



GEOMETRIA WYKREŚLNA

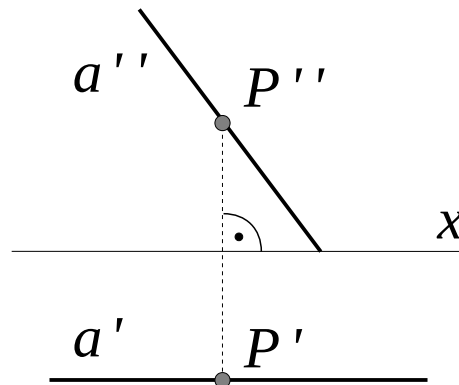
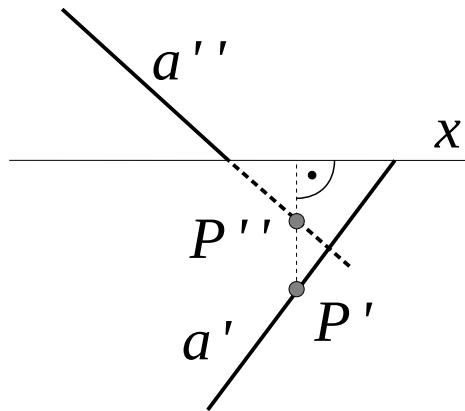
Elementy przynależne. Elementy wspólne.

Elementy przynależne

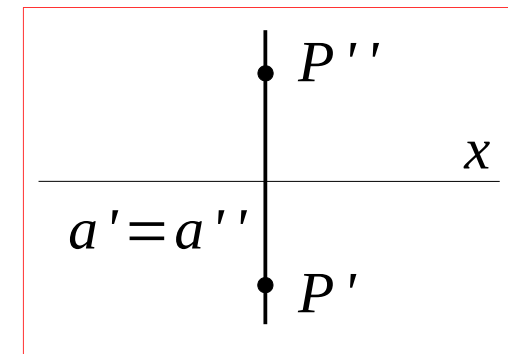
Elementy przynależne:

- punkt na prostej
- prosta na płaszczyźnie
- punkt na płaszczyźnie

Pamiętajmy, że **(zawsze, zawsze)** rzut poziomy i rzut pionowy tego samego punktu leżą na jednej odnoszącej.



Wyjątek od reguły w ramce!
– tu potrzebna rzutnia boczna.



Punkt przynależy do prostej, jeżeli rzuty punktu leżą na odpowiednich rzutach tej prostej.

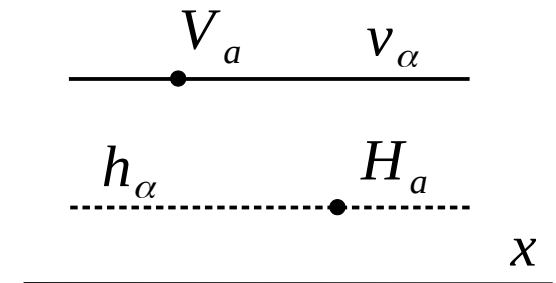
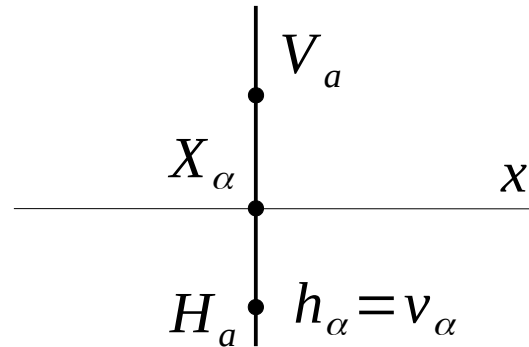
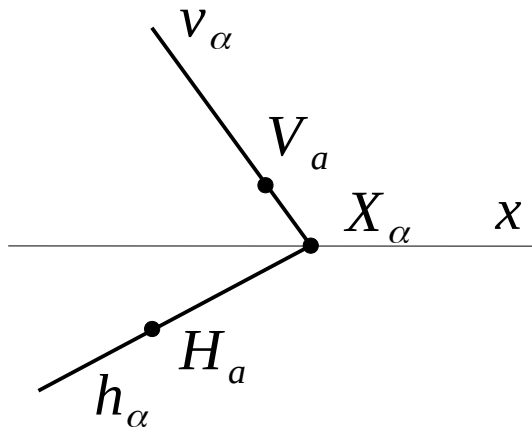
$$P' \in a' \quad \text{oraz} \quad P'' \in a''$$

Elementy przynależne

Elementy przynależne:

- punkt na prostej
- prosta na płaszczyźnie
- punkt na płaszczyźnie

Pamiętajmy, że płaszczyzna może być określona inaczej niż poprzez ślady.



Prosta przynależy do płaszczyzny, gdy posiada dwa punkty wspólne z tą płaszczyzną (np. ślady prostej).

$$\begin{array}{ccc} A \in a & & B \in a \\ A \in \alpha & \text{oraz} & B \in \alpha \end{array}$$

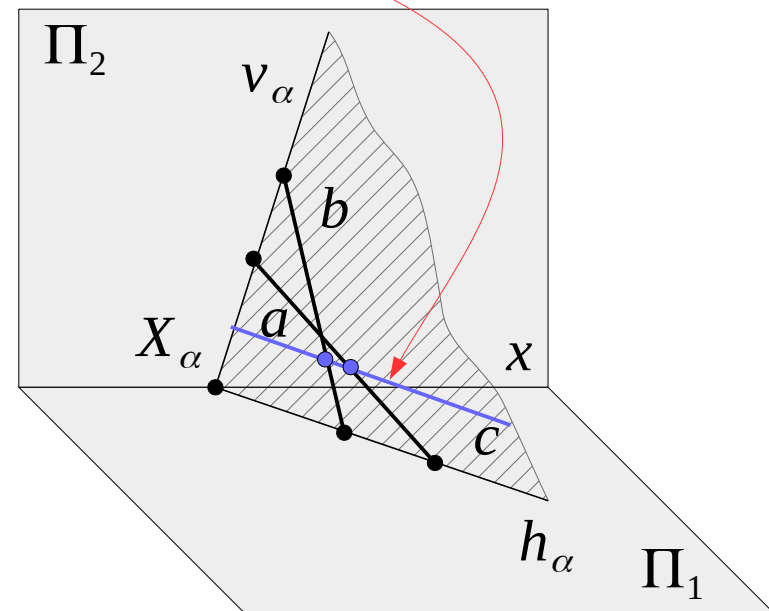
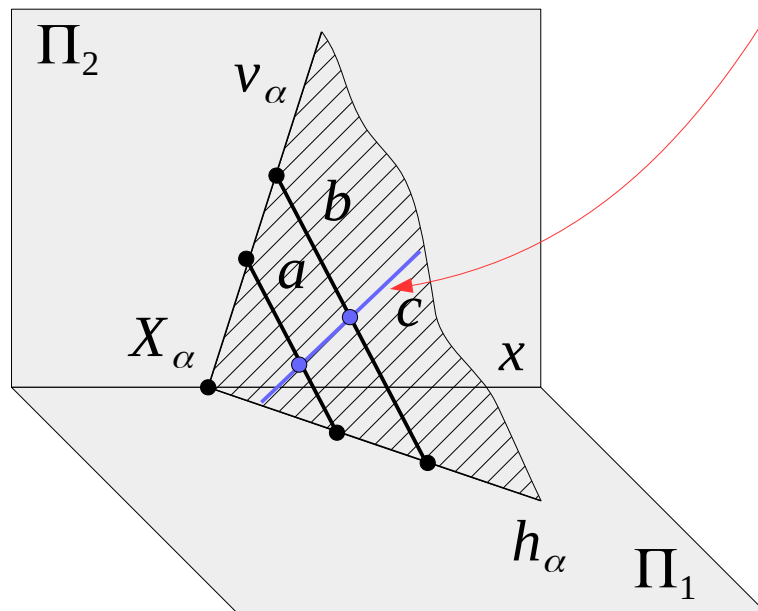
$$H_a \in h_\alpha \quad \text{oraz} \quad V_a \in v_\alpha$$

Elementy przynależne

Elementy przynależne:

- punkt na prostej
- prosta na płaszczyźnie
- punkt na płaszczyźnie

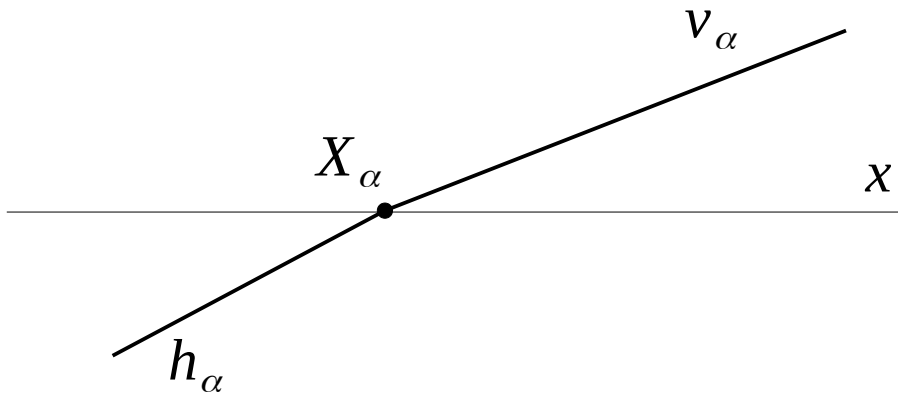
Prosta c (na rysunkach) przynależy do płaszczyzny, gdyż posiada z nią dwa punkty wspólne.



Elementy przynależne

Narysować rzuty dowolnej prostej a ,
przynależnej do płaszczyzny α .

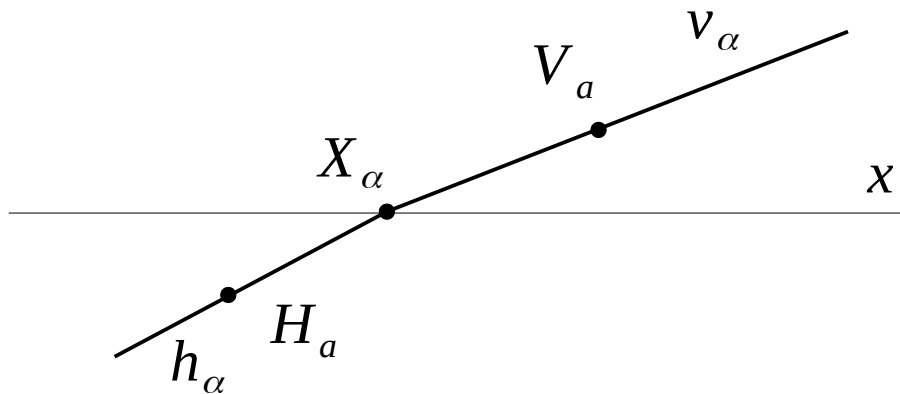
$$\alpha(h_\alpha, v_\alpha)$$



Elementy przynależne

Narysować rzuty dowolnej prostej a , przynależnej do płaszczyzny α .

$$\alpha(h_\alpha, v_\alpha)$$



- W dowolnym miejscu na śladzie poziomym płaszczyzny zaznaczamy ślad poziomy prostej.
- Analogicznie rysujemy ślad pionowy prostej – ważne, aby ślady te nie leżały na jednej odnoszącej.

