



# GEOMETRIA WYKREŚLNA

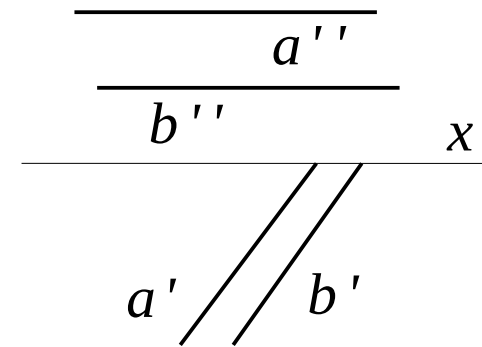
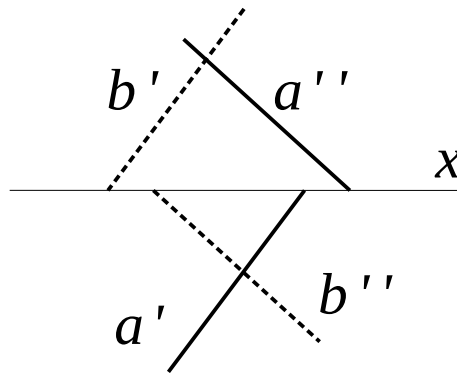
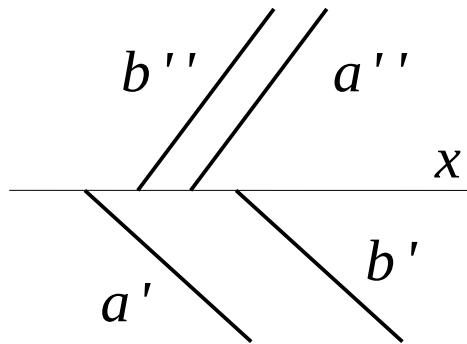
## Położenie prostych. Płaszczyzny.

# Położenie dwóch prostych w przestrzeni

Proste w przestrzeni mogą być:

- równoległe
- przecinające się (w tym prostopadłe)
- skośne (w tym prostopadłe)

Proste prostopadłe nie tworzą w tym podziale odrębnej – czwartej – grupy!



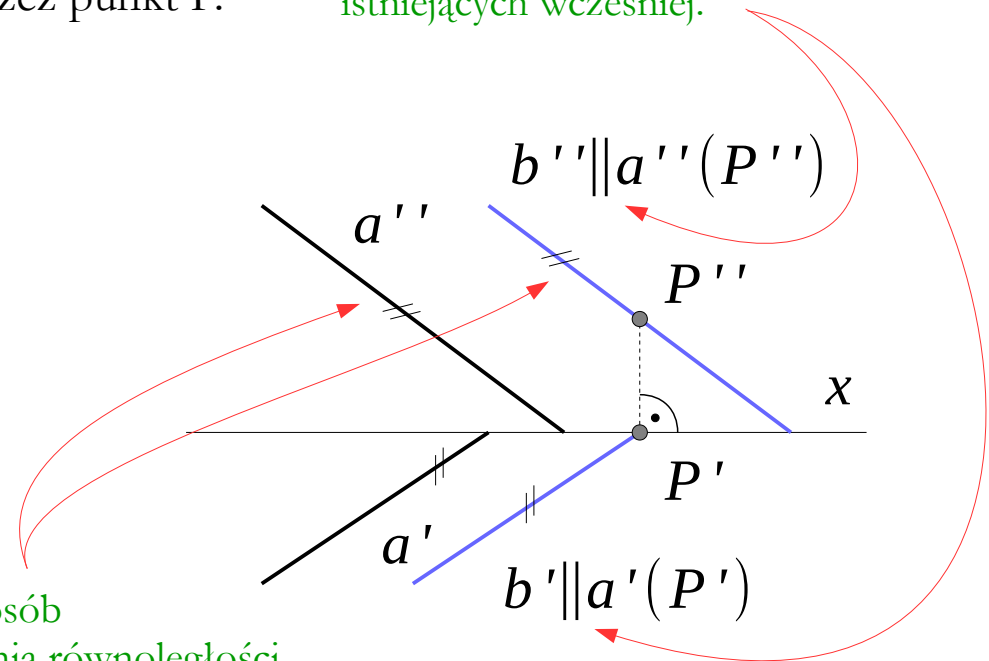
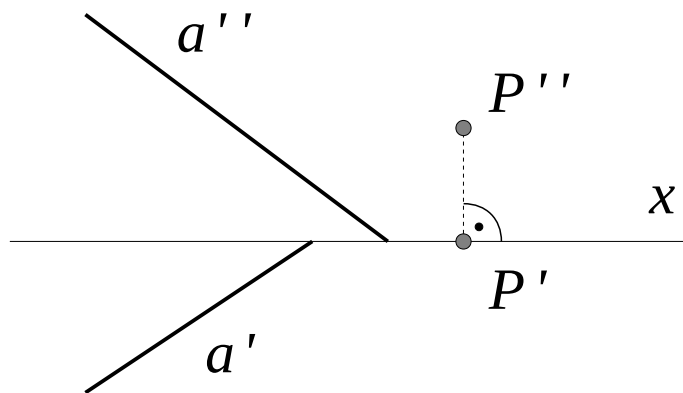
Dwie proste w przestrzeni są do siebie równoległe, jeżeli odpowiednie ich rzuty są do siebie równoległe.

$$b' \parallel a' \quad \text{oraz} \quad b'' \parallel a''$$

# Położenie dwóch prostych w przestrzeni

Narysować dowolną prostą  $b$ ,  
równoległą do prostej  $a$  i przechodzącą przez punkt  $P$ .

Podkreślamy, że  $b$  została narysowana  
później i określamy jej relację do elementów  
istniejących wcześniej.



Inny sposób  
oznaczania równoległości  
(niesie mniej informacji).

Bierzemy pod uwagę, aby:

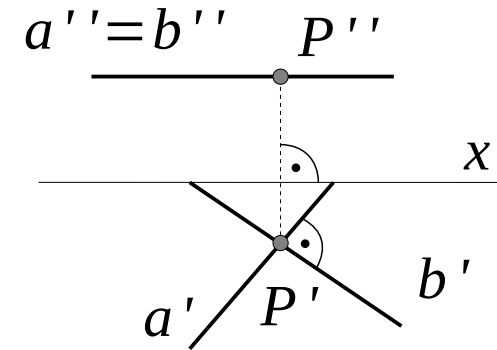
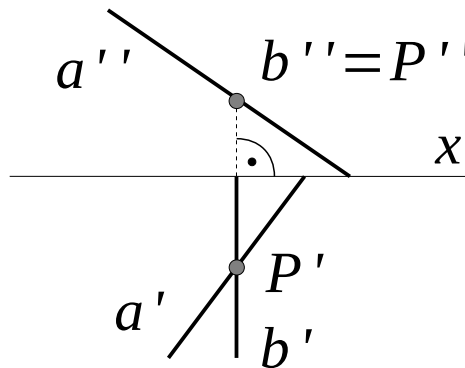
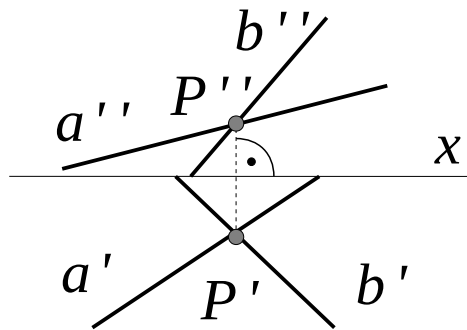
- spełniony został warunek równoległości prostych,
- rzuty punktu  $P$  leżały na odpowiednich rzutach prostej  $b$ .

$$b' \parallel a' \quad \text{oraz} \quad b'' \parallel a''$$

# Położenie dwóch prostych w przestrzeni

Proste w przestrzeni mogą być:

- równoległe
- przecinające się (w tym prostopadłe)
- skośne (w tym prostopadłe)



Dwie proste w przestrzeni przecinają się, jeżeli mają jeden punkt wspólny.

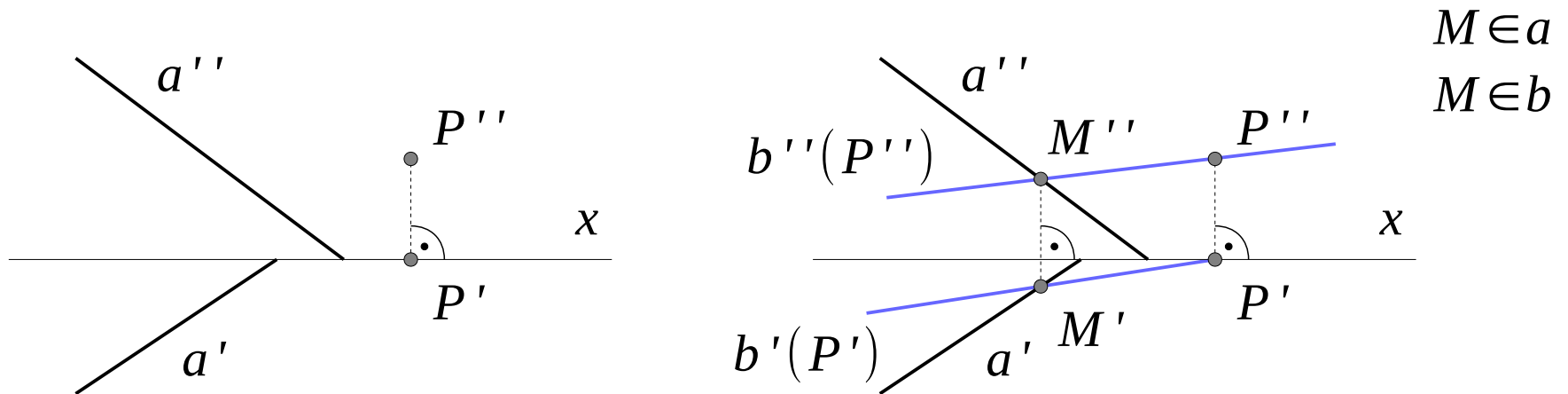
$$P' \in a' \quad \text{oraz} \quad P' \in b'$$

$$P'' \in a'' \quad P'' \in b''$$

# Położenie dwóch prostych w przestrzeni

Narysować dowolną prostą  $b$ ,  
przecinającą się z prostą  $a$  i przechodzącą przez punkt  $P$ .

UWAGA: tu punktem wspólnym  
jest punkt  $M$  a nie  $P$  (tak wyszło ze  
względu na treść zadania).



Bierzemy pod uwagę, aby:

- spełniony został warunek przecinania się prostych (trzeba wprowadzić dodatkowy punkt – tu punkt  $M$ ),
- rzuty punktu  $P$  leżały na odpowiednich rzutach prostej  $b$ .

