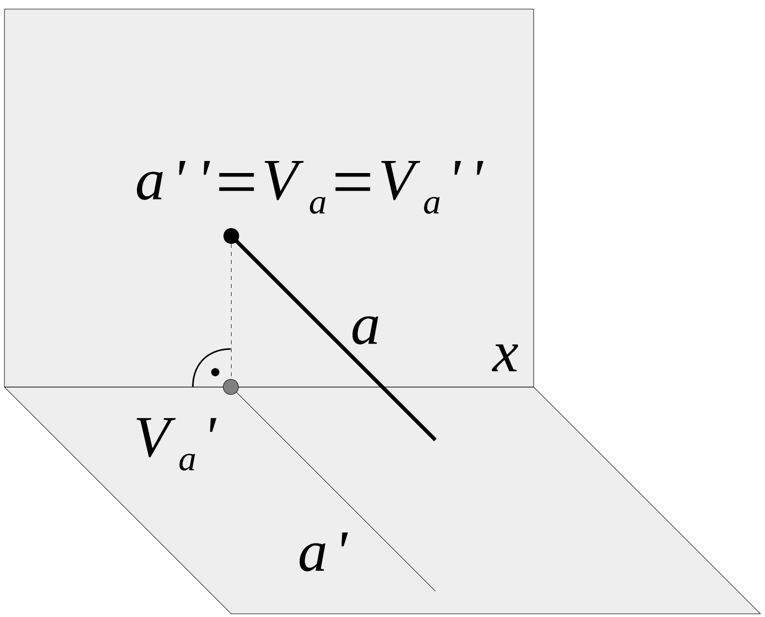


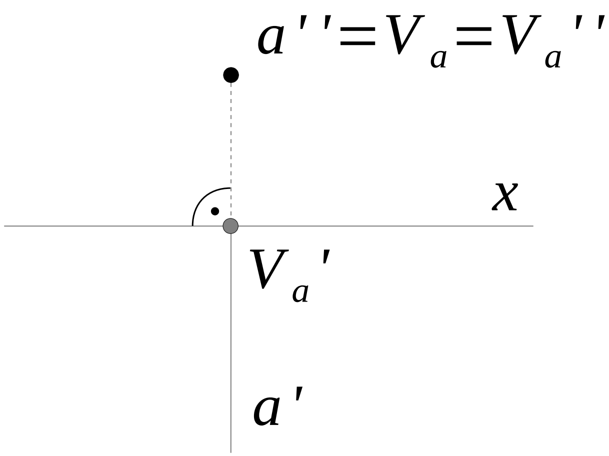


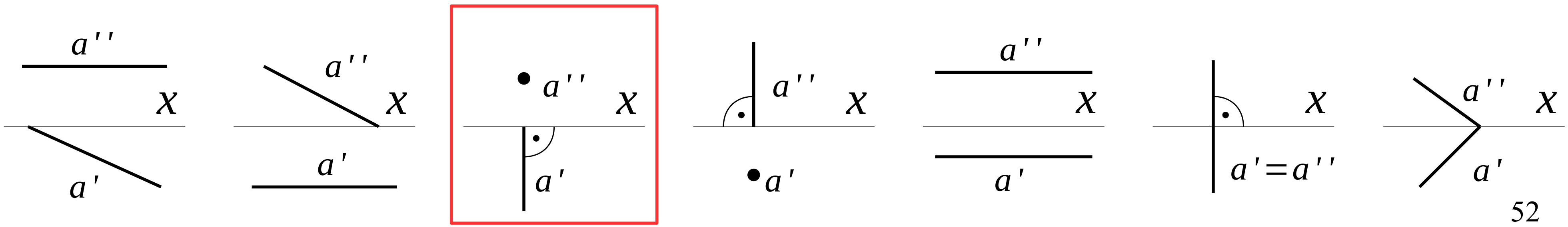


Proste szczególne w przestrzeni 2D

3. **Prosta celowa** – prosta prostopadła do Π_2

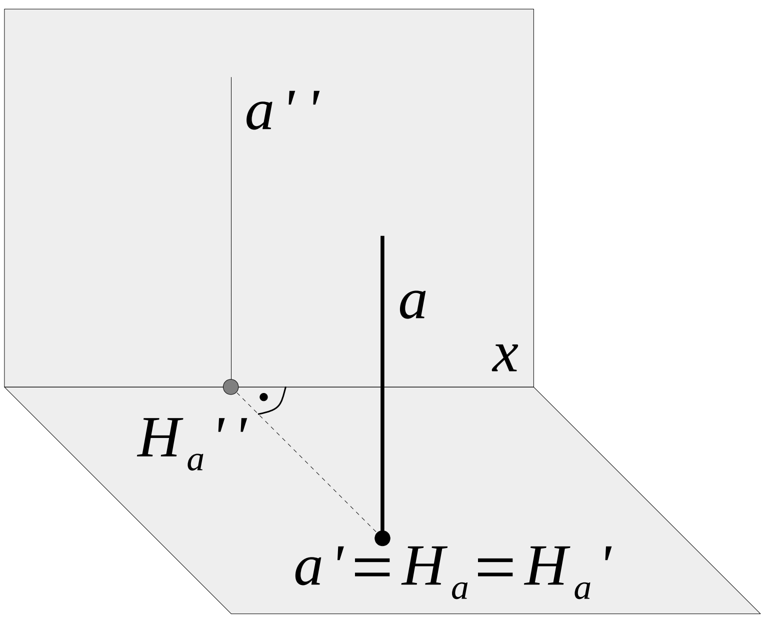


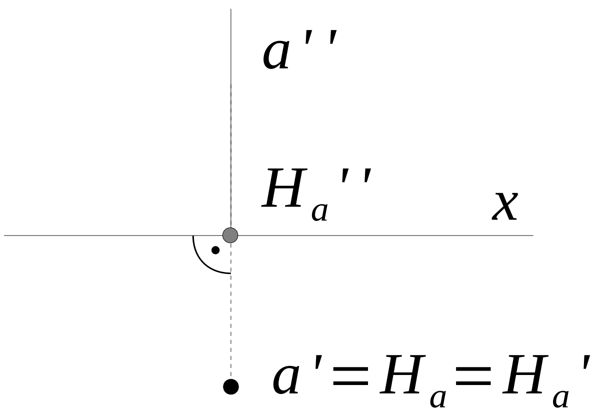


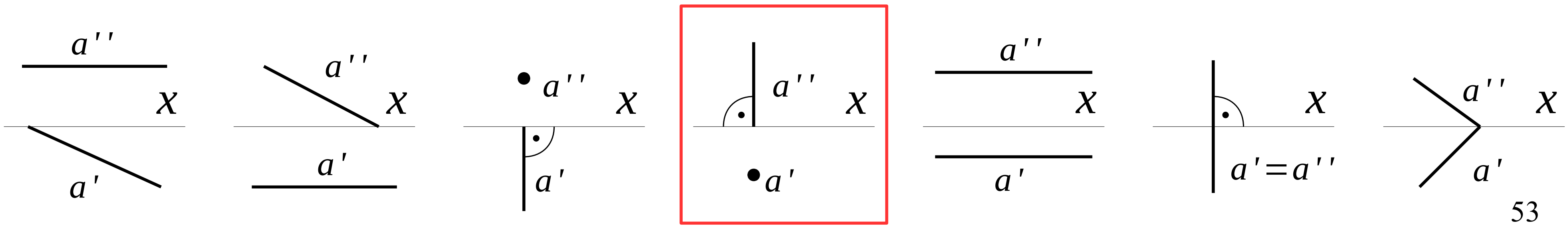