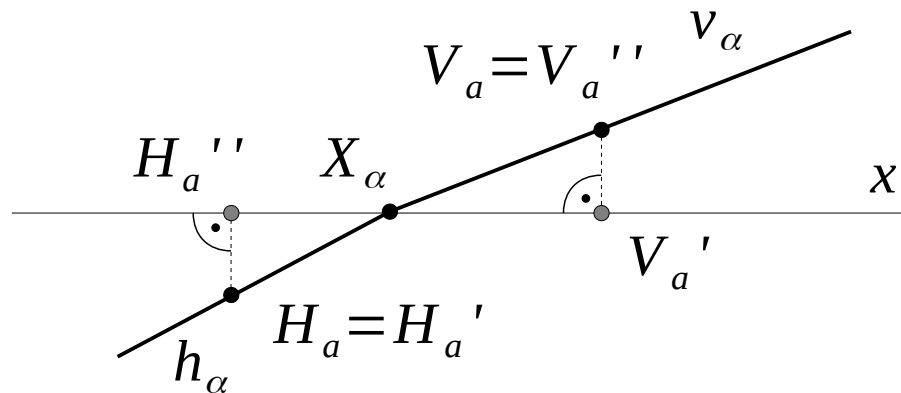
UWAGA: teraz zadanie redukuje się postaci:
znaleźć rzuty prostej mając jej ślady (wykład 1).

Gdyby ślady leżały na jednej odnoszącej,
to uzyskalibyśmy prostą szczególną: prostopadłą do osi x .
Taka prosta nie jest wygodna do stosowania w przestrzeni 2D.

Elementy przynależne

Narysować rzuty dowolnej prostej a , przynależnej do płaszczyzny α .

$$\alpha(h_\alpha, v_\alpha)$$



- W dowolnym miejscu na śladzie poziomym płaszczyzny zaznaczamy ślad poziomy prostej.
- Analogicznie rysujemy ślad pionowy prostej – ważne, aby ślady te nie leżały na jednej odnoszącej.

UWAGA: teraz zadanie redukuje się postaci: znaleźć rzuty prostej mając jej ślady (wykład 1).

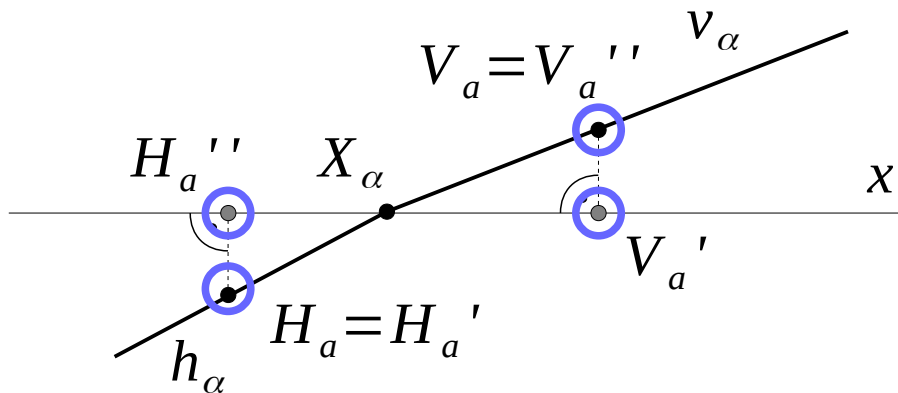
- Wyznaczamy rzuty śladów obu prostych.

UWAGA: teraz zadanie redukuje się do postaci: narysować rzuty prostej mając rzuty dwóch należących do niej punktów (wykład 1).

Elementy przynależne

Narysować rzuty dowolnej prostej a , przynależnej do płaszczyzny α .

$$\alpha(h_\alpha, v_\alpha)$$



- W dowolnym miejscu na śladzie poziomym płaszczyzny zaznaczamy ślad poziomy prostej.
- Analogicznie rysujemy ślad pionowy prostej – ważne, aby ślady te nie leżały na jednej odnoszącej.

UWAGA: teraz zadanie redukuje się postaci: znaleźć rzuty prostej mając jej ślady (wykład 1).

- Wyznaczamy rzuty śladów obu prostych.

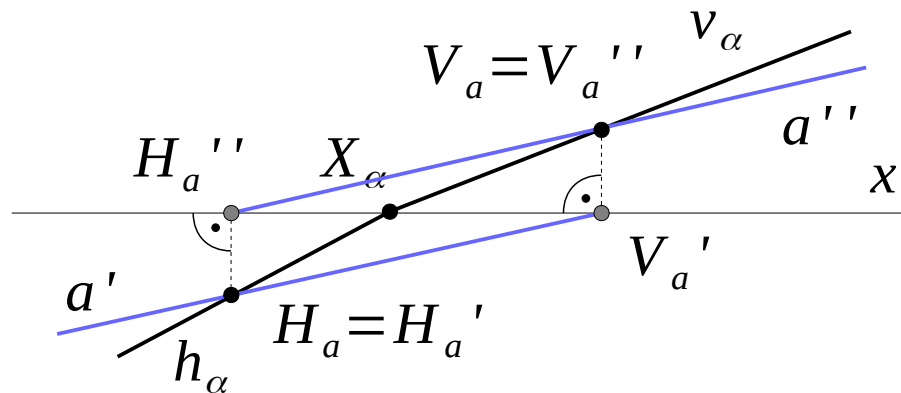
UWAGA: teraz zadanie redukuje się do postaci: narysować rzuty prostej mając rzuty dwóch należących do niej punktów (wykład 1).

Warto się skupić i zastanowić, które elementy są na tym etapie najważniejsze.

Elementy przynależne

Narysować rzuty dowolnej prostej a , przynależnej do płaszczyzny α .

$$\alpha(h_\alpha, v_\alpha)$$



- W dowolnym miejscu na śladzie poziomym płaszczyzny zaznaczamy ślad poziomym prostej.
- Analogicznie rysujemy ślad pionowy prostej – ważne, aby ślady te nie leżały na jednej odnoszącej.

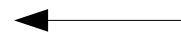
UWAGA: teraz zadanie redukuje się postaci: znaleźć rzuty prostej mając jej ślady (wykład 1).

- Wyznaczamy rzuty śladów obu prostych.

UWAGA: teraz zadanie redukuje się do postaci: narysować rzuty prostej mając rzuty dwóch należących do niej punktów (wykład 1).

- Łączymy rzuty poziome śladów.
- Łączymy rzuty pionowe śladów.

$$H_a \in h_\alpha \quad \text{oraz} \quad V_a \in v_\alpha$$

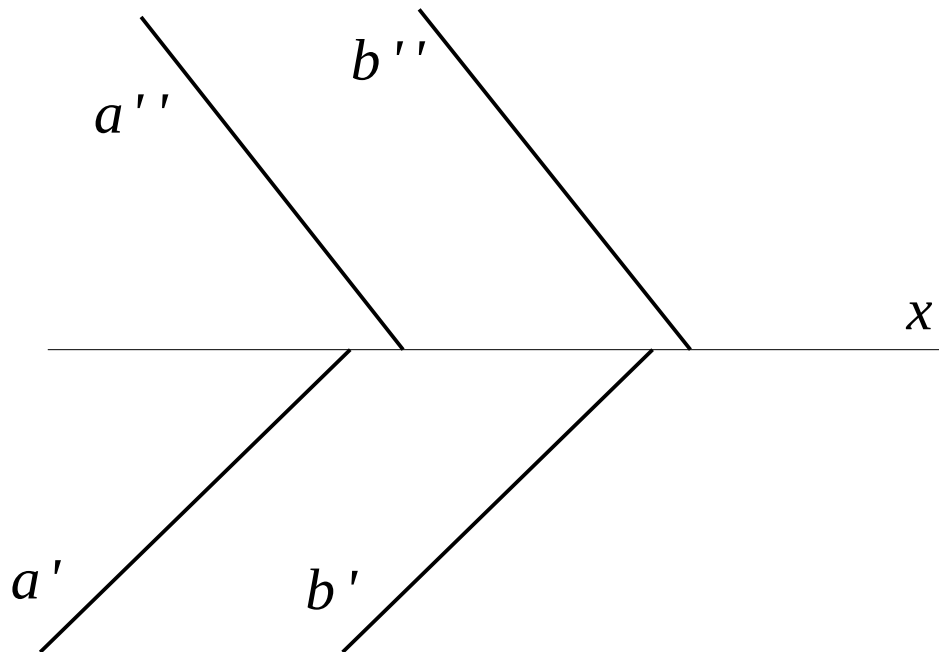


Czy warunek jest spełniony?

Elementy przynależne

Narysować rzuty dowolnej prostej c ,
przynależnej do płaszczyzny α .

$\alpha(a \parallel b)$

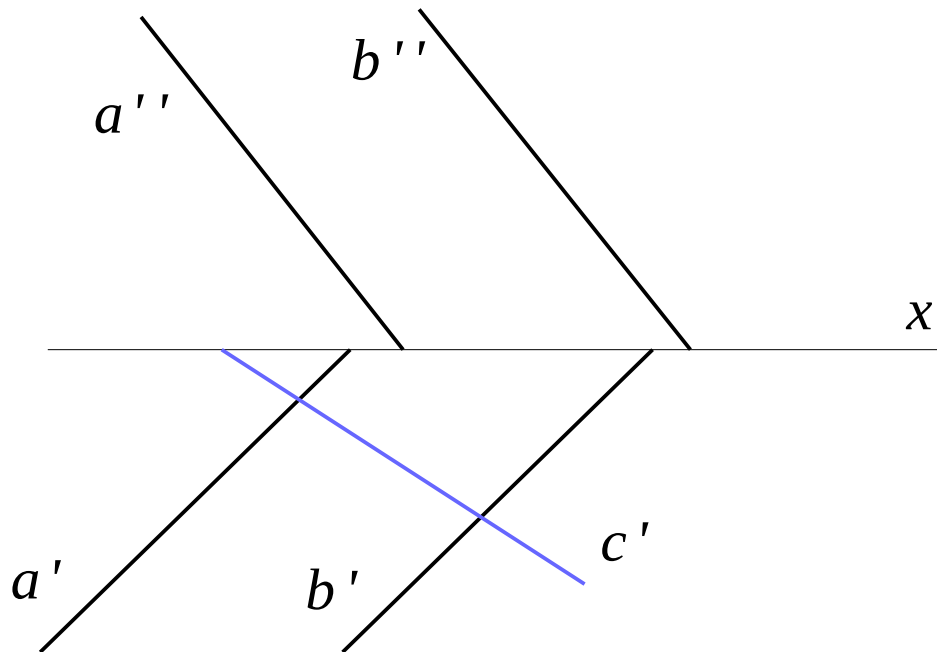


Elementy przynależne

Narysować rzuty dowolnej prostej c , przynależnej do płaszczyzny α .