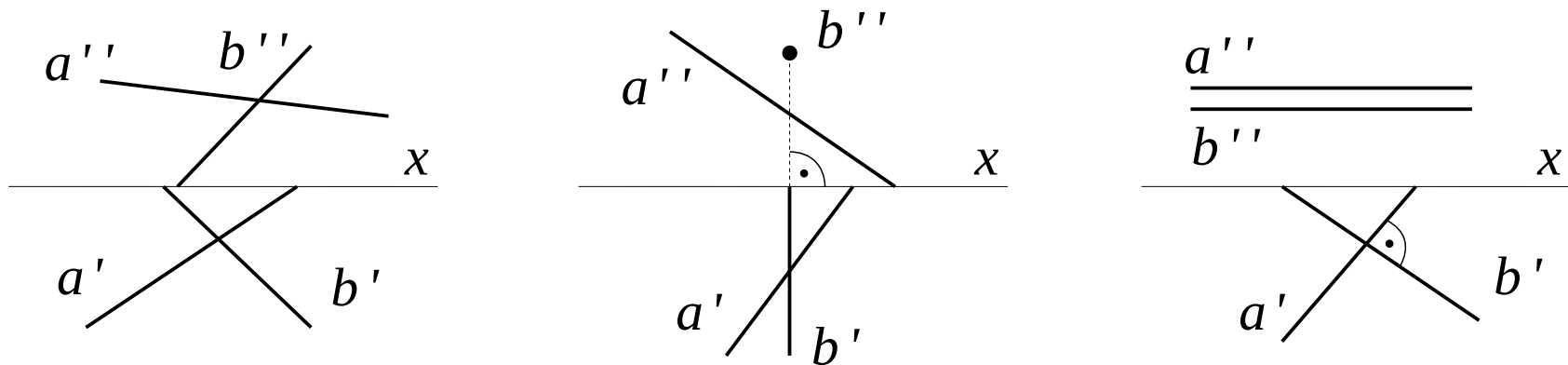
$$\begin{array}{l}
 P' \in a' \\
 P'' \in a''
 \end{array}
 \text{ oraz }
 \begin{array}{l}
 P' \in b' \\
 P'' \in b''
 \end{array}$$

# Położenie dwóch prostych w przestrzeni

---

Proste w przestrzeni mogą być:

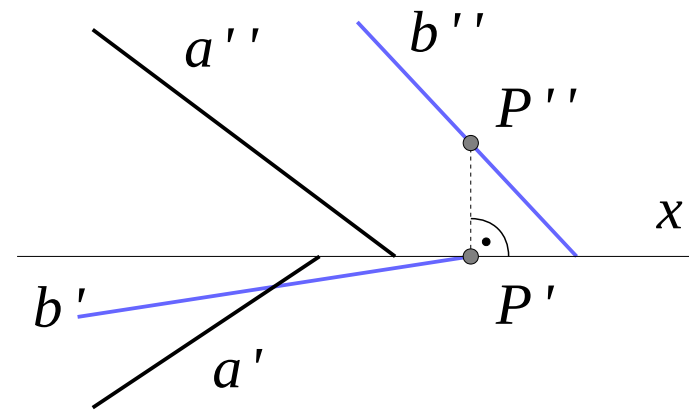
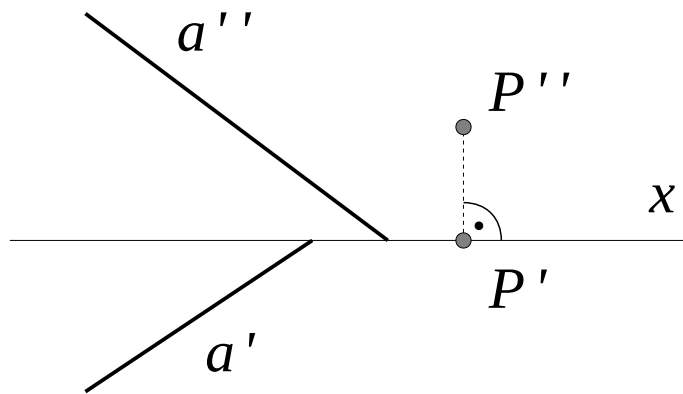
- równoległe
- przecinające się (w tym prostopadłe)
- skośne (w tym prostopadłe)



Dwie proste w przestrzeni są skośne, jeżeli nie są ani równoległe ani przecinające się.

# Położenie dwóch prostych w przestrzeni

Narysować dowolną prostą  $b$ , skośną z prostą  $a$  i przechodzącą przez punkt  $P$ .



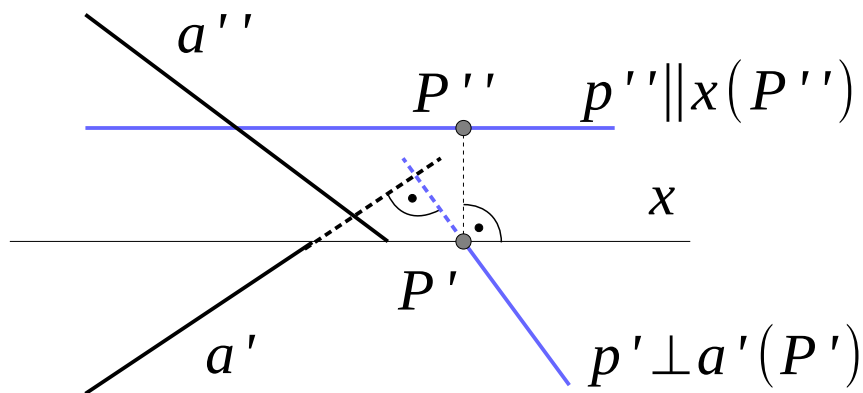
Bierzemy pod uwagę, aby:

- nie był spełniony warunek równoległości prostych,
- nie był spełniony warunek prostokątności prostych,
- rzuty punktu  $P$  leżały na odpowiednich rzutach prostej  $b$ .

# Położenie dwóch prostych w przestrzeni

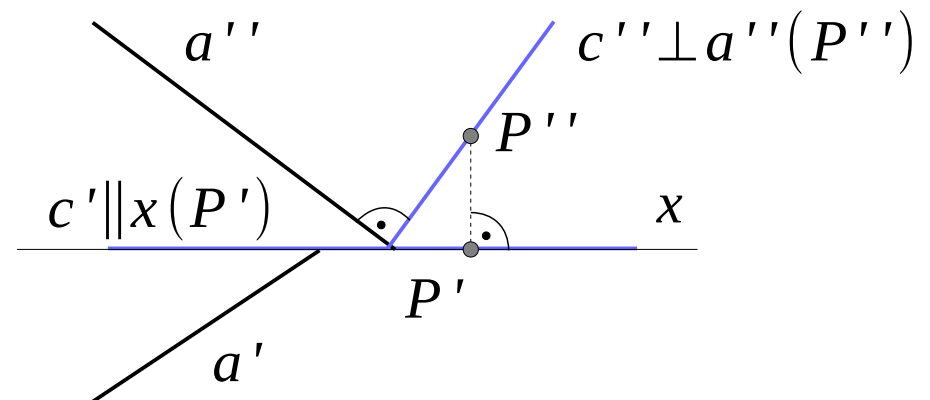
Proste prostopadłe to szczególny przypadek prostych przecinających się lub prostych skośnych.

Proste prostopadłe i jednocześnie mające punkt wspólny rysuje się trudniej (aby to zrobić trzeba się jeszcze kilku rzeczy nauczyć) – łatwo jednak rysuje się proste prostopadłe szczególne.



$$p' \perp a'(P') \quad p'' \parallel x(P'')$$

Prosta pozioma p prostopadła do prostej a i przechodząca przez punkt P.



$$c' \parallel x(P') \quad c'' \perp a''(P'')$$

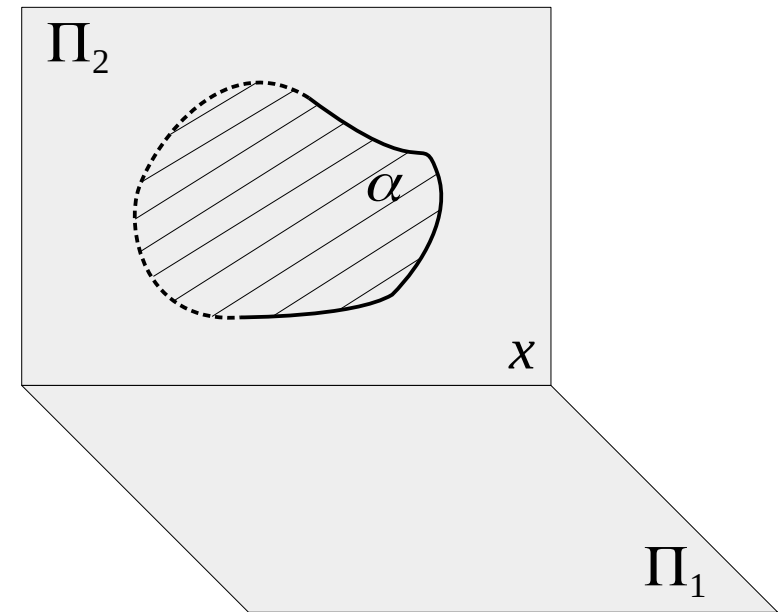
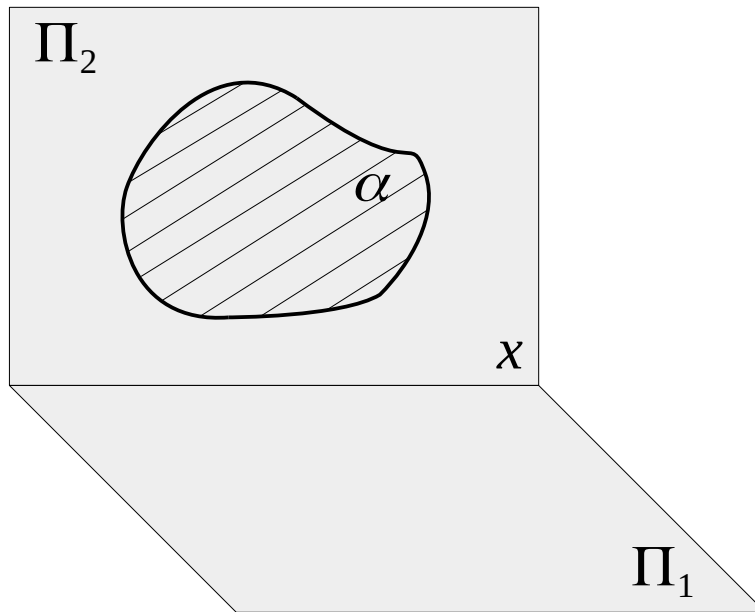
Prosta czołowa c prostopadła do prostej a i przechodząca przez punkt P.



# Płaszczyzna w przestrzeni 2D

Jak w układzie rzutni narysować płaszczyznę, aby była jednoznacznie określona?

Płaszczyzny oznacza się małymi literami alfabetu greckiego.

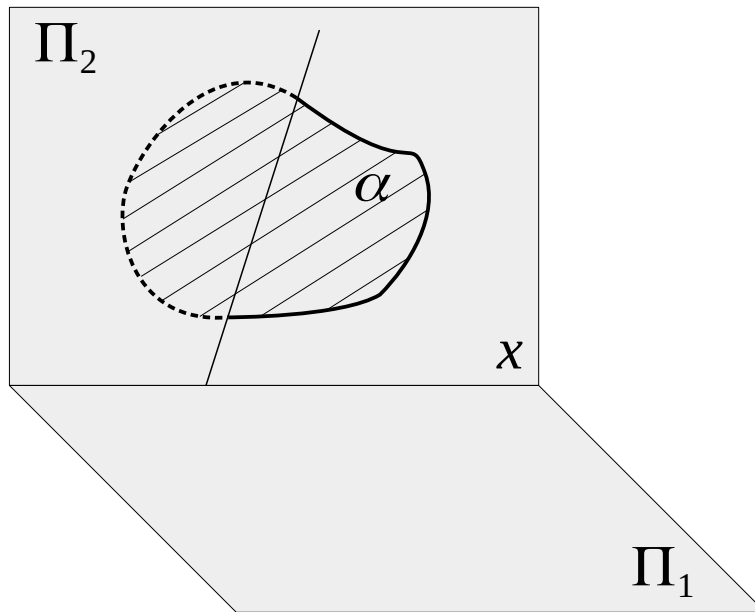


Tu nic nie widać.

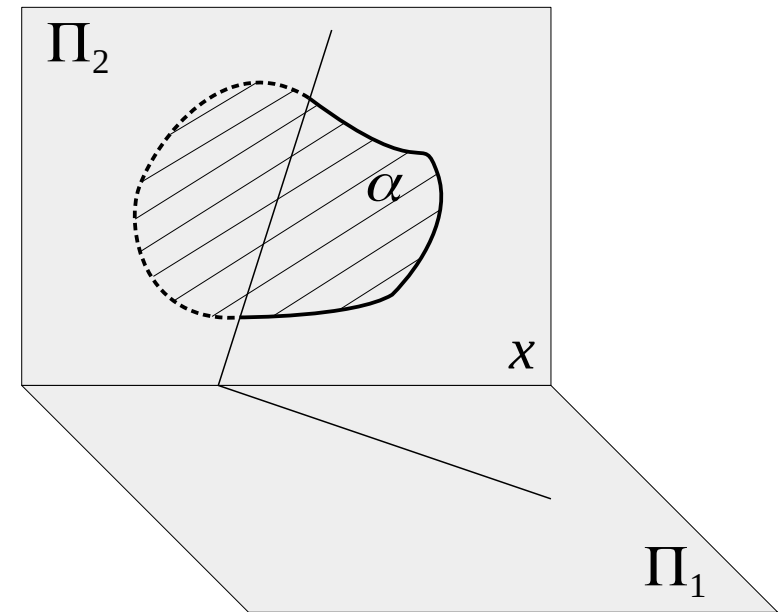
Tu widać, że płaszczyzna przecina rzutnię pionową.