Proste szczególne w przestrzeni 2D

4. **Prosta pionowa** – prosta prostopadła do Π_1

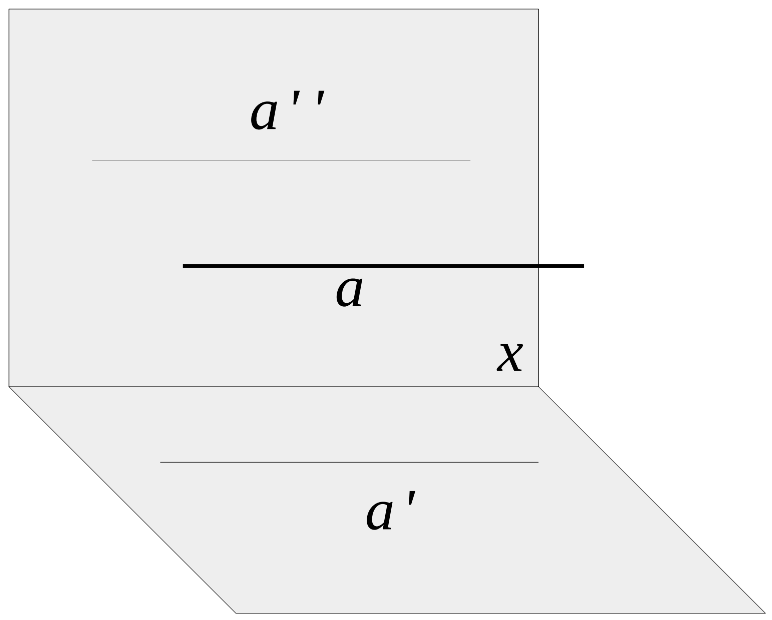


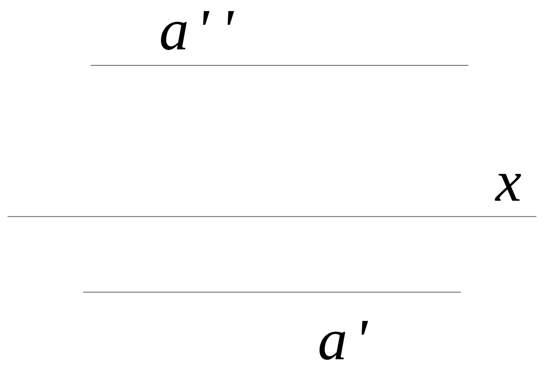


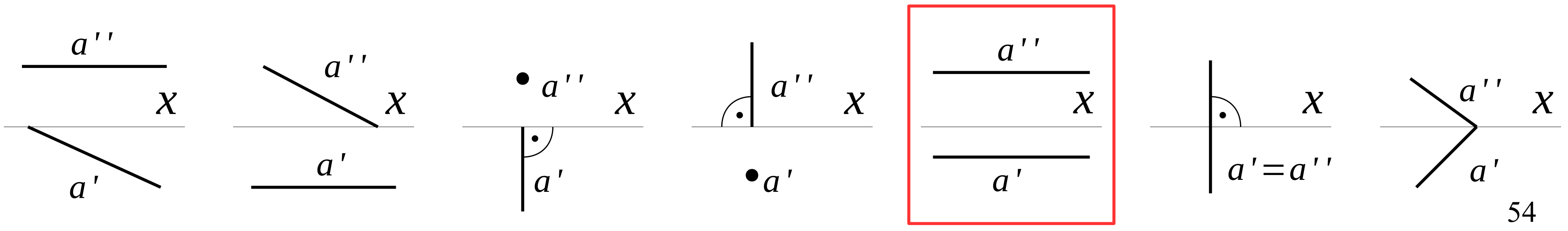


Proste szczególne w przestrzeni 2D

5. **Prosta równoległa do osi x**

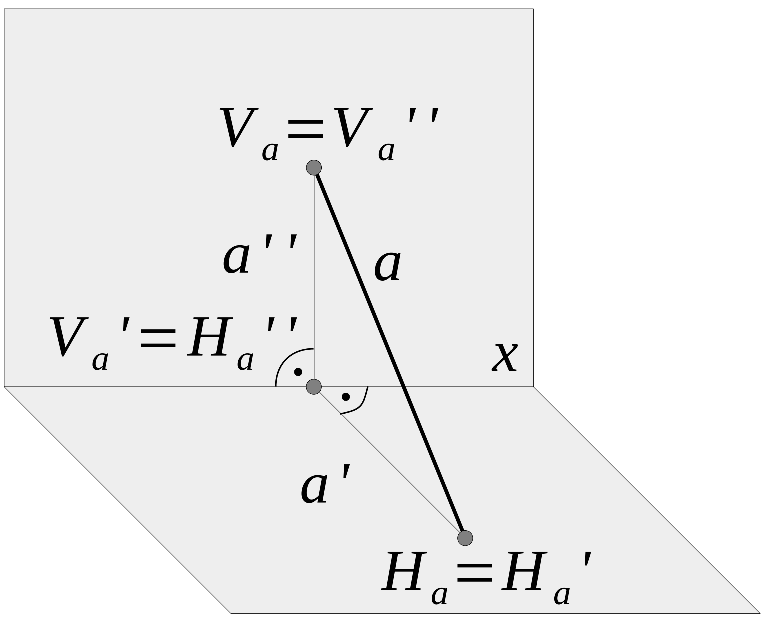