$\alpha(a \parallel b)$

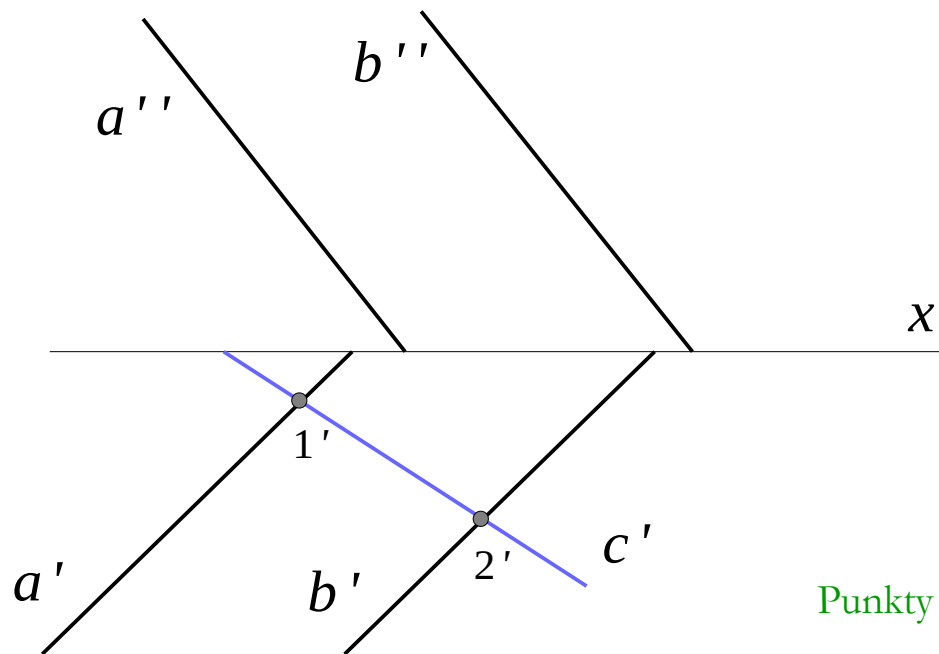
- W dowolnym miejscu rysujemy rzut poziomy lub rzut pionowy prostej c , w taki sposób aby przeciął się z odpowiednimi rzutami prostych a i b .



Elementy przynależne

Narysować rzuty dowolnej prostej c , przynależnej do płaszczyzny α .

$\alpha (a \parallel b)$



- W dowolnym miejscu rysujemy rzut poziomy lub rzut pionowy prostej c , w taki sposób aby przeciął się z odpowiednimi rzutami prostych a i b .
- Zaznaczamy miejsca przecięć i oznaczamy je symbolami pomocniczymi: 1 i 2.

UWAGA: teraz zadanie redukuje się do postaci: znaleźć drugi rzut punktu, wiedząc że należy on do danej prostej (wykład 1).

$1 \in c$
 $2 \in c$

oraz, co teraz ważniejsze:

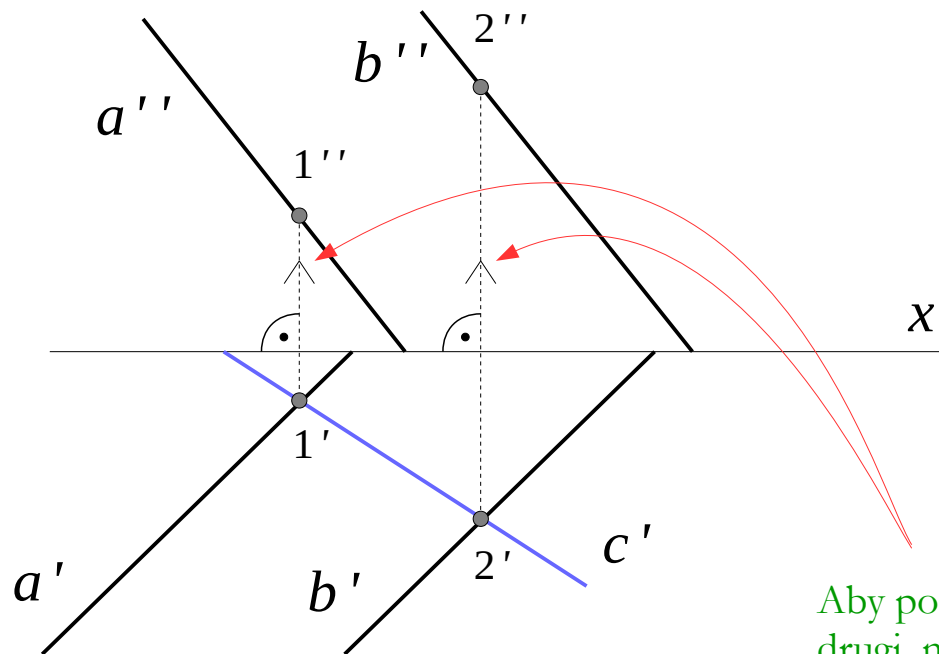
$1 \in a$
 $2 \in b$

Punkty pomocnicze oznacza się często cyframi.

Elementy przynależne

Narysować rzuty dowolnej prostej c , przynależnej do płaszczyzny α .

$\alpha (a \parallel b)$



- W dowolnym miejscu rysujemy rzut poziomy lub rzut pionowy prostej c , w taki sposób aby przeciął się z odpowiednimi rzutami prostych a i b .
- Zaznaczamy miejsca przecięć i oznaczamy je symbolami pomocniczymi: 1 i 2.

UWAGA: teraz zadanie redukuje się do postaci: znaleźć drugi rzut punktu, wiedząc że należy on do danej prostej (wykład 1).

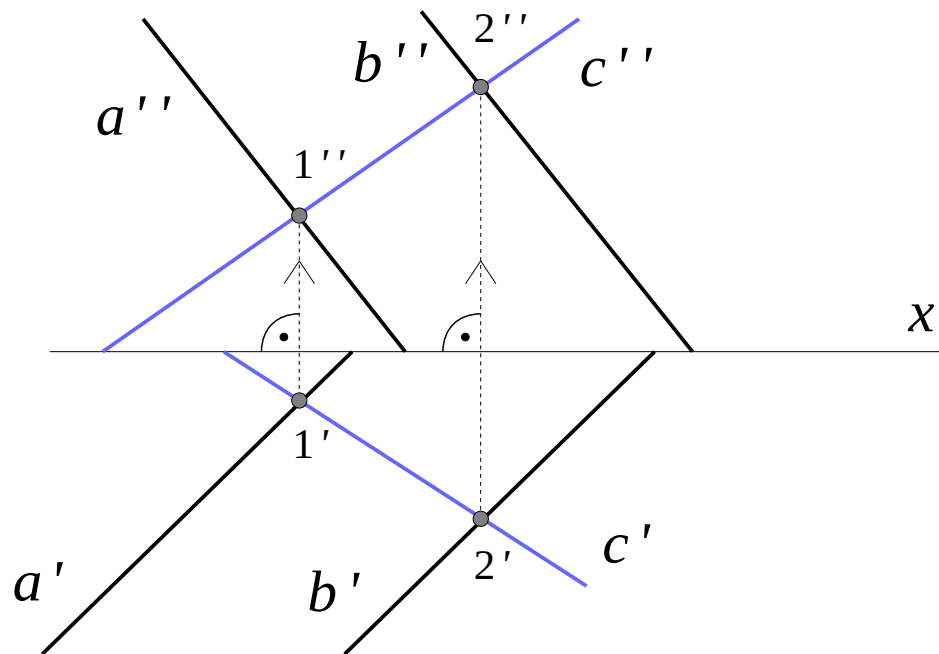
- Rysujemy odnoszące i szukamy miejsc, w których przetną się one z drugimi rzutami prostych.

Aby podkreślić, który element był pierwszy, a który drugi, na odnoszących warto narysować delikatne strzałki wskazujące kierunek działań.

Elementy przynależne

Narysować rzuty dowolnej prostej c , przynależnej do płaszczyzny α .

$\alpha (a \parallel b)$



- W dowolnym miejscu rysujemy rzut poziomy lub rzut pionowy prostej c , w taki sposób aby przeciął się z odpowiednimi rzutami prostych a i b .
- Zaznaczamy miejsca przecięć i oznaczamy je symbolami pomocniczymi: 1 i 2.

UWAGA: teraz zadanie redukuje się do postaci: znaleźć drugi rzut punktu, wiedząc że należy on do danej prostej (wykład 1).

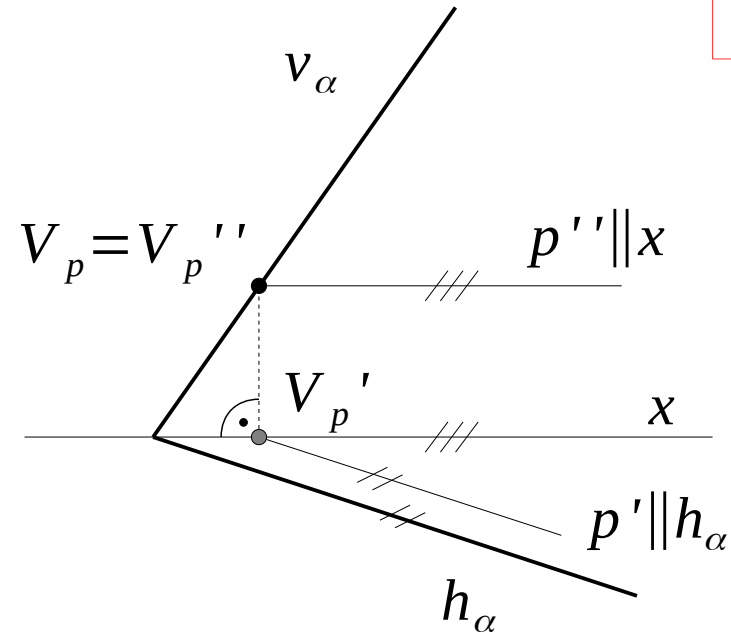
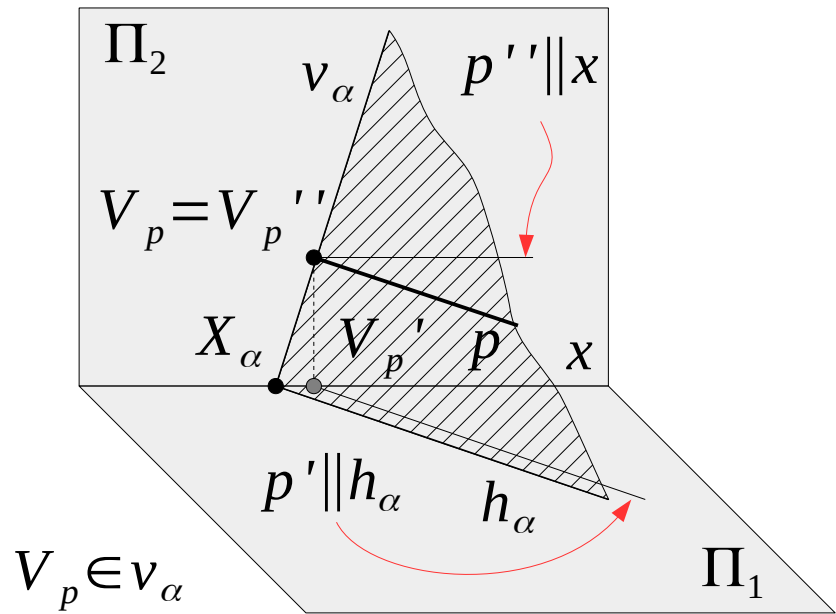
- Rysujemy odnoszące i szukamy miejsc, w których przetną się one z drugimi rzutami prostych.
- Łączymy drugie rzuty punktów pomocniczych – uzyskujemy drugi rzut prostej c .