# Płaszczyzna w przestrzeni 2D

Jak w układzie rzutni narysować płaszczyznę, aby była jednoznacznie określona?



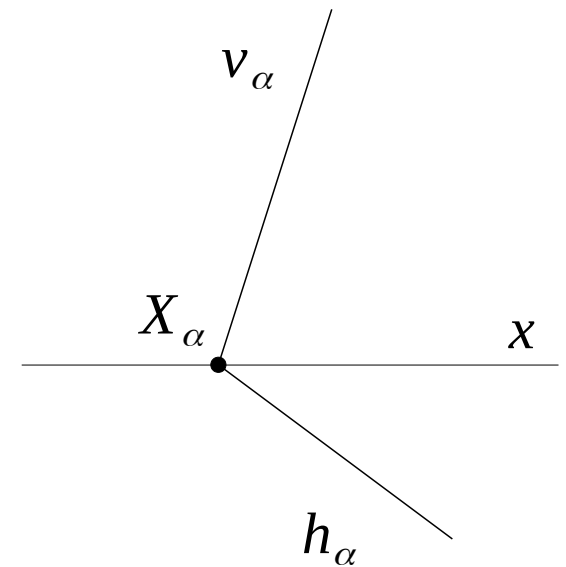
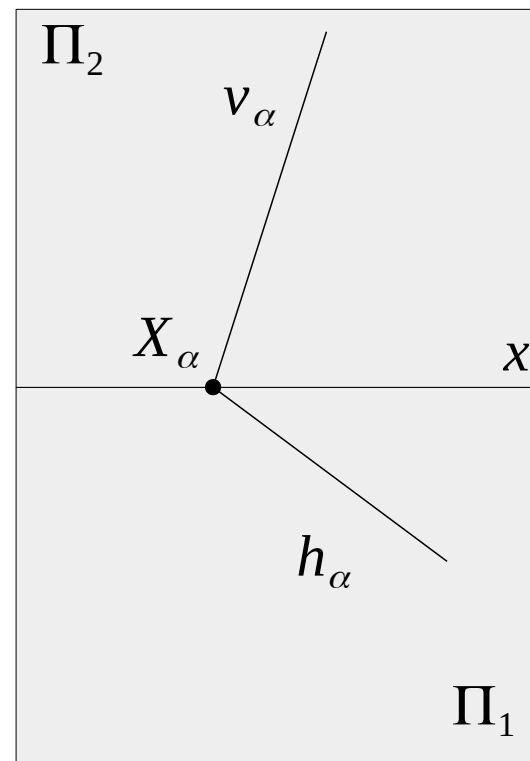
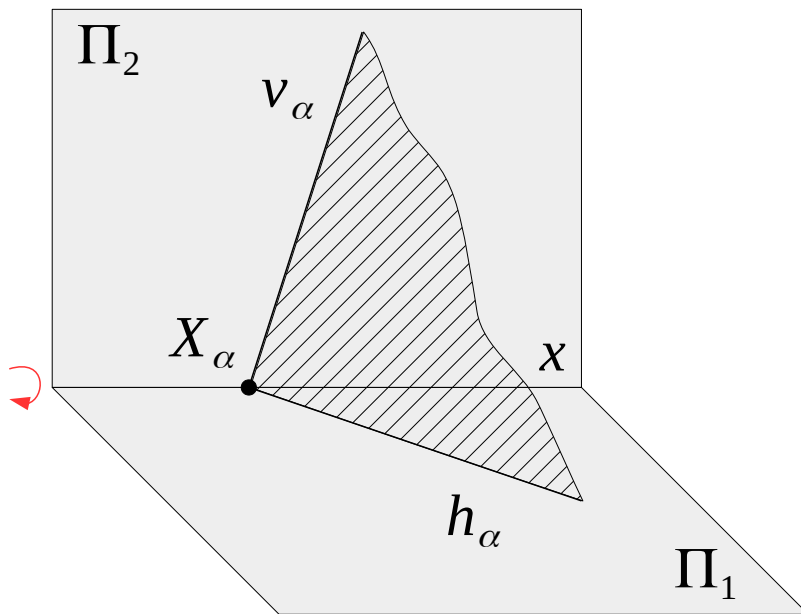
Teraz znacznie lepiej widać linię przecięcia.



Skoro płaszczyzna przechodzi przez oś  $x$ , to musi również przecinać płaszczyznę poziomą.

# Płaszczyzna w przestrzeni 2D

Zastosowanie metody Monge'a w stosunku do płaszczyzny.

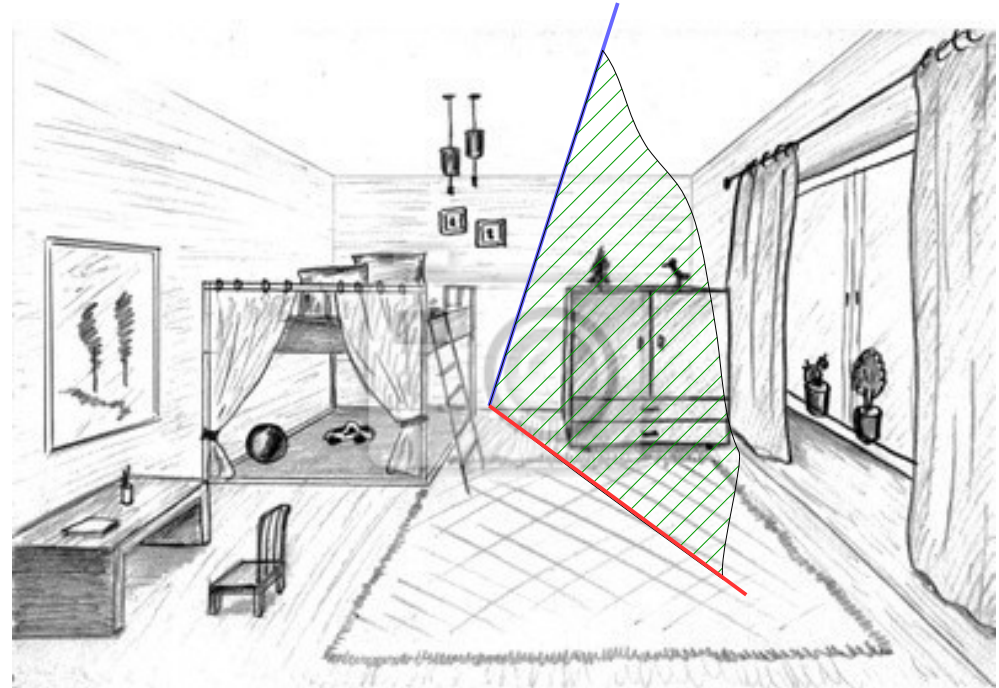
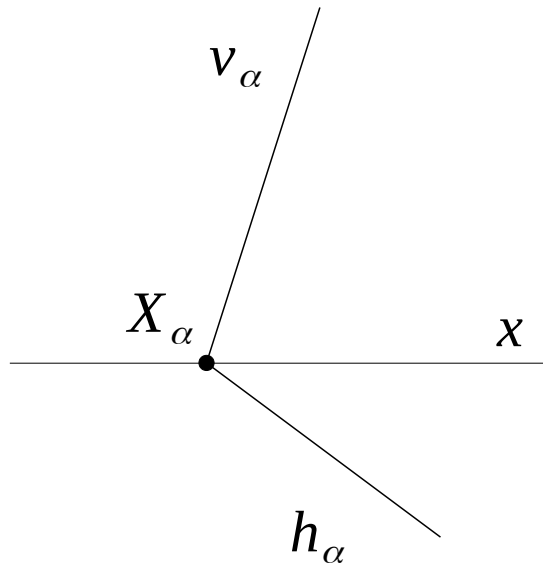


Usunięcie z przestrzeni wszystkiego, co nie leży na rzutniach.

Obrót i nałożenie na siebie rzutni.

Efekt finalny.

# Płaszczyzna w przestrzeni 2D



$h_\alpha$  - ślad poziomy płaszczyzny

$v_\alpha$  - ślad pionowy płaszczyzny

$X_\alpha$  - węzeł płaszczyzny

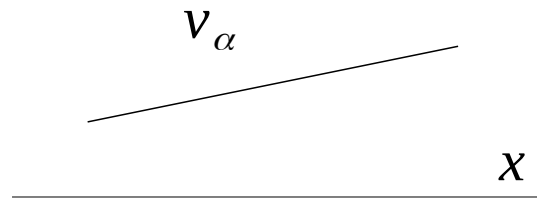
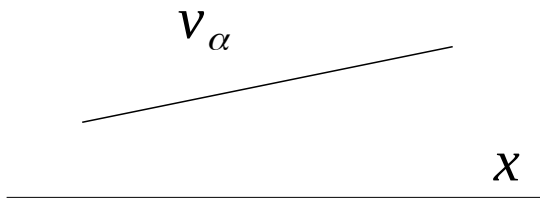
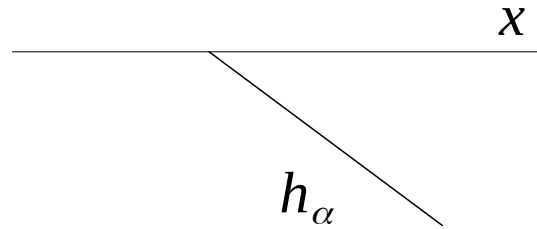
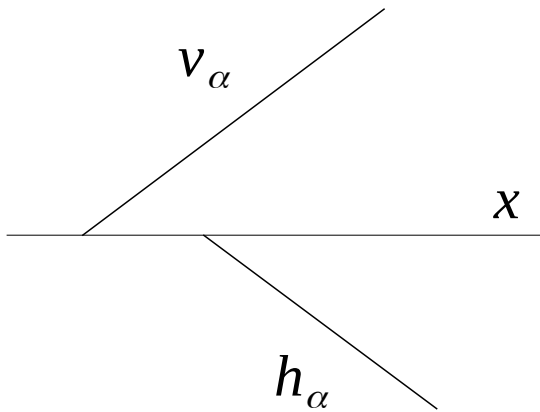
Czy każda płaszczyzna ma dwa ślady?

Czy każda płaszczyzna ma węzeł?

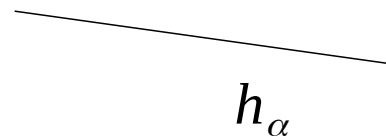
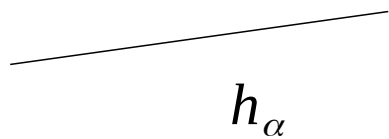
Czy płaszczyzny mają rzuty?