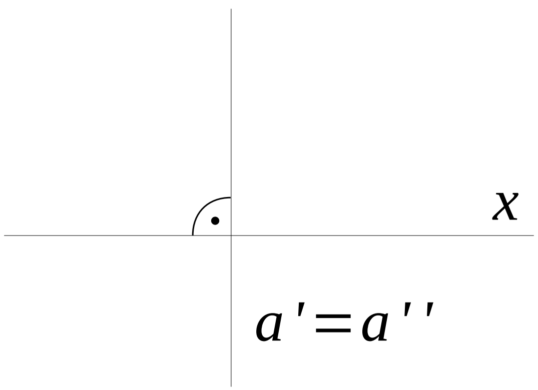


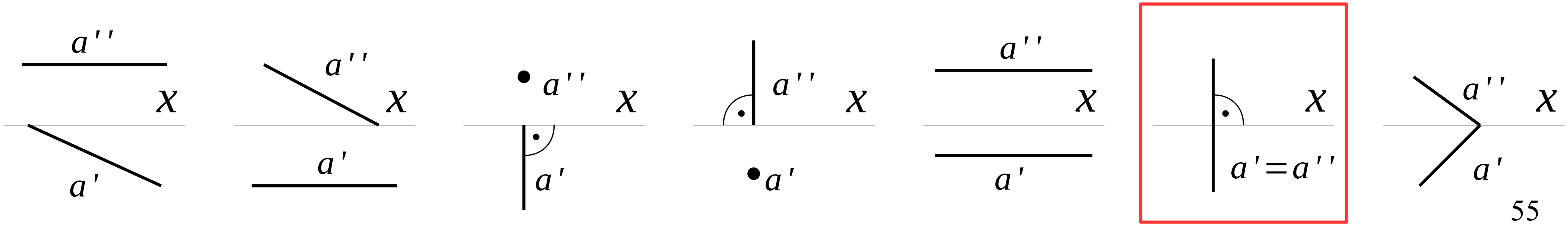


Proste szczególne w przestrzeni 2D

6. **Prosta prostopadła do osi x**



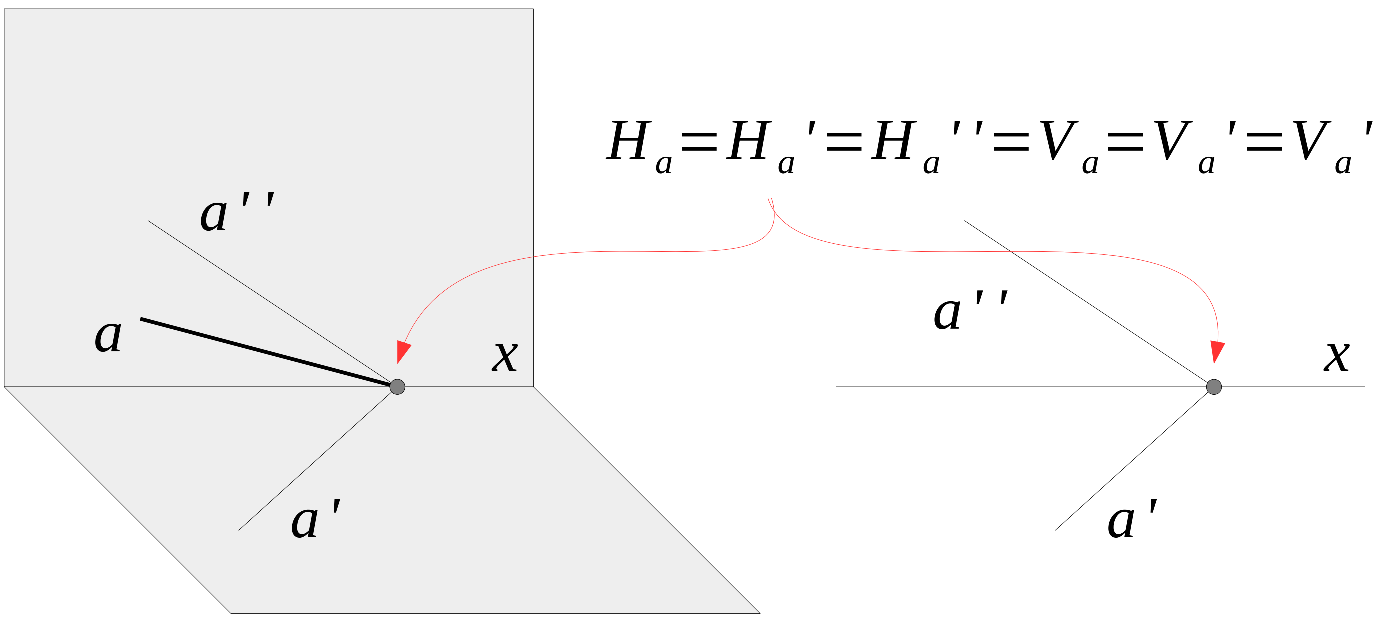


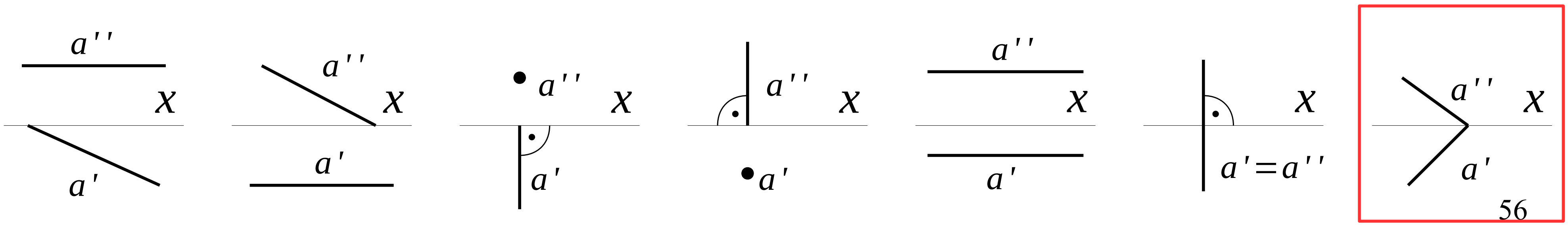


Proste szczególne w przestrzeni 2D

7. **Prosta przechodząca przez oś x**

$$H_a = H_a' = H_a'' = V_a = V_a' = V_a''$$





Podsumowanie

Zagadnienia:

Rzutnia, rzut, ćwiartki i oktany, określanie położenia punktu, głębokość punktu, wysokość punktu, szerokość punktu, metoda Monge'a, prosta w przestrzeni 2D, rzuty prostej, ślady prostej, wyznaczanie śladów prostej na podstawie jej rzutów, wyznaczanie rzutów prostej na podstawie jej śladów, proste szczególne – definicje i własności.

Wydział Nauk Technicznych
UNIVERSITY OF WARMIA AND MAZURY IN OLSZTYN
The Faculty of Technical Sciences
POLAND, 10-957 Olsztyn, M. Oczapowskiego 11
tel.: (48)(89) 5-23-32-40, fax: (48)(89) 5-23-32-55
URL: http://www.uwm.edu.pl/edu/sobieski/ (in Polish)

Dziękuję za uwagę

Wojciech Sobieski

Olsztyn, 2021-2022