Elementy przynależne

Prosta pozioma na płaszczyźnie.

$$p'' \parallel x$$

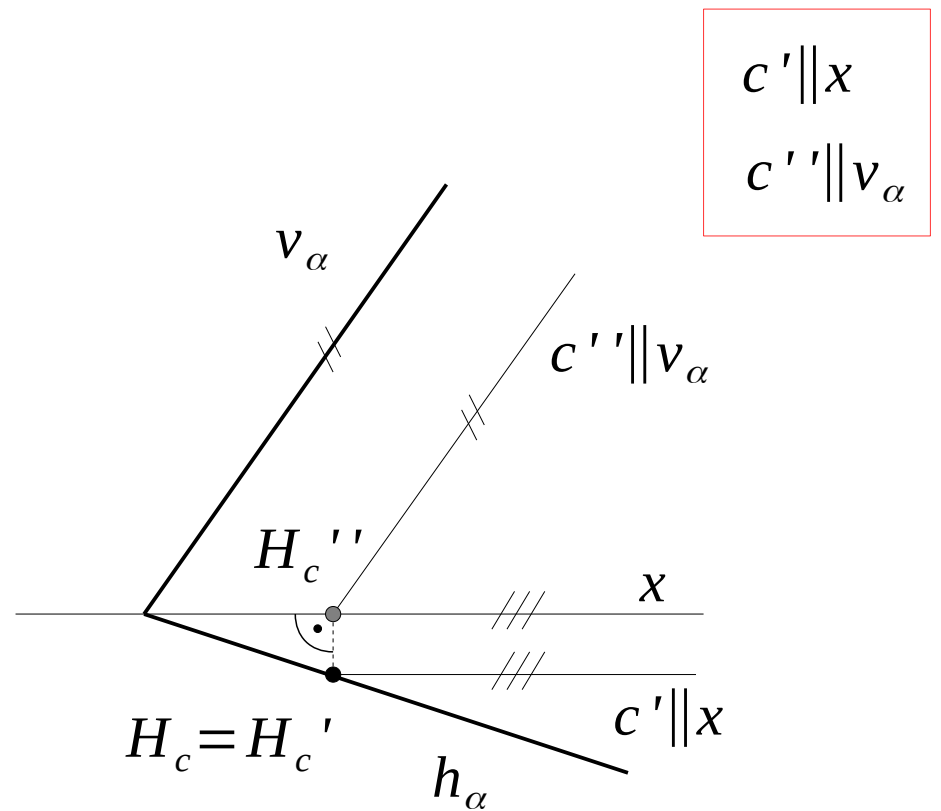
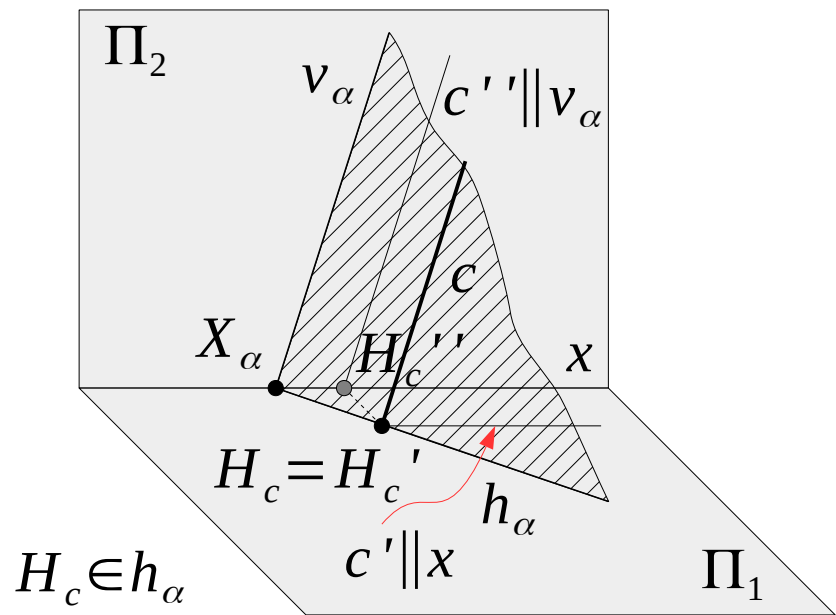
$$p' \parallel h_\alpha$$



Prosta pozioma ma jeden ślad – jak zatem narysować drugi (poziomy) rzut prostej?

Elementy przynależne

Prosta czołowa na płaszczyźnie.



$c'' \parallel X$
 $c''' \parallel v_\alpha$

Prosta czołowa ma jeden ślad – jak zatem narysować drugi (pionowy) rzut prostej?

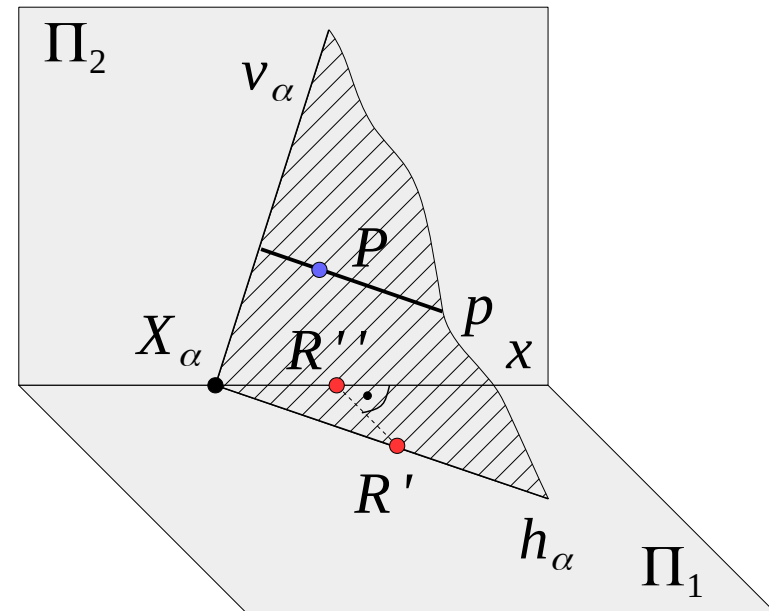
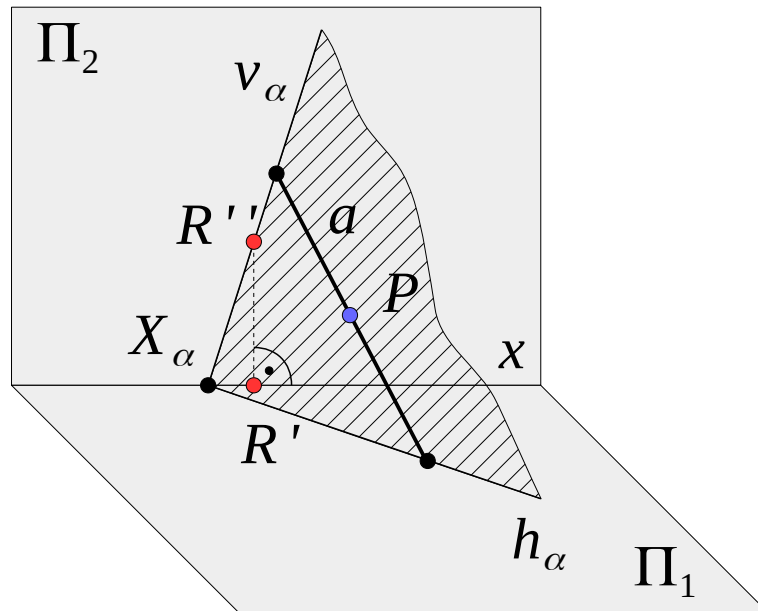
Elementy przynależne

Elementy przynależne:

- punkt na prostej
- prosta na płaszczyźnie
- punkt na płaszczyźnie

Punkt leży na płaszczyźnie gdy leży na prostej przynależnej do płaszczyzny (jak punkt P).

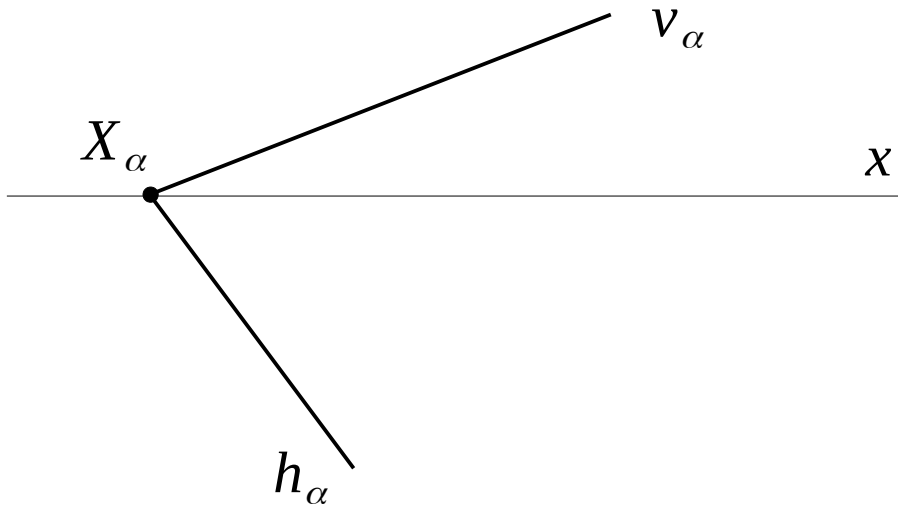
Czasami punkt można narysować bez wprowadzania dodatkowej prostej, o ile leży on na którejś z rzutni (jak punkt R).