# Płaszczyzna w przestrzeni 2D

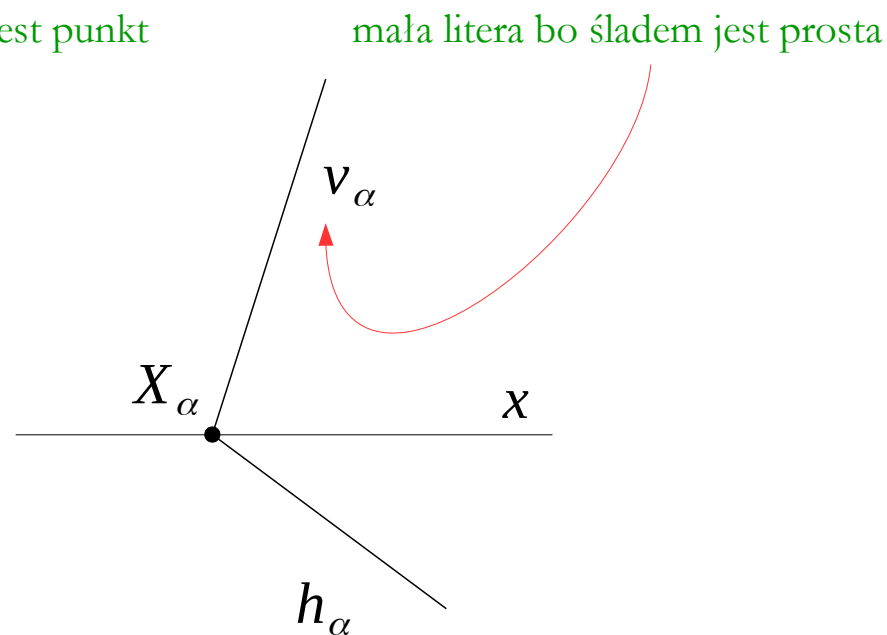
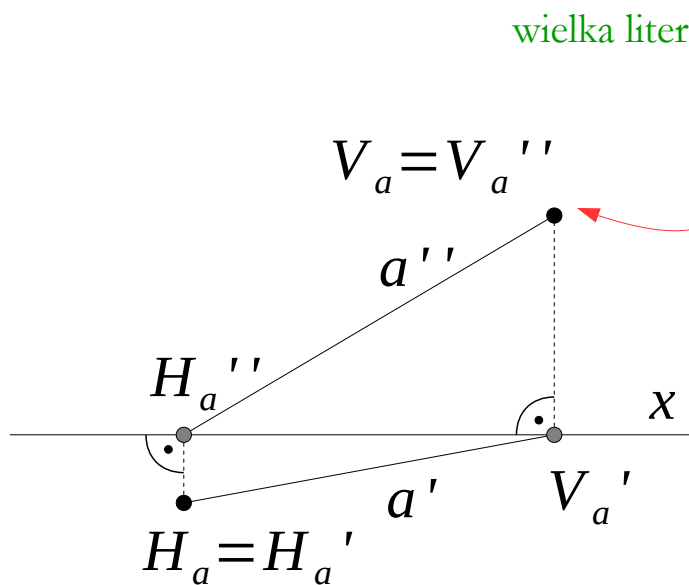
Które rysunki są poprawne?



Jeżeli oba ślady płaszczyzny nie są równoległe do osi  $x$ , to musi istnieć węzeł!



# Uogólnione pojęcie śladu



Uogólnijmy pojęcie śladu: **miejsce** na płaszczyźnie, w którym **obiekt** przebiega rzutnię.

- punkt w przypadku prostej
- prosta w przypadku płaszczyzny

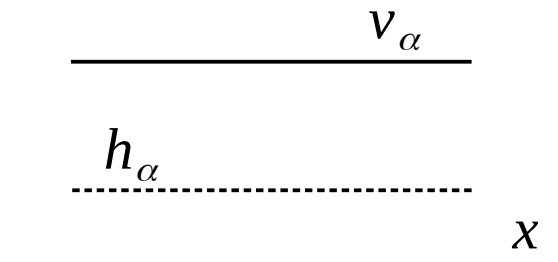
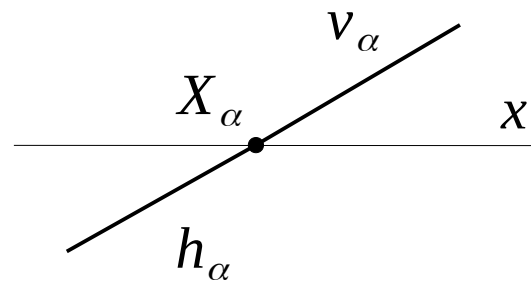
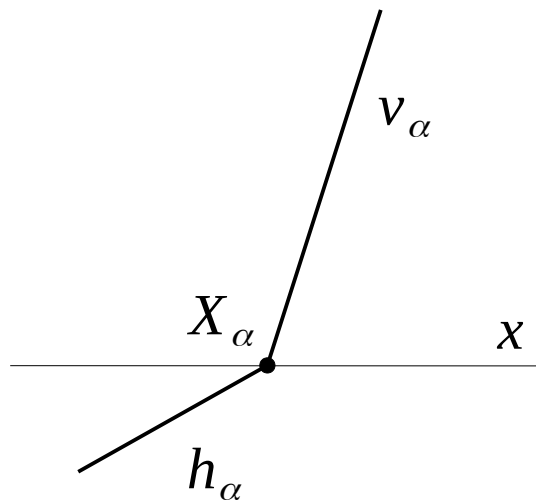
- prosta
- płaszczyzna

# Sposoby określania płaszczyzny

## Sposoby określania płaszczyzny:

- za pomocą śladów
- za pomocą dwóch prostych równoległych
- za pomocą dwóch prostych przecinających się
- za pomocą trzech punktów nie leżących na jednej prostej
- za pomocą prostej i nie leżącego na niej punktu

→  $\alpha(h_\alpha, v_\alpha)$   
 $\alpha(a \parallel b)$   
 $\alpha(a \times b)$   
 $\alpha(A, B, C)$   
 $\alpha(a, A)$

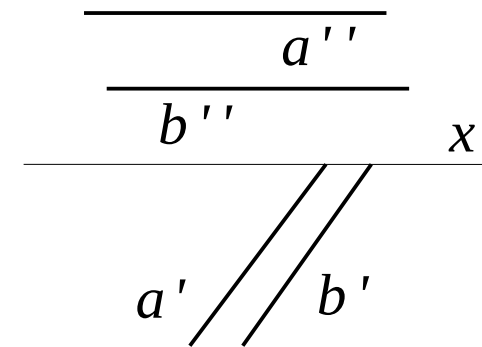
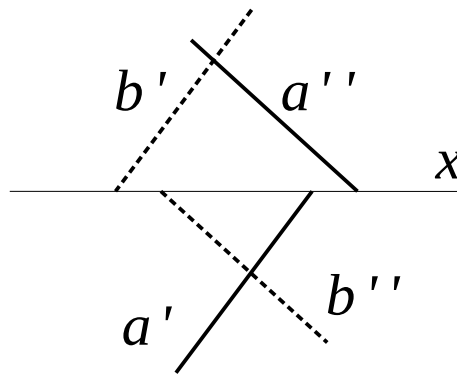
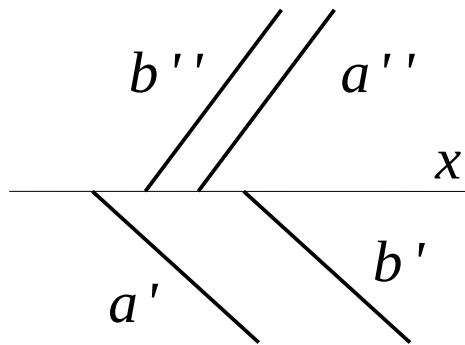


# Sposoby określania płaszczyzny

## Sposoby określania płaszczyzny:

- za pomocą śladów
- za pomocą dwóch prostych równoległych
- za pomocą dwóch prostych przecinających się
- za pomocą trzech punktów nie leżących na jednej prostej
- za pomocą prostej i nie leżącego na niej punktu

$$\begin{aligned} & \alpha(h_\alpha, v_\alpha) \\ \rightarrow & \alpha(a \parallel b) \\ & \alpha(a \times b) \\ & \alpha(A, B, C) \\ & \alpha(a, A) \end{aligned}$$



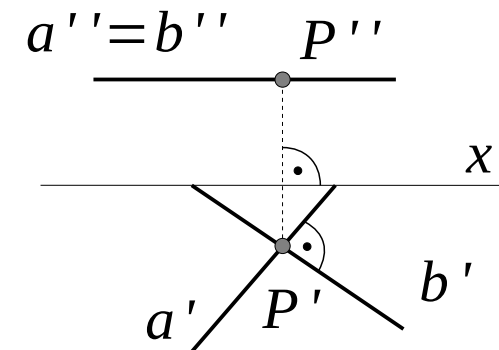
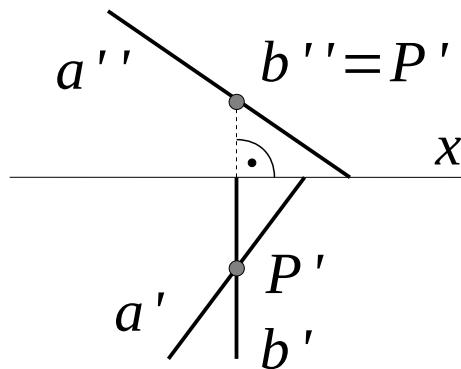
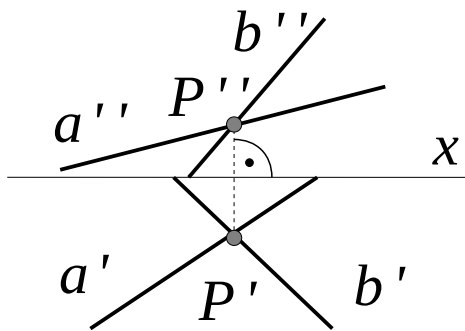


# Sposoby określania płaszczyzny

## Sposoby określania płaszczyzny:

- za pomocą śladów
- za pomocą dwóch prostych równoległych
- za pomocą dwóch prostych przecinających się
- za pomocą trzech punktów nie leżących na jednej prostej
- za pomocą prostej i nie leżącego na niej punktu

$$\begin{aligned} & \alpha(h_\alpha, v_\alpha) \\ & \alpha(a \parallel b) \\ \rightarrow & \alpha(a \times b) \\ & \alpha(A, B, C) \\ & \alpha(a, A) \end{aligned}$$

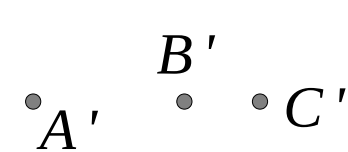
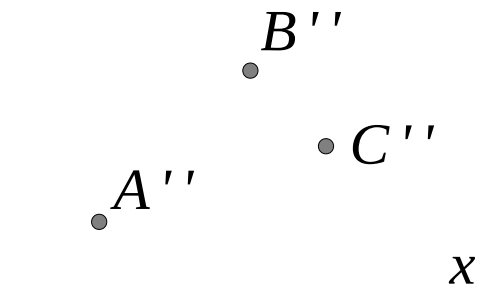
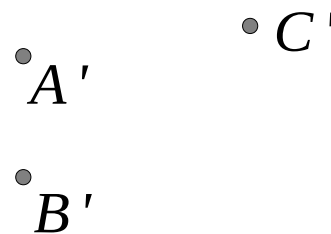
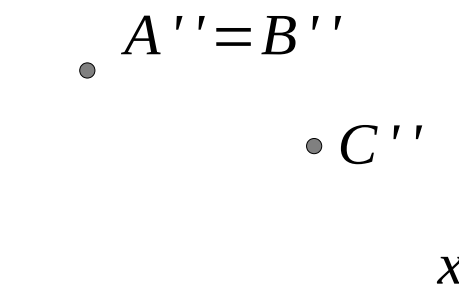
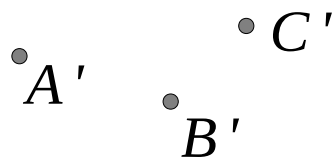
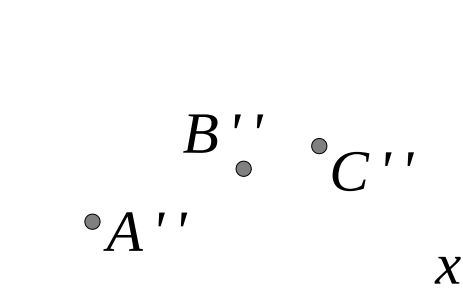


# Sposoby określania płaszczyzny

## Sposoby określania płaszczyzny:

- za pomocą śladów
- za pomocą dwóch prostych równoległych
- za pomocą dwóch prostych przecinających się
- za pomocą trzech punktów nie leżących na jednej prostej
- za pomocą prostej i nie leżącego na niej punktu

$$\begin{aligned} & \alpha(h_\alpha, v_\alpha) \\ & \alpha(a \parallel b) \\ & \alpha(a \times b) \\ \rightarrow & \alpha(A, B, C) \\ & \alpha(a, A) \end{aligned}$$



# Sposoby określania płaszczyzny

## Sposoby określania płaszczyzny:

- za pomocą śladów
- za pomocą dwóch prostych równoległych
- za pomocą dwóch prostych przecinających się
- za pomocą trzech punktów nie leżących na jednej prostej
- za pomocą prostej i nie leżącego na niej punktu