Elementy przynależne

Narysować rzuty dowolnego punktu P, przynależnego do płaszczyzny α .

$$\alpha(h_\alpha, v_\alpha)$$

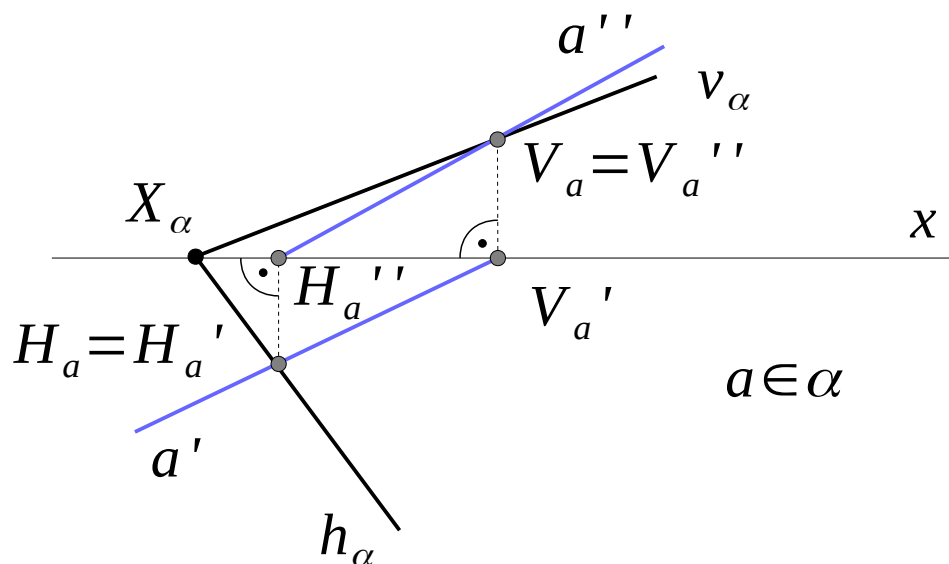


Elementy przynależne

Narysować rzuty dowolnego punktu P, przynależnego do płaszczyzny α .

$$\alpha(h_\alpha, v_\alpha)$$

- Wyznaczamy rzuty jakiejs prostej dowolnej (o dowolnej nazwie), przynależnej do płaszczyzny.



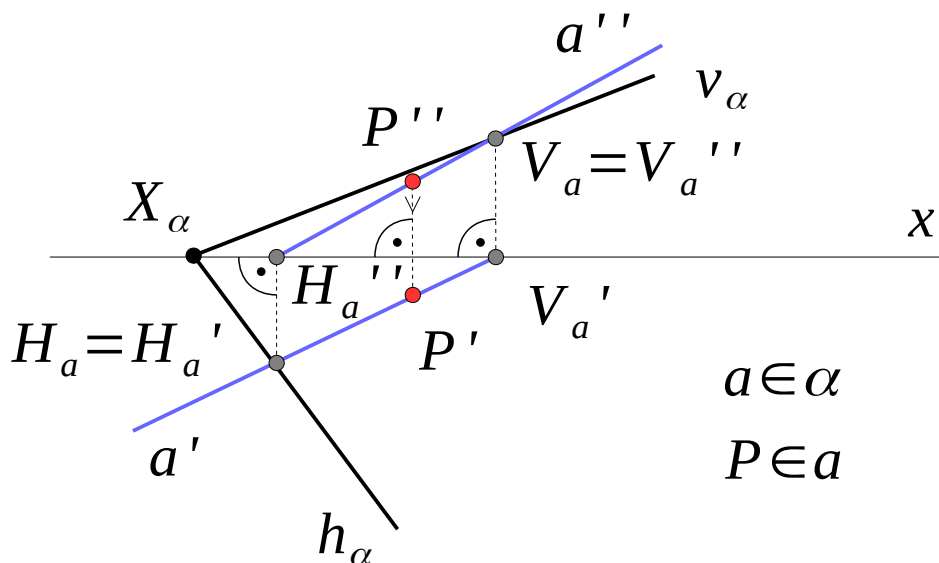
Elementy przynależne

Narysować rzuty dowolnego punktu P , przynależnego do płaszczyzny α .

$$\alpha(h_\alpha, v_\alpha)$$

- Wyznaczamy rzuty jakiejs prostej dowolnej (o dowolnej nazwie), przynależnej do płaszczyzny.
- Rysujemy dowolny punkt przynależny do tej prostej.

Punkt przynależy do prostej, ponieważ:



$$\begin{aligned} P' \in a' \\ P''' \in a'' \end{aligned}$$

punkt leży
na prostej,

$$\begin{aligned} H_a \in h_\alpha \\ V_a \in v_\alpha \end{aligned}$$

a prosta leży na
płaszczyźnie.

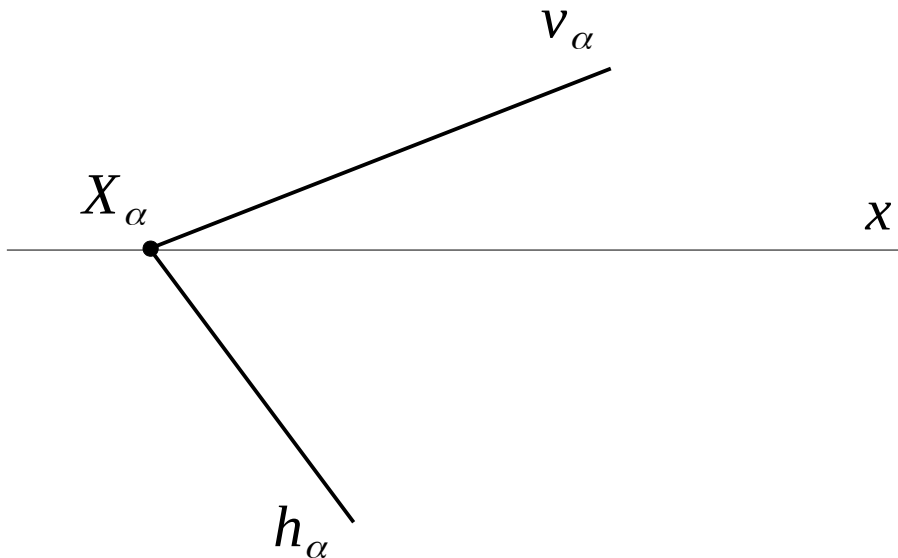
Tu zaznaczono jeszcze kolejność działań przy wyznaczaniu rzutów punktu.

Elementy przynależne

Narysować rzuty dowolnego punktu P, przynależnego do płaszczyzny α .

$$\alpha(h_\alpha, v_\alpha)$$

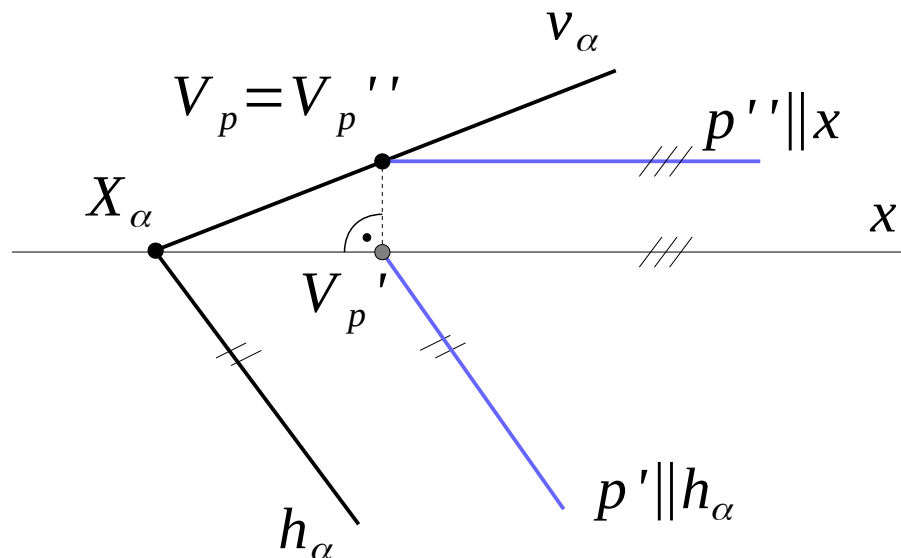
Zadanie można rozwiązać mniejszym „kosztem” rysunkowym stosując proste szczególne.



Elementy przynależne

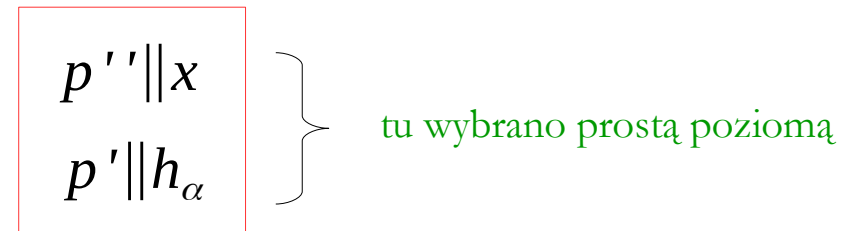
Narysować rzuty dowolnego punktu P, przynależnego do płaszczyzny α .

$$\alpha(h_\alpha, v_\alpha)$$



Zadanie można rozwiązać mniejszym „kosztem” rysunkowym stosując proste szczególne.

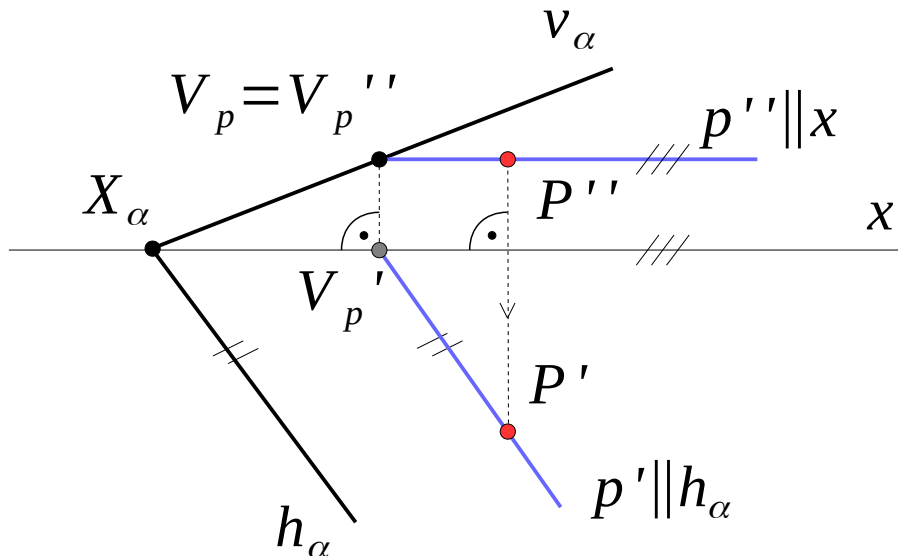
- Wyznaczamy rzuty dowolnej prostej poziomej lub czołowej przynależnej do płaszczyzny.



Elementy przynależne

Narysować rzuty dowolnego punktu P, przynależnego do płaszczyzny α .

$$\alpha(h_\alpha, v_\alpha)$$



Zadanie można rozwiązać mniejszym „kosztem” rysunkowym stosując proste szczególne.

- Wyznaczamy rzuty dowolnej prostej poziomej lub czołowej przynależnej do płaszczyzny

$$\left. \begin{array}{l} p'' \parallel x \\ p' \parallel h_\alpha \end{array} \right\} \text{tu wybrano prostą poziomą}$$

- Na prostej szczególnej obieramy jakiś punkt.

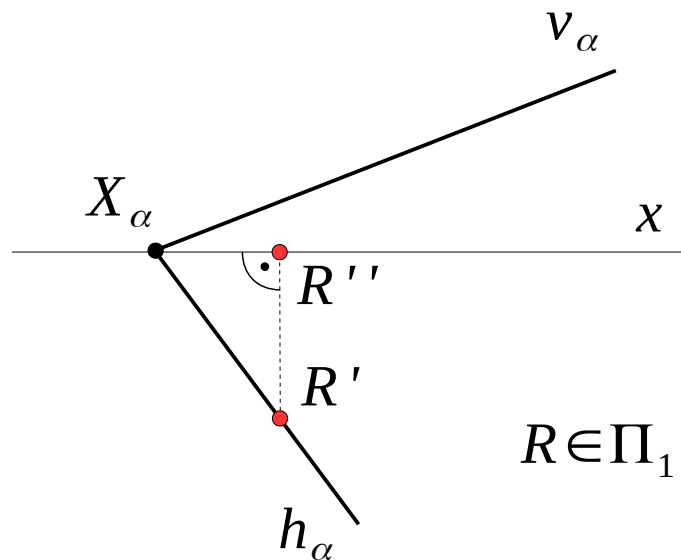
Punkt przynależy do płaszczyzny, gdyż przynależy do leżącej na niej prostej.

Elementy przynależne

Narysować rzuty dowolnego punktu P , przynależnego do płaszczyzny α .

$$\alpha(h_\alpha, v_\alpha)$$

Rzuty punktu można narysować bezpośrednio (bez wprowadzania dodatkowej prostej), ale jest to możliwe wyłącznie w stosunku do punktów leżących na rzutniach.

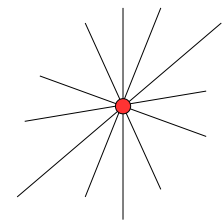
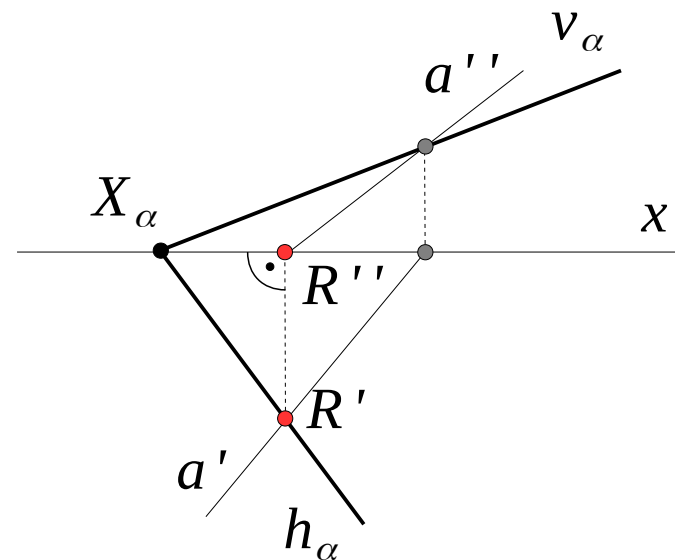
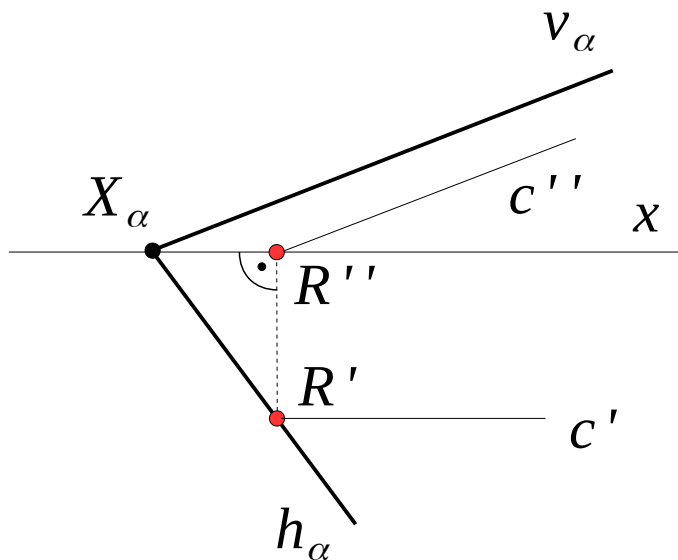


Elementy przynależne

Narysować rzuty dowolnego punktu P, przynależnego do płaszczyzny α .

$$\alpha(h_\alpha, v_\alpha)$$

Oczywiście definicja ogólna też się tu sprawdza, gdyż można narysować nieskończenie wiele prostych leżących na tej płaszczyźnie i przechodzących przez punkt R.



Zwróćmy uwagę, że w tym przypadku punkt R jest zawsze śladem jakiejś prostej – a właściwie całego pęku prostych (pojęcie pęku odnosi się również do płaszczyzn).

Elementy wspólne

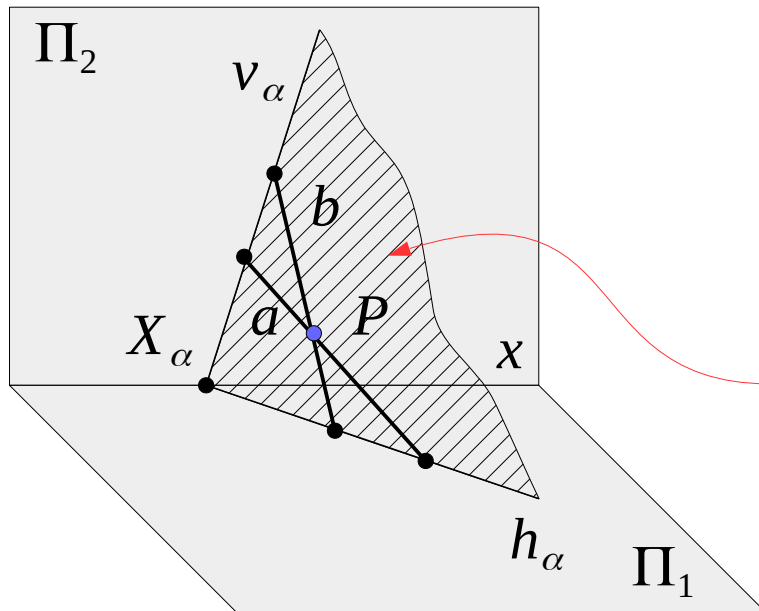
Elementy wspólne:

- punkt wspólny dwóch prostych
- krawędź dwóch płaszczyzn
- punkt przebicia płaszczyzny prostą

Patrz temat:

- położenie prostych w przestrzeni
– proste przecinające się.

Punkt wspólny najczęściej oznacza się literą P.



$$\begin{array}{l} P' \in a' \quad \text{oraz} \quad P' \in b' \\ P'' \in a'' \quad \quad \quad P'' \in b'' \end{array}$$

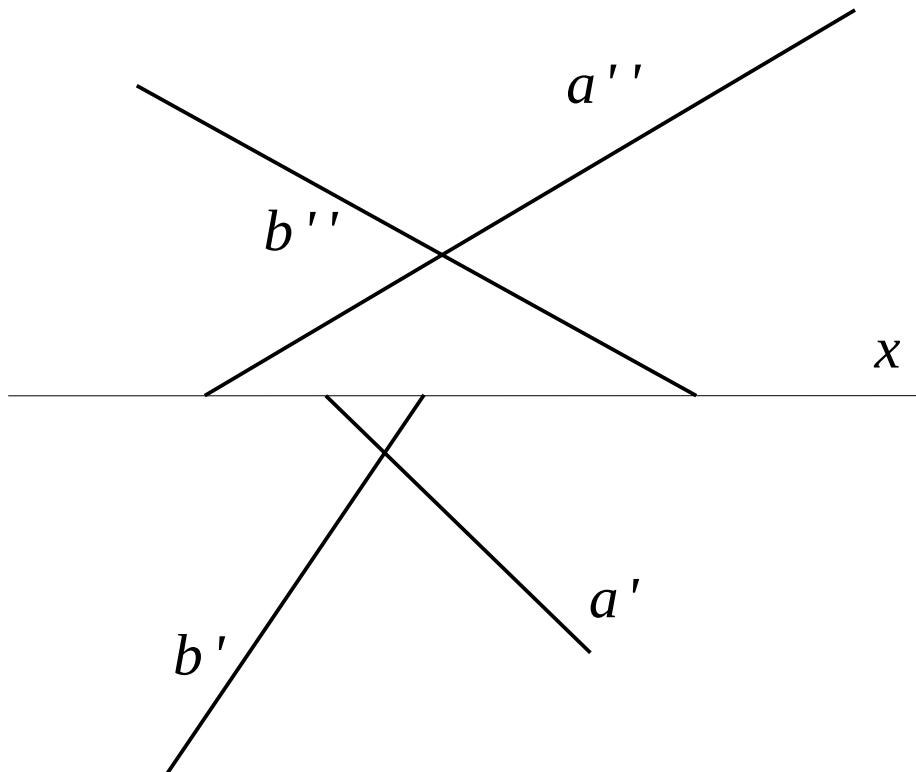
Jeżeli dwie proste się przecinają, to leżą na tej samej płaszczyźnie.

albo:

Jeżeli dwie proste leżą na tej samej płaszczyźnie i nie są do siebie równoległe, to posiadają punkt wspólny.

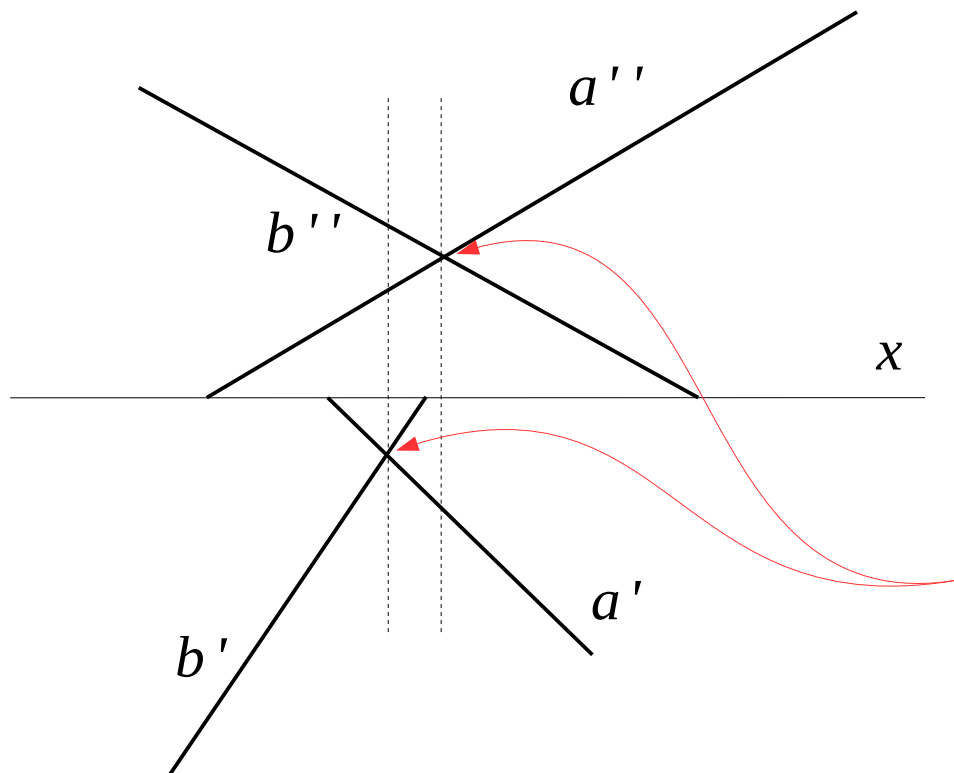
Elementy wspólne

Sprawdzić, czy proste a i b posiadają punkt wspólny.