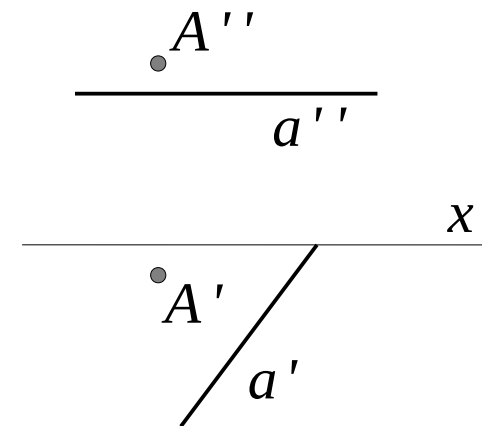
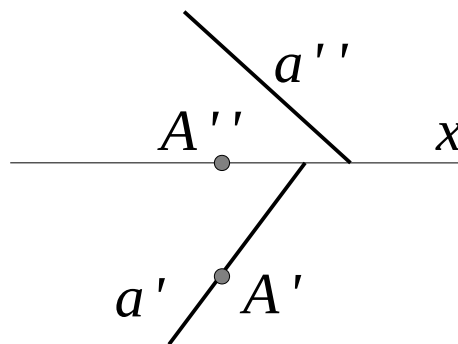
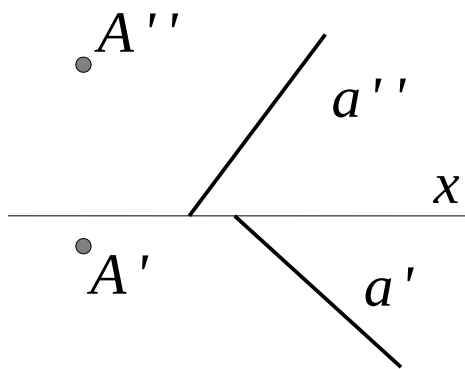
$$\alpha(h_\alpha, v_\alpha)$$

$$\alpha(a \parallel b)$$

$$\alpha(a \times b)$$

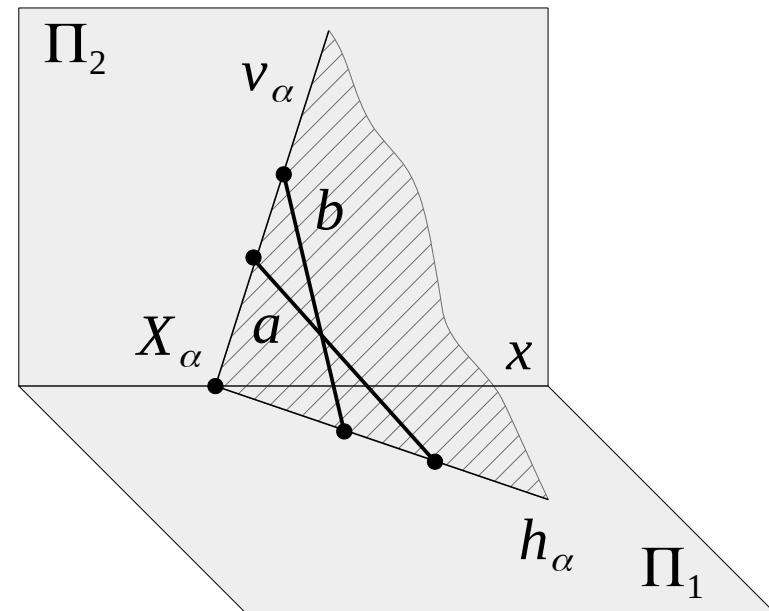
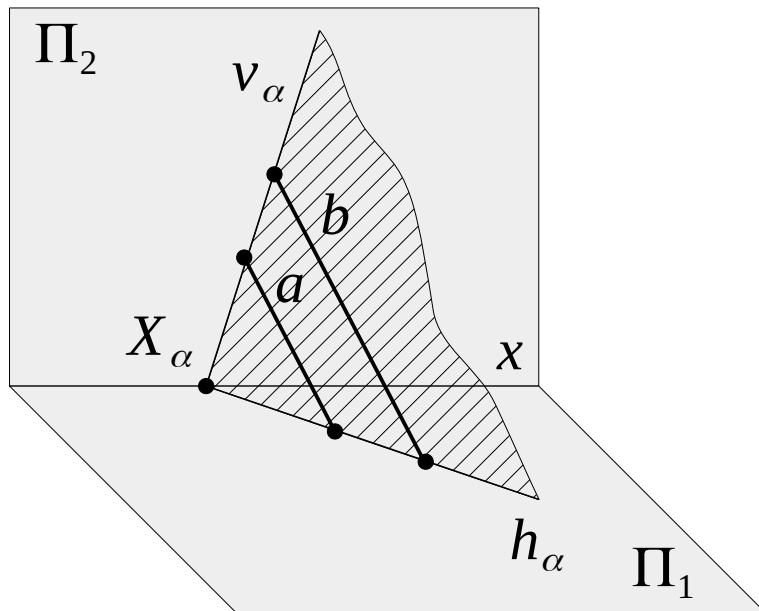
$$\alpha(A, B, C)$$

$$\rightarrow \alpha(a, A)$$



# Wyznaczanie śladów płaszczyzny

Aby wyznaczyć ślady płaszczyzny należy przedstawić ją w postaci dwóch prostych (równoległych lub przecinających się – bez znaczenia), znaleźć ślady tych prostych, a następnie odpowiednio je połączyć.

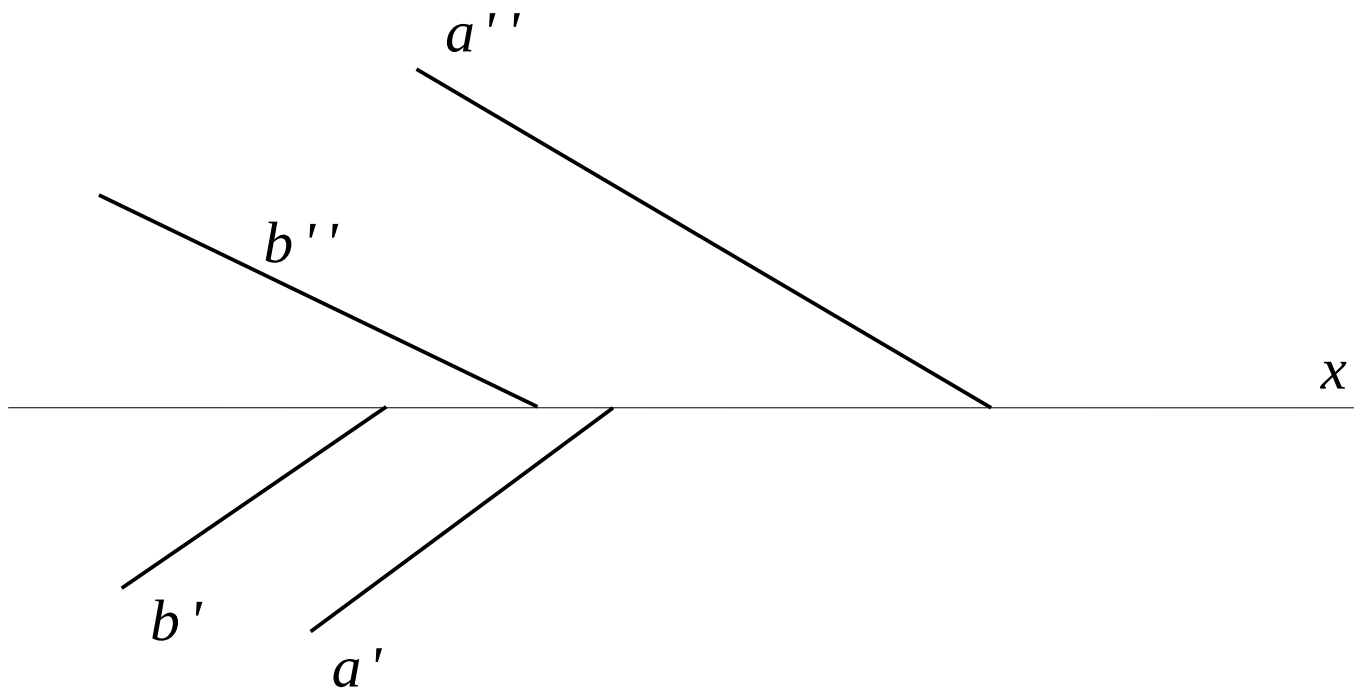


Jeżeli płaszczyzna posiada węzeł, to do określenia jej śladów wystarczą trzy ślady prostych – warto jednak wykorzystać wszystkie ślady, gdyż da to potwierdzenie, czy rysunek jest poprawny.

# Wyznaczanie śladów płaszczyzny

---

Jak wyznaczyć ślady płaszczyzny mając dwie proste ją określające?

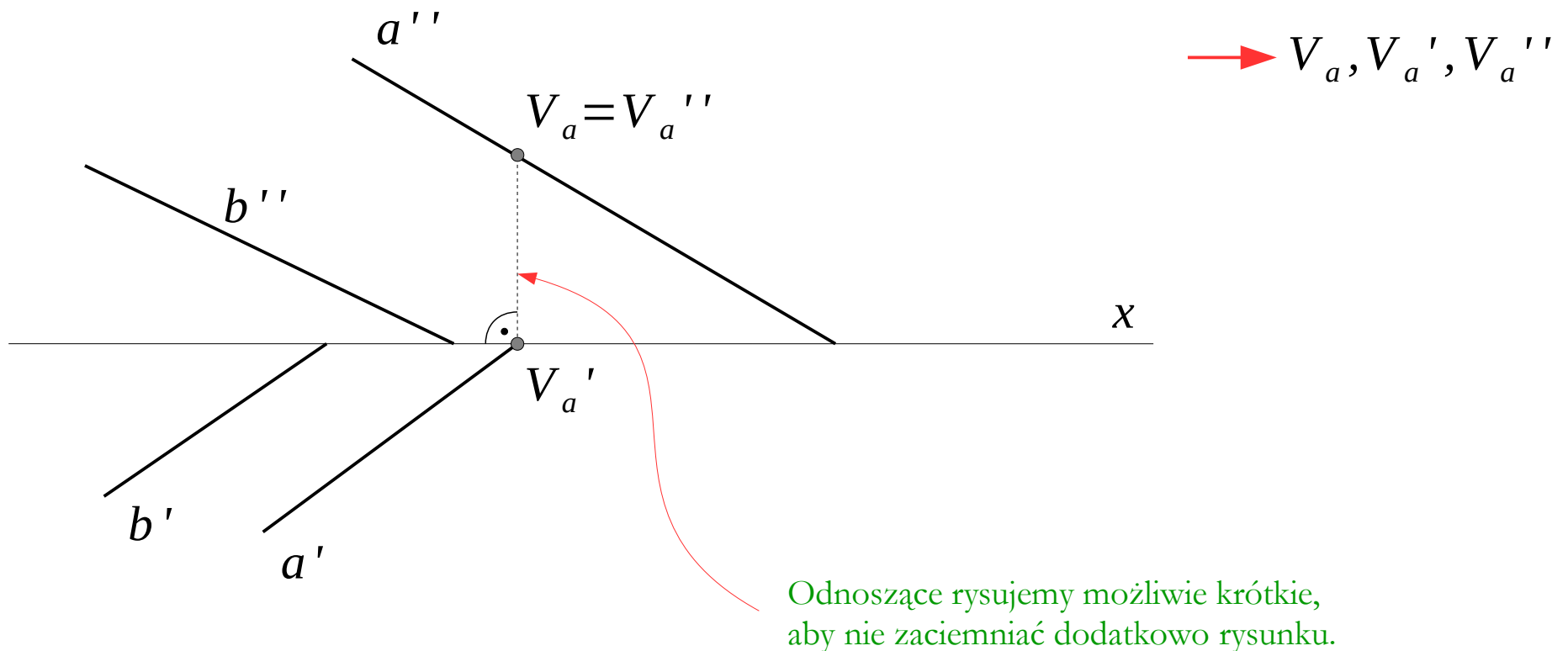


Nie ma znaczenia, czy proste są równoległe czy przecinające się – postępujemy tak samo.

# Wyznaczanie śladów płaszczyzny

Po kolei wyznaczamy wszystkie ślady prostych – kolejność nie ma znaczenia.

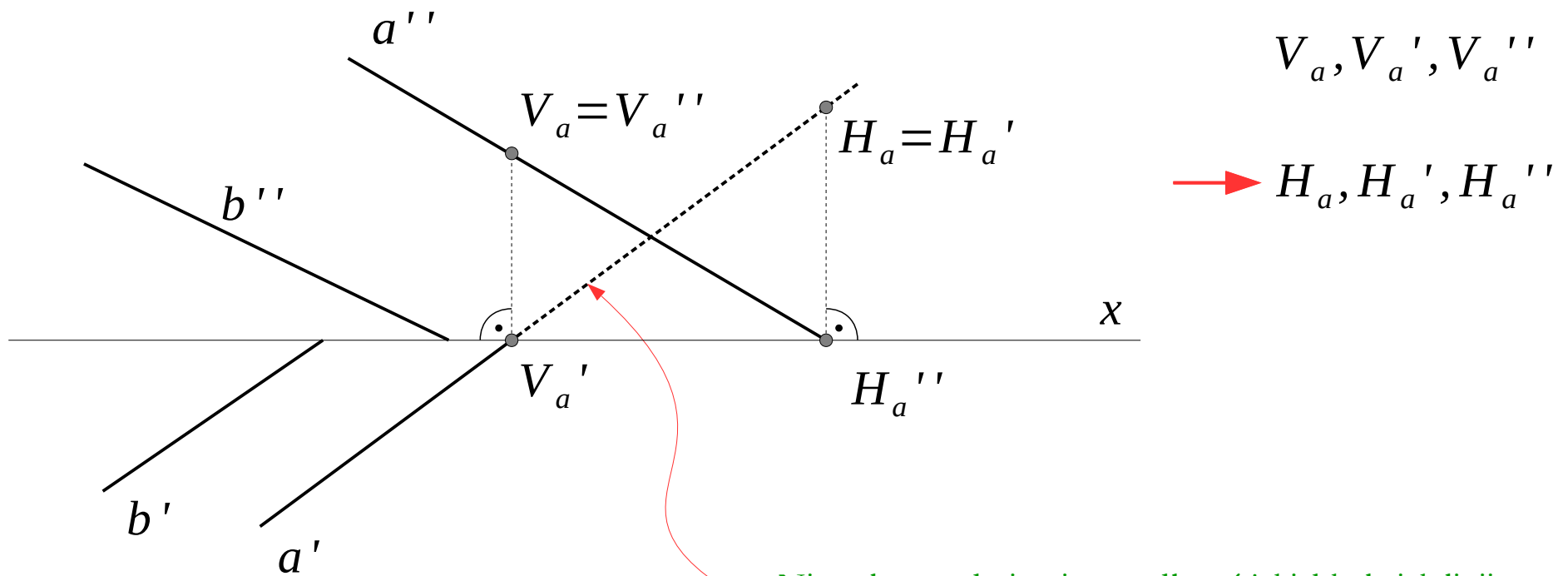
Jak wyznaczyć ślady płaszczyzny mając dwie proste ją określające?



# Wyznaczanie śladów płaszczyzny

Po kolei wyznaczamy wszystkie ślady prostych – kolejność nie ma znaczenia.

Jak wyznaczyć ślady płaszczyzny mając dwie proste ją określające?

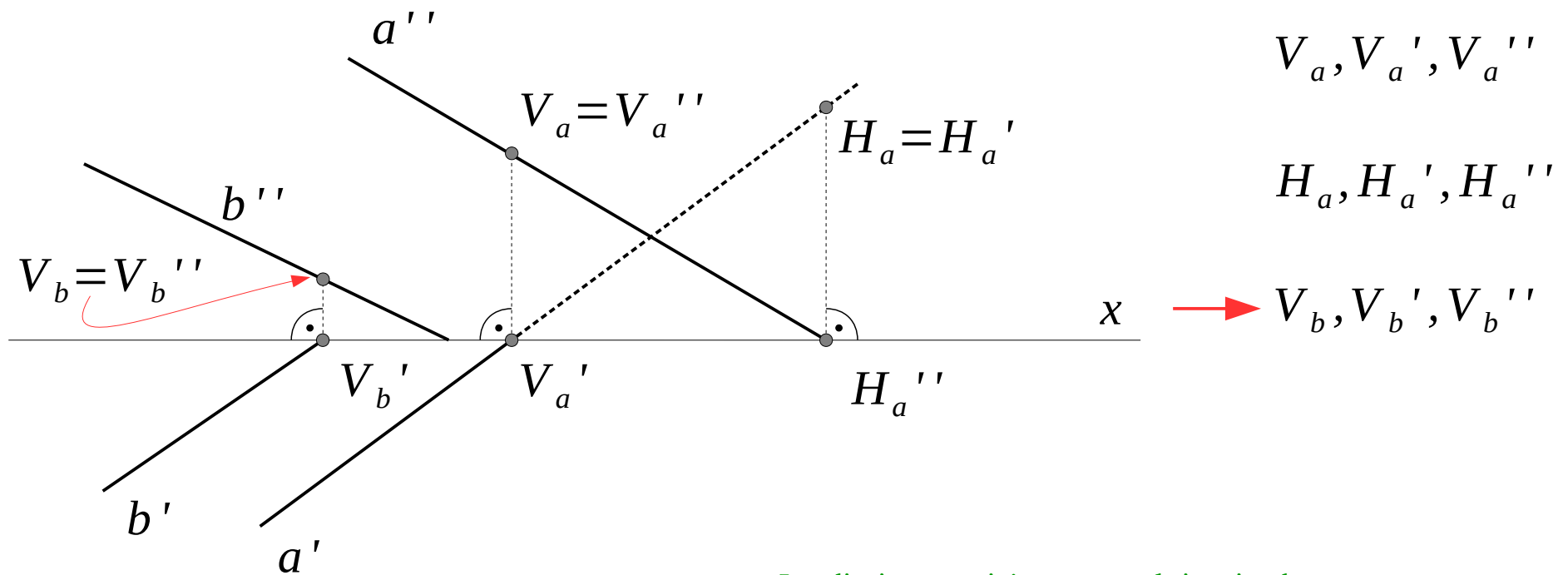


Nie należy nadmiernie przedłużać jakichkolwiek linii, gdyż zaciemnia to rysunek.

# Wyznaczanie śladów płaszczyzny

Po kolei wyznaczamy wszystkie ślady prostych – kolejność nie ma znaczenia.

Jak wyznaczyć ślady płaszczyzny mając dwie proste ją określające?



Jeżeli nie ma miejsca na podpisanie elementu, to można to zrobić tak, jak pokazano na rysunku.

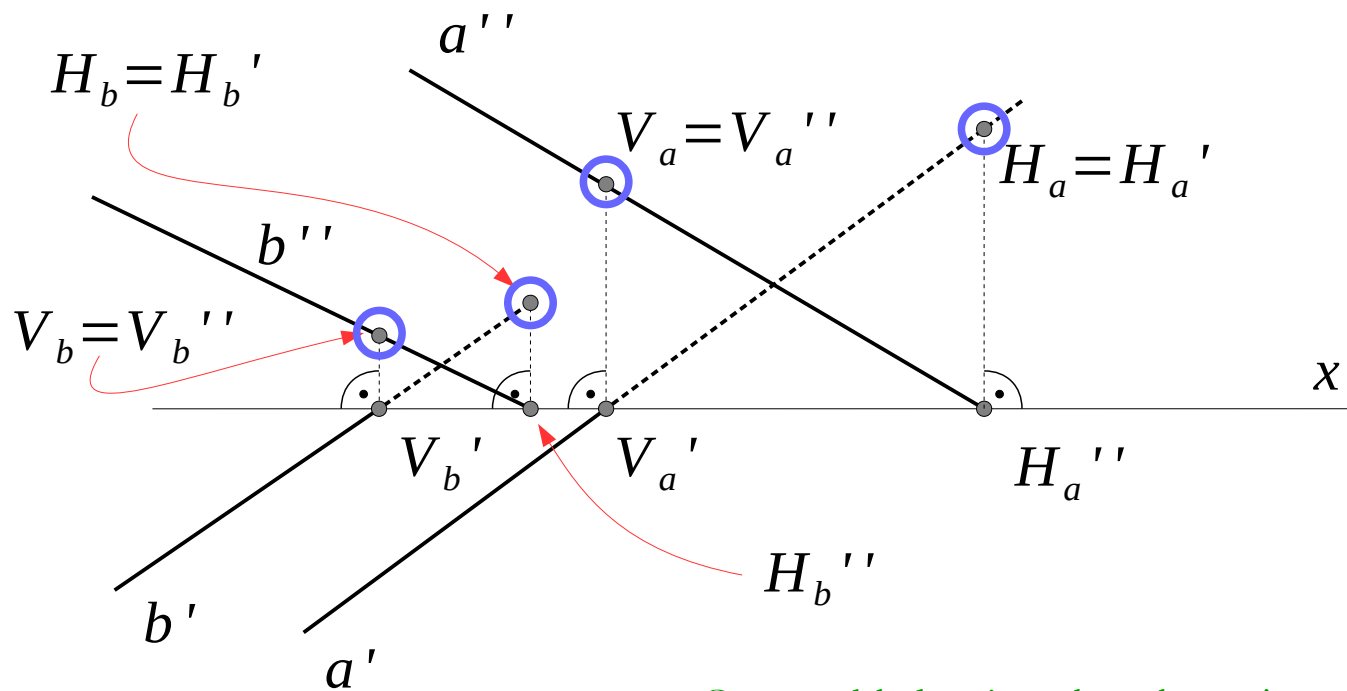




# Wyznaczanie śladów płaszczyzny

Mając wszystkie ślady łączymy je odpowiednio.

Jak wyznaczyć ślady płaszczyzny mając dwie proste ją określające?



$V_a, V_a', V_a''$

$H_a, H_a', H_a''$

$V_b, V_b', V_b''$

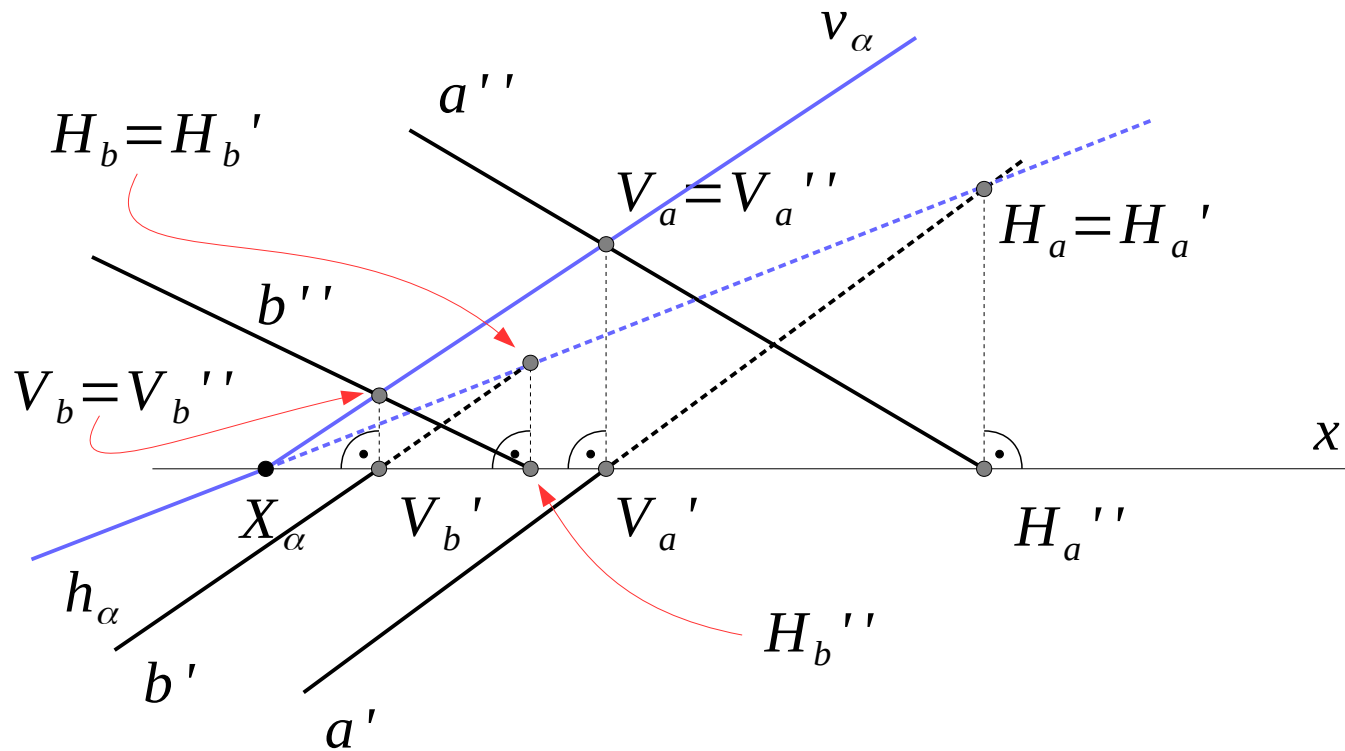
$H_b, H_b', H_b''$

Częstym błędem jest złe połączenie rzutów  
– należy się skupić i zastanowić, co na tym etapie jest najważniejsze.