Elementy wspólne

Sprawdzić, czy proste a i b posiadają punkt wspólny.



Proste nie mają punktu wspólnego, bo nie da się narysować punktu spełniającego warunku podwójnej przynależności.

$$\begin{array}{l} P' \in a' \quad \text{oraz} \quad P' \in b' \\ P'' \in a'' \quad \text{oraz} \quad P'' \in b'' \end{array}$$

Aby proste miały punkt wspólny, to oba miejsca przecięć odpowiednich rzutów musiałyby leżeć na jednej odnoszącej.

Elementy wspólne

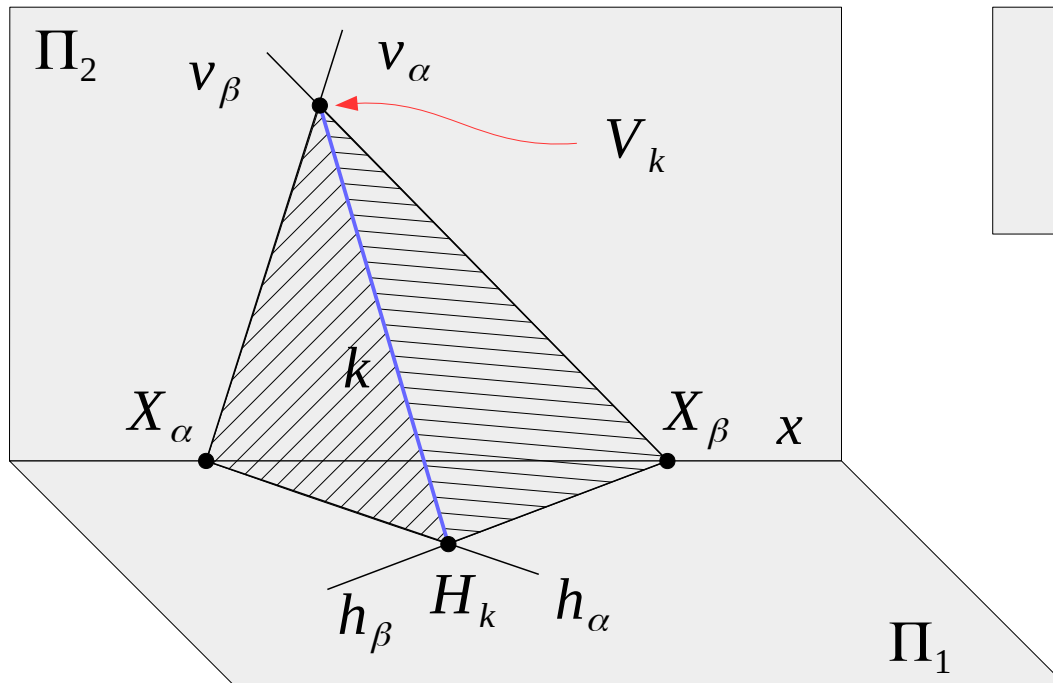
Elementy wspólne:

- punkt wspólny prostych
- krawędź płaszczyzn
- punkt przebicia płaszczyzny prostą

Patrz temat:

- elementy przynależne – prosta na płaszczyźnie.

Krawędź najczęściej oznacza się literą k .



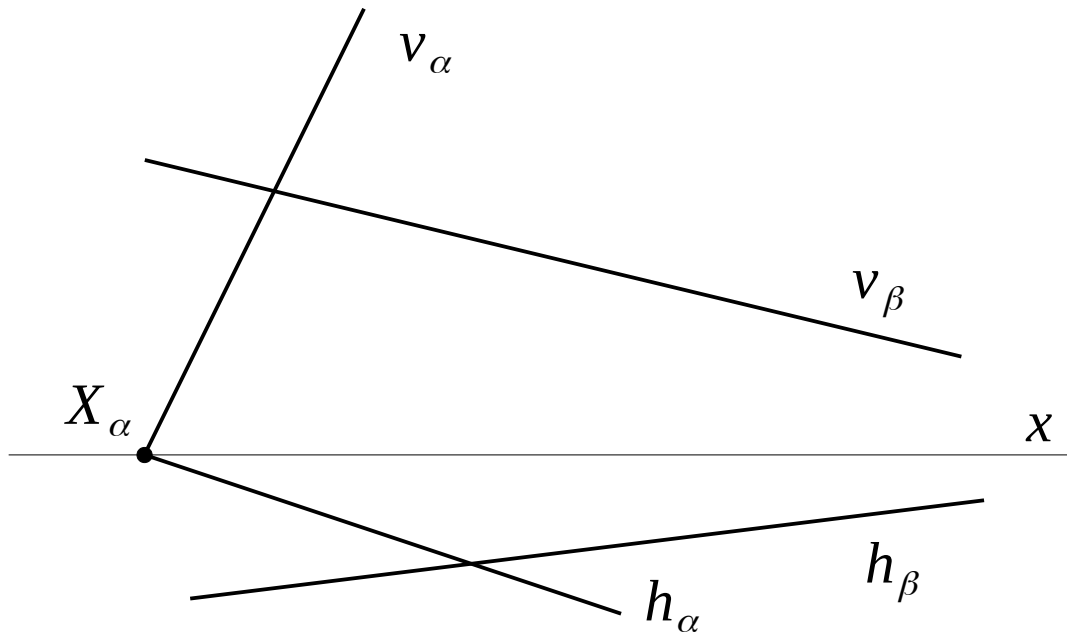
$$\begin{array}{l} H_k \in h_\alpha \\ H_k \in h_\beta \end{array} \quad \text{oraz} \quad \begin{array}{l} V_k \in v_\alpha \\ H_k \in h_\beta \end{array}$$

UWAGA: istnieją wyjątki
– może się zdarzyć krawędź, która nie
ma jednego lub nawet obu śladów.

Elementy wspólne

Wyznaczyć krawędź płaszczyzn określonych śladami.

$$\alpha(h_\alpha, v_\alpha) \quad \beta(h_\beta, v_\beta)$$



Elementy wspólne

Wyznaczyć krawędź płaszczyzn określonych śladami.

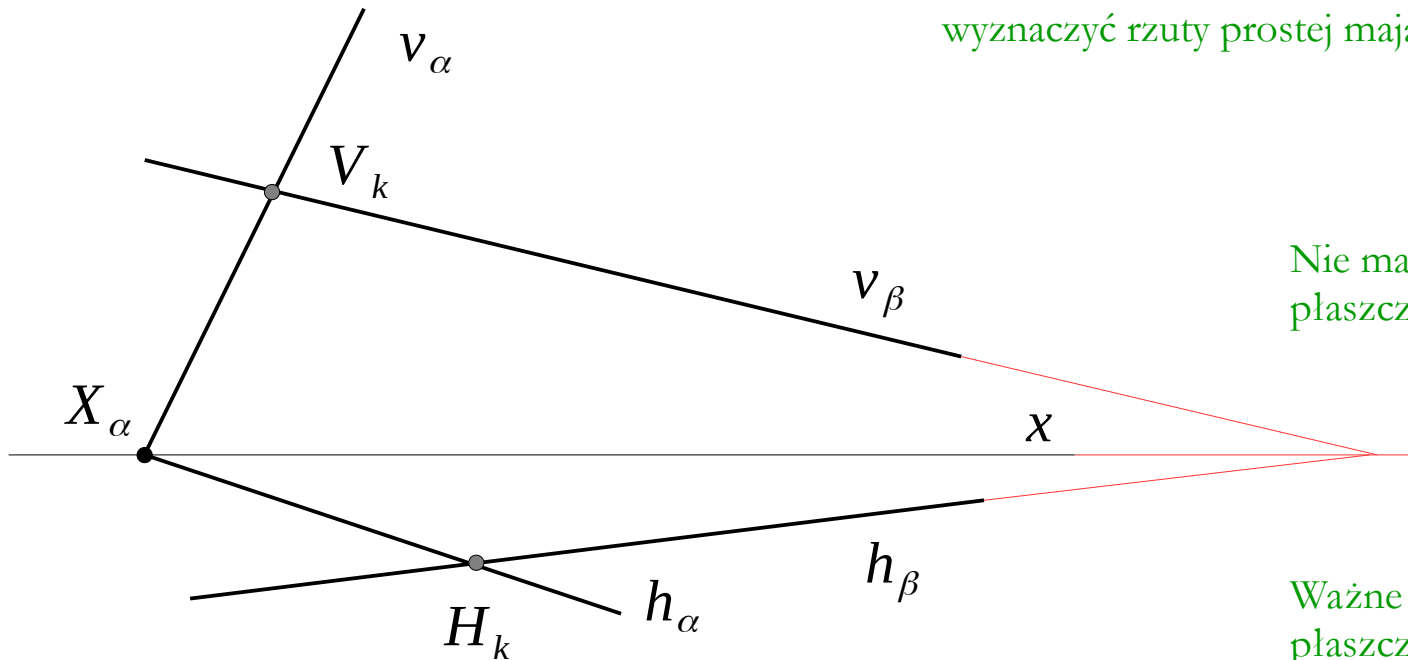
$$\alpha(h_\alpha, v_\alpha) \quad \beta(h_\beta, v_\beta)$$

- Szukamy punktu przecięcia się śladów poziomych obu płaszczyzn – jest to ślad poziomy krawędzi.
- Szukamy punktu przecięcia się śladów pionowych obu płaszczyzn – jest to ślad pionowy krawędzi.

UWAGA: teraz zadanie redukuje się postaci:
wyznaczyć rzuty prostej mając jej ślady (wykład 1).

Nie ma znaczenia, czy węzły płaszczyzn są dostępne, czy też nie.

Ważne jedynie, aby ślady płaszczyzn leżały „sensownie”.



Elementy wspólne

Wyznaczyć krawędź płaszczyzn określonych śladami.