# Wyznaczanie śladów płaszczyzny

Mając wszystkie ślady łączymy je odpowiednio.

Jak wyznaczyć ślady płaszczyzny mając dwie proste ją określające?



$V_a, V_a', V_a''$

$H_a, H_a', H_a''$

$V_b, V_b', V_b''$

$H_b, H_b', H_b''$

UWAGA: nie we wszystkich zadaniach wyznaczanie śladów jest konieczne (jeżeli nie ma tego w treści) – czasami konstrukcję można wykonać inaczej.

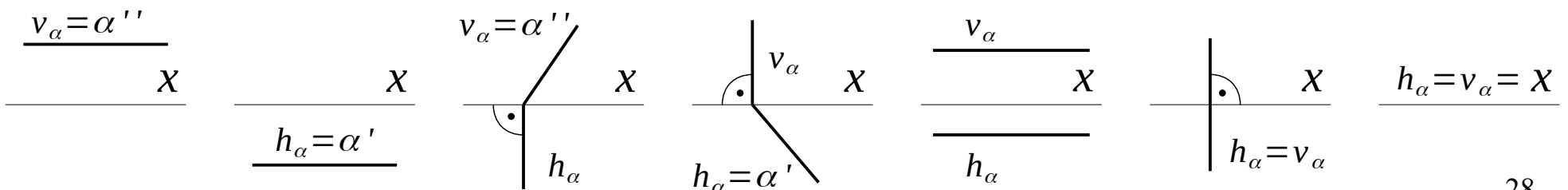
# Płaszczyzny szczególne w przestrzeni 2D

**Płaszczyzna szczególna** – płaszczyzna zorientowana w charakterystyczny sposób (prostopadle lub równoległe) względem rzutni lub osi układu współrzędnych.

Płaszczyzny szczególne:

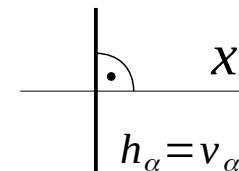
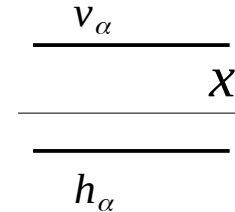
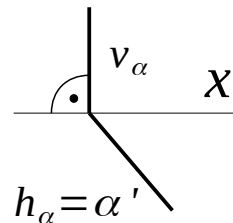
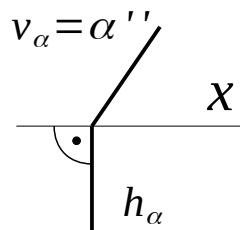
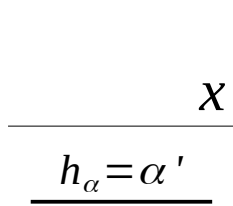
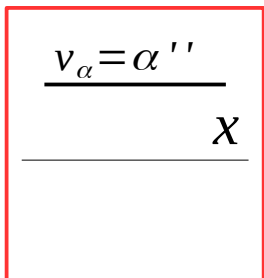
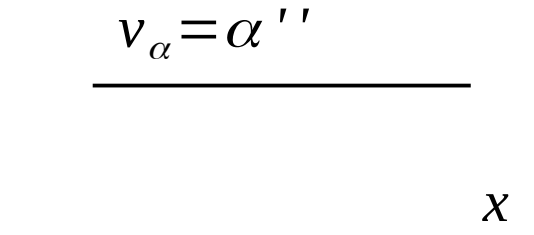
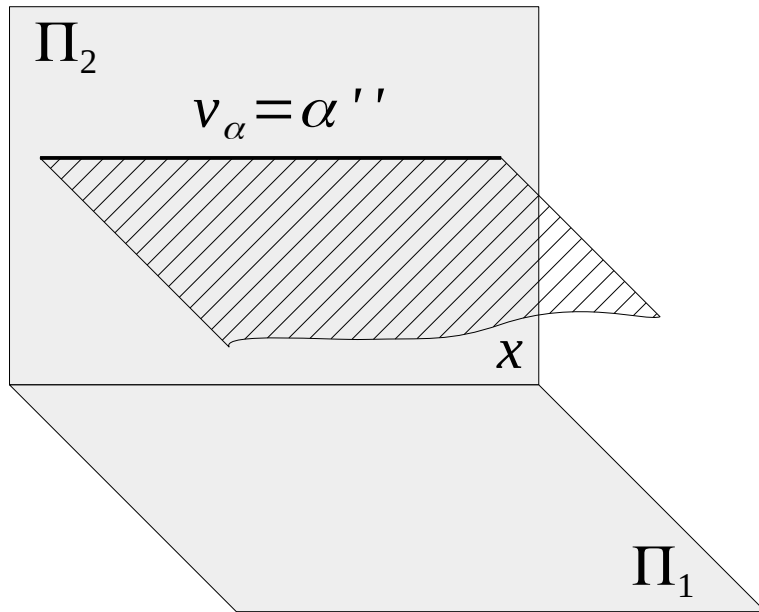
1. płaszczyzna pozioma
2. płaszczyzna czołowa
3. płaszczyzna pionowo-rzutująca
4. płaszczyzna poziomo-rzutująca
5. płaszczyzna równoległa do osi x
6. płaszczyzna prostopadła do osi x
7. płaszczyzna przechodząca przez oś x

W przypadku niektórych płaszczyzn szczególnych można zaznaczyć ich rzuty.



# Płaszczyzny szczególne w przestrzeni 2D

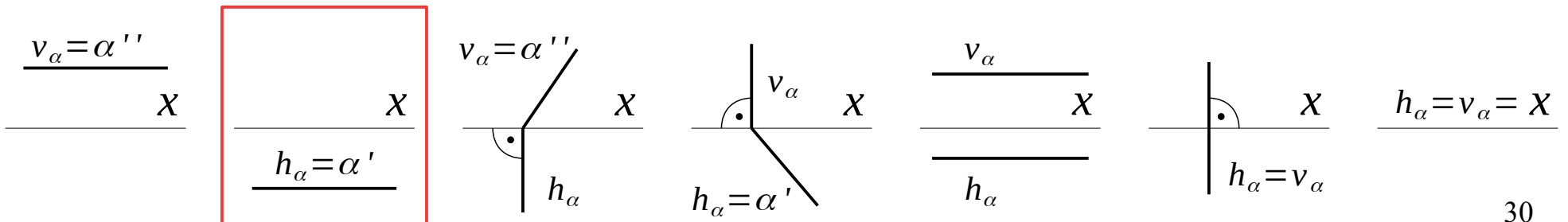
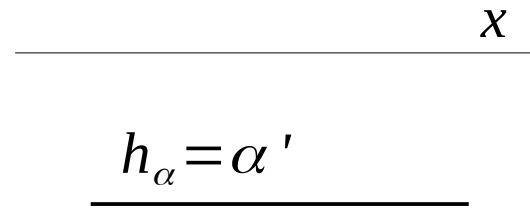
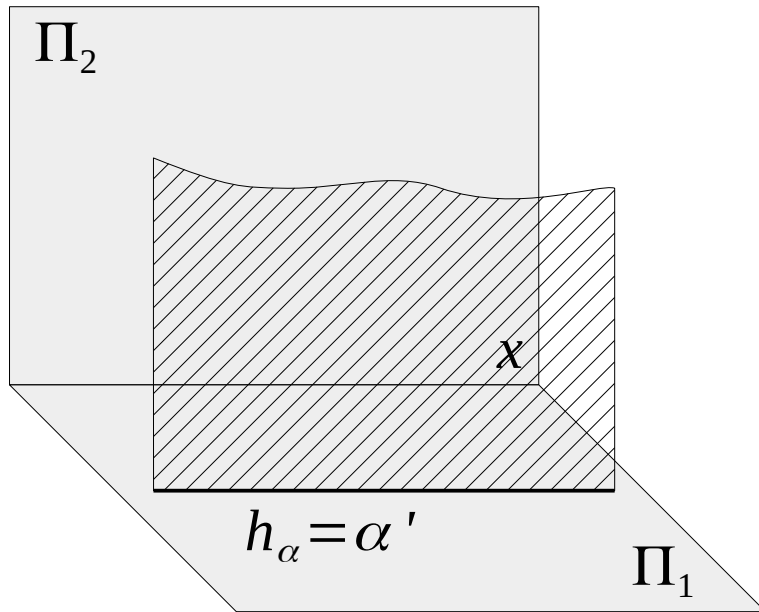
## 1. Płaszczyzna pozioma – równoległa do $\Pi_1$



$$h_\alpha = v_\alpha = X$$

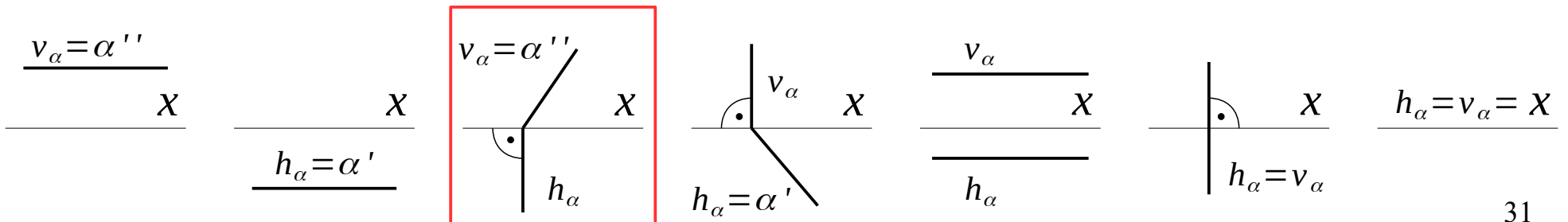
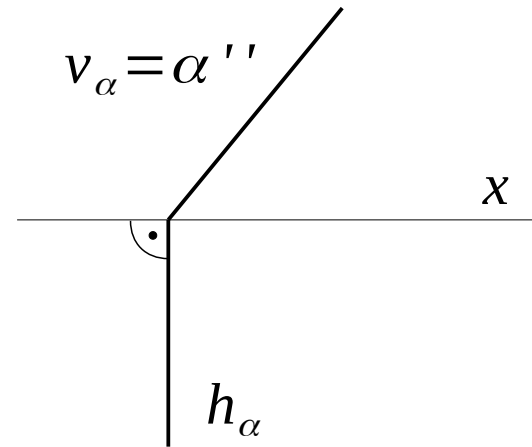
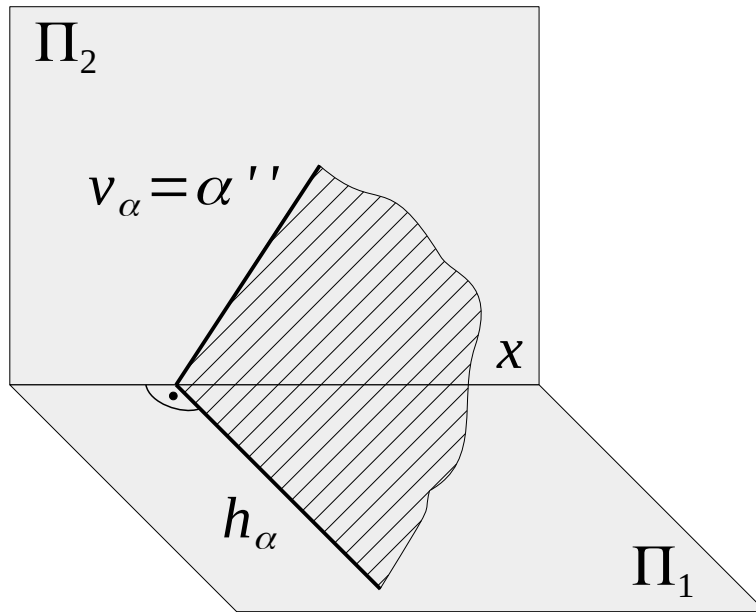
# Płaszczyzny szczególne w przestrzeni 2D

## 2. Płaszczyzna czołowa – równoległa do $\Pi_2$



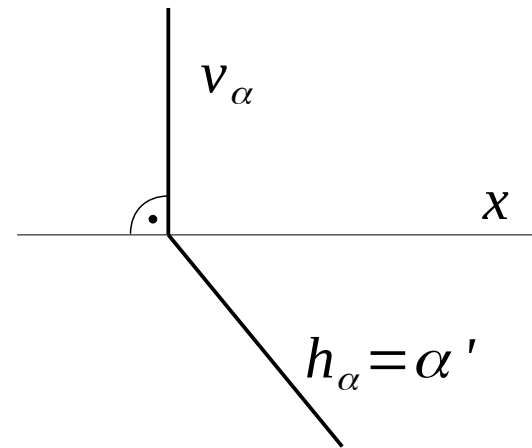
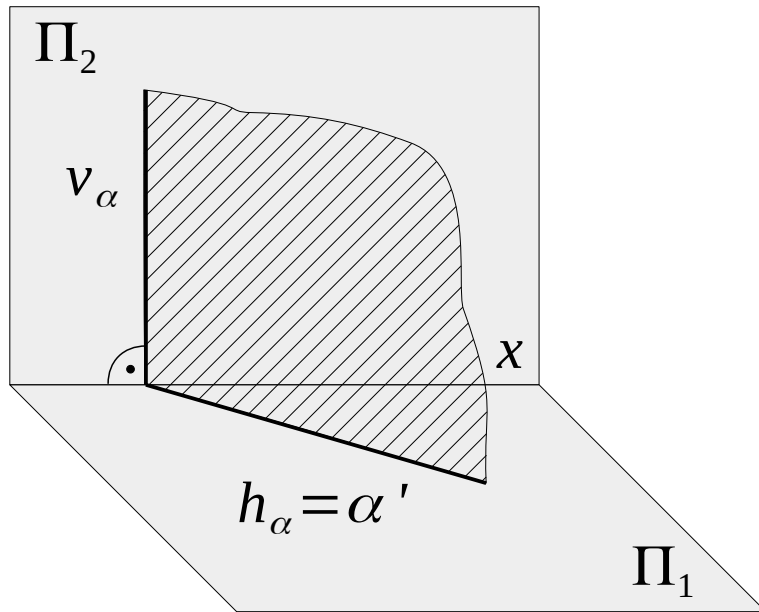
# Płaszczyzny szczególne w przestrzeni 2D

## 3. Płaszczyzna pionowo-rzutu – prostopadła do $\Pi_2$



# Płaszczyzny szczególne w przestrzeni 2D

## 4. Płaszczyzna poziomo-rzutująca – prostopadła do $\Pi_1$



$$\frac{v_\alpha = \alpha''}{X}$$

$$\frac{h_\alpha = \alpha'}{X}$$

$$\frac{v_\alpha = \alpha''}{h_\alpha}$$

$$\frac{v_\alpha}{h_\alpha = \alpha'}$$

$$\frac{v_\alpha}{h_\alpha}$$

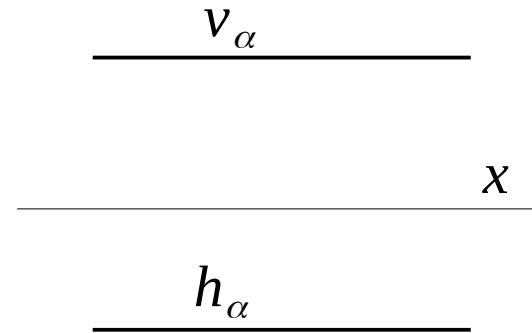
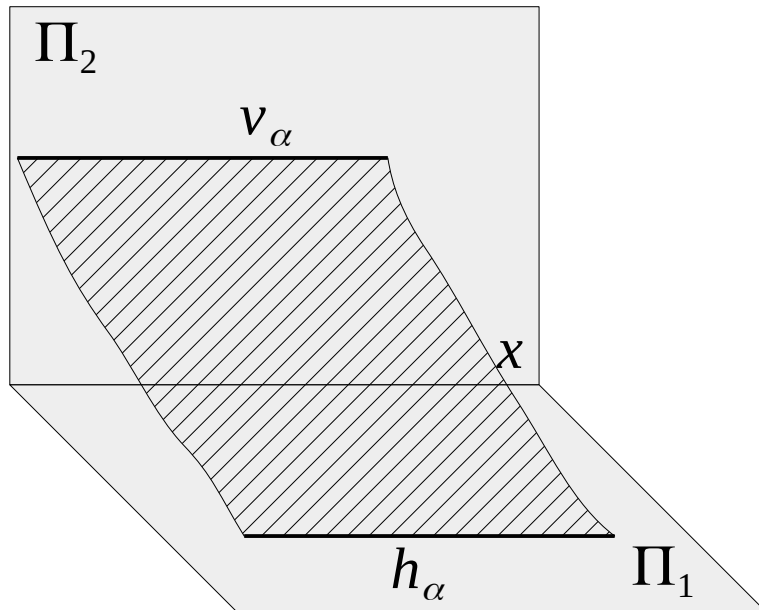
$$\frac{X}{h_\alpha = v_\alpha}$$

$$h_\alpha = v_\alpha = X$$



# Płaszczyzny szczególne w przestrzeni 2D

## 5. Płaszczyzna równoległa do osi x



$$\frac{v_\alpha = \alpha''}{X}$$

$$\frac{h_\alpha = \alpha'}{X}$$

$$\frac{v_\alpha = \alpha''}{h_\alpha}$$

$$\frac{v_\alpha}{h_\alpha = \alpha'}$$

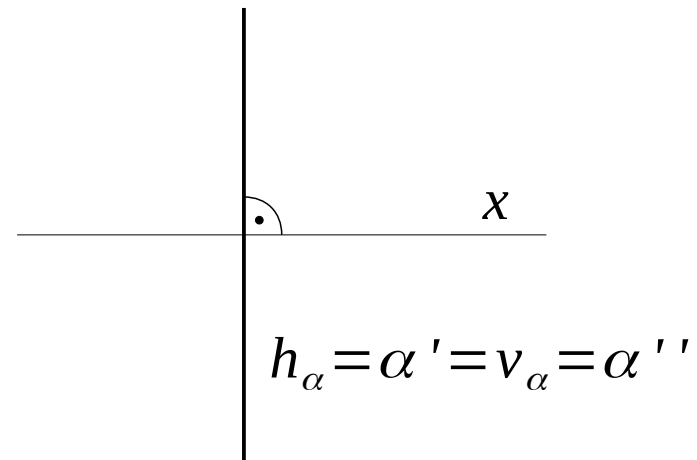
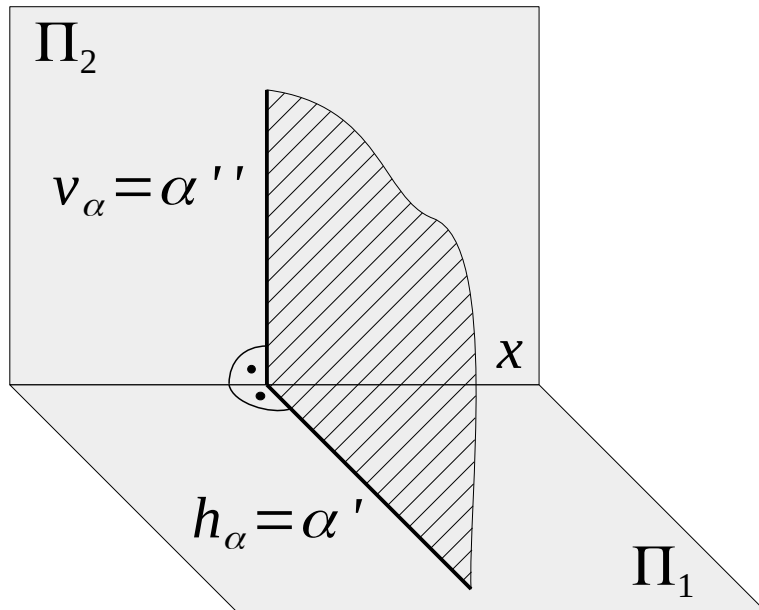
$$\frac{v_\alpha}{h_\alpha}$$

$$\frac{v_\alpha}{h_\alpha = v_\alpha}$$

$$h_\alpha = v_\alpha = X$$

# Płaszczyzny szczególne w przestrzeni 2D

## 6. Płaszczyzna prostopadła do osi x



$$\frac{v_\alpha = \alpha''}{x}$$

$$\frac{x}{h_\alpha = \alpha'}$$

$$\frac{v_\alpha = \alpha''}{h_\alpha}$$

$$\frac{v_\alpha}{h_\alpha = \alpha'}$$

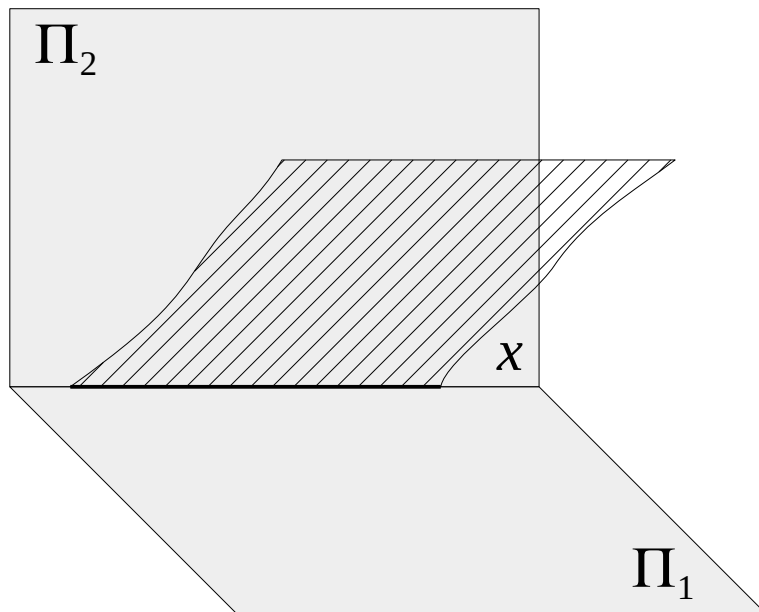
$$\frac{v_\alpha}{h_\alpha}$$

$$\frac{x}{h_\alpha = v_\alpha}$$

$$h_\alpha = v_\alpha = x$$

# Płaszczyzny szczególne w przestrzeni 2D

## 7. Płaszczyzna przechodząca przez oś x



$$h_\alpha = v_\alpha = x$$

$$\frac{v_\alpha = \alpha''}{x}$$

$$\frac{x}{h_\alpha = \alpha'}$$

$$\frac{v_\alpha = \alpha''}{h_\alpha}$$

$$\frac{v_\alpha}{h_\alpha = \alpha'}$$

$$\frac{v_\alpha}{h_\alpha}$$

$$\frac{x}{h_\alpha = v_\alpha}$$

$$\frac{h_\alpha = v_\alpha = x}{35}$$

# Podsumowanie

---

## Zagadnienia:

Położenie dwóch prostych w przestrzeni, płaszczyzna w przestrzeni 2D, uogólnione pojęcie śladu, sposoby określania płaszczyzny, wyznaczanie śladów płaszczyzny, płaszczyzny szczególne w przestrzeni – definicje i własności.

UNIVERSITY OF WARMIA AND MAZURY IN OLSZTYN  
The Faculty of Technical Sciences  
POLAND, 10-957 Olsztyn, M. Oczapowskiego 11  
tel.: (48)(89) 5-23-32-40, fax: (48)(89) 5-23-32-55  
URL: <http://www.uwm.edu.pl/edu/sobieski/> (in Polish)



---

**Dziękuję za uwagę**

**Wojciech Sobieski**

---

Olsztyn, 2021-2022