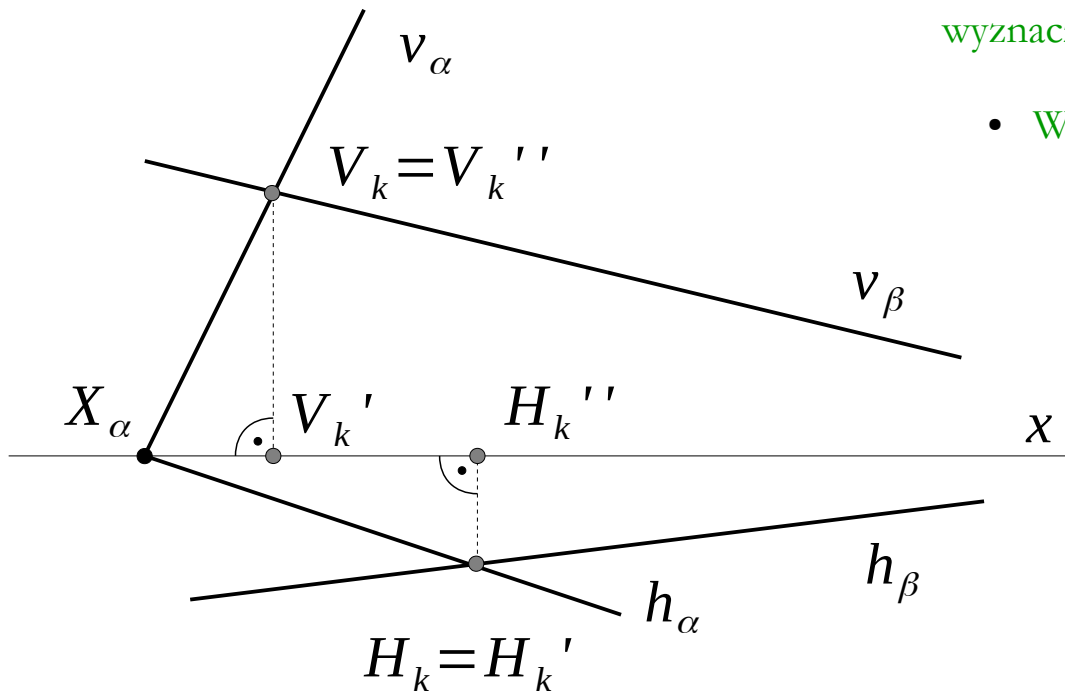
$$\alpha(h_\alpha, v_\alpha) \quad \beta(h_\beta, v_\beta)$$

- Szukamy punktu przecięcia się śladów poziomych obu płaszczyzn – jest to ślad poziomy krawędzi.
- Szukamy punktu przecięcia się śladów pionowych obu płaszczyzn – jest to ślad pionowy krawędzi.

UWAGA: teraz zadanie redukuje się postaci:
wyznaczyć rzuty prostej mając jej ślady (wykład 1).

- Wyznaczamy rzuty obu śladów krawędzi.

UWAGA: teraz zadanie redukuje się postaci:
wyznaczyć rzuty prostej mając rzuty dwóch należących do niej punktów (wykład 1).



Elementy wspólne

Wyznaczyć krawędź płaszczyzn określonych śladami.

$$\alpha(h_\alpha, v_\alpha) \quad \beta(h_\beta, v_\beta)$$

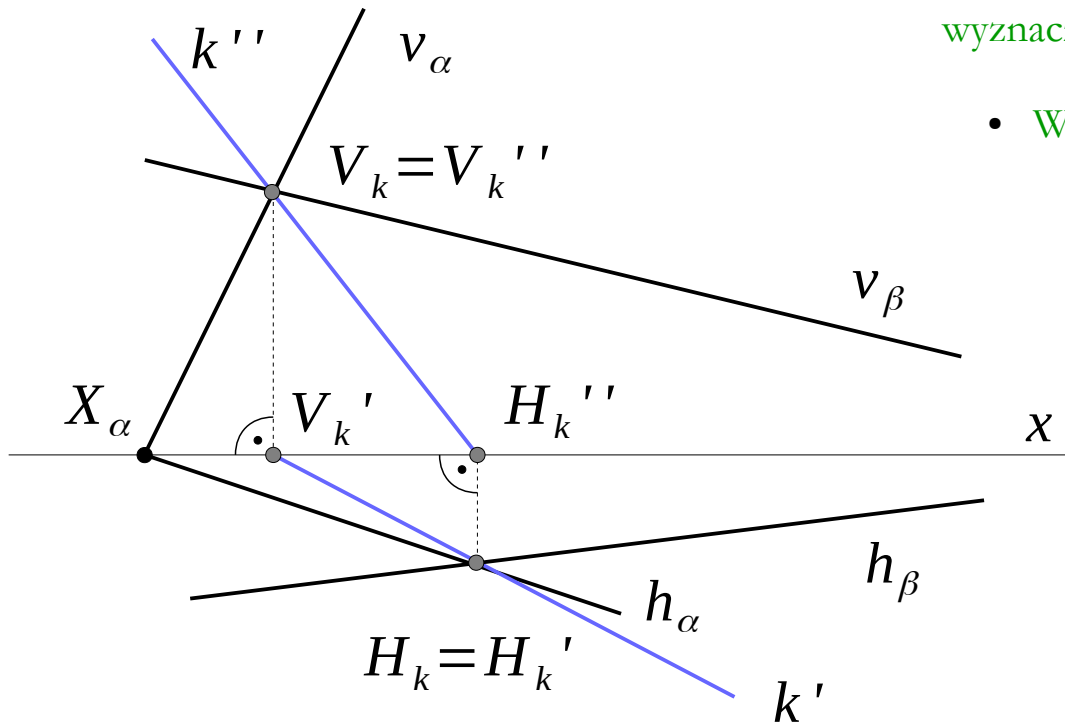
- Szukamy punktu przecięcia się śladów poziomych obu płaszczyzn – jest to ślad poziomy krawędzi.
- Szukamy punktu przecięcia się śladów pionowych obu płaszczyzn – jest to ślad pionowy krawędzi.

UWAGA: teraz zadanie redukuje się postaci: wyznaczyć rzuty prostej mając jej ślady (wykład 1).

- Wyznaczamy rzuty obu śladów krawędzi.

UWAGA: teraz zadanie redukuje się postaci: wyznaczyć rzuty prostej mając rzuty dwóch należących do niej punktów (wykład 1).

- Łączymy ze sobą odpowiednie rzuty śladów krawędzi i uzyskujemy rzuty krawędzi.



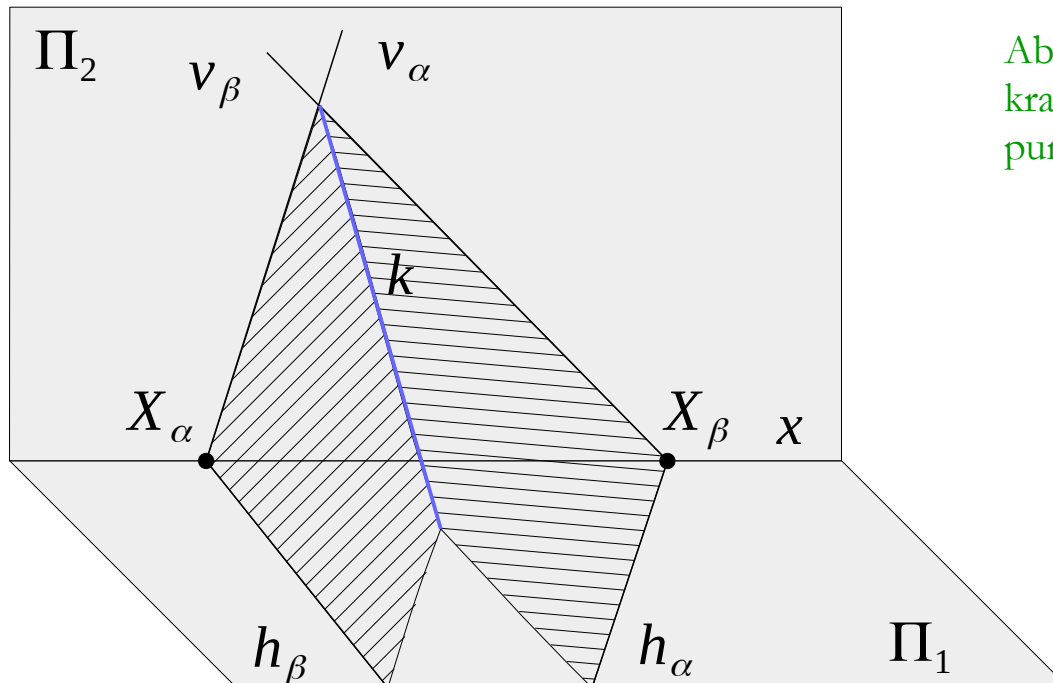
Elementy wspólne

Sytuacja kłopotliwa nr 1 – nie można znaleźć punktu styku odpowiednich śladów płaszczyzn.

$$\alpha(h_\alpha, v_\alpha) \quad \beta(h_\beta, v_\beta)$$

Dzieje się tak gdy ślady poziome albo ślady pionowe płaszczyzn przecinają się gdzieś za dostępną płaszczyzną rysunkową (kartką) lub są do siebie równoległe.

Aby wyznaczyć jakąś prostą – w tym również krawędź płaszczyzn – potrzebne są dwa punkty: poprzednio były to H_k i V_k .



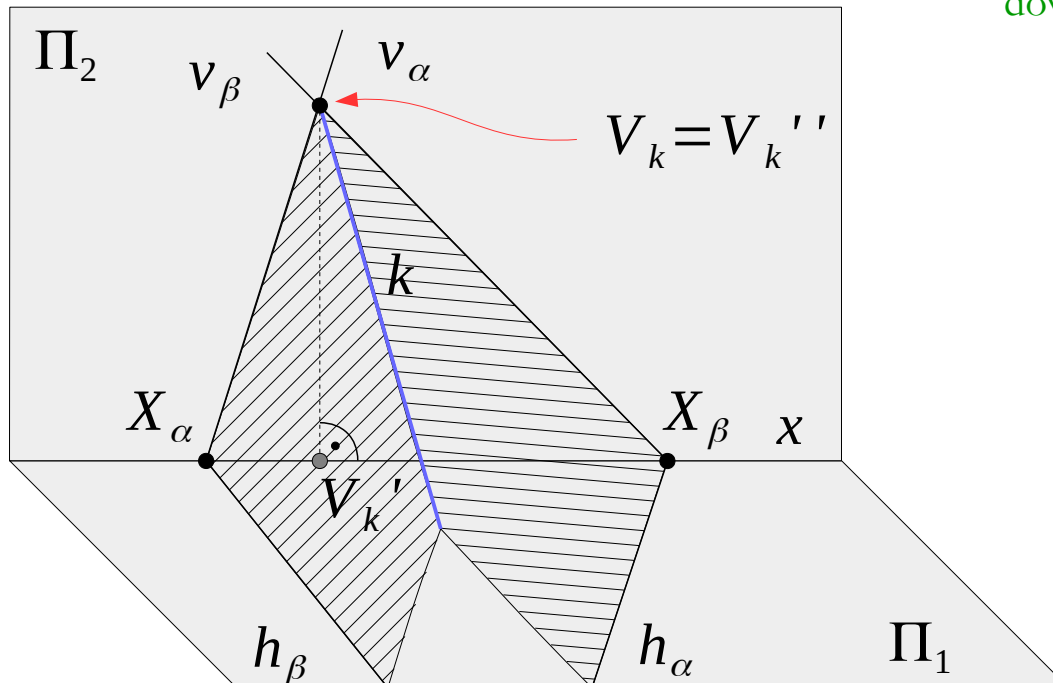
Elementy wspólne

Sytuacja kłopotliwa nr 1 – nie można znaleźć punktu styku odpowiednich śladów płaszczyzn.

$\alpha(h_\alpha, v_\alpha)$ $\beta(h_\beta, v_\beta)$

Jeżeli da się wyznaczyć któryś ślad krawędzi, to postępujemy z nim tak jak poprzednio.

Teraz trzeba jakoś wyznaczyć rzuty innego, dowolnego punktu należącego do krawędzi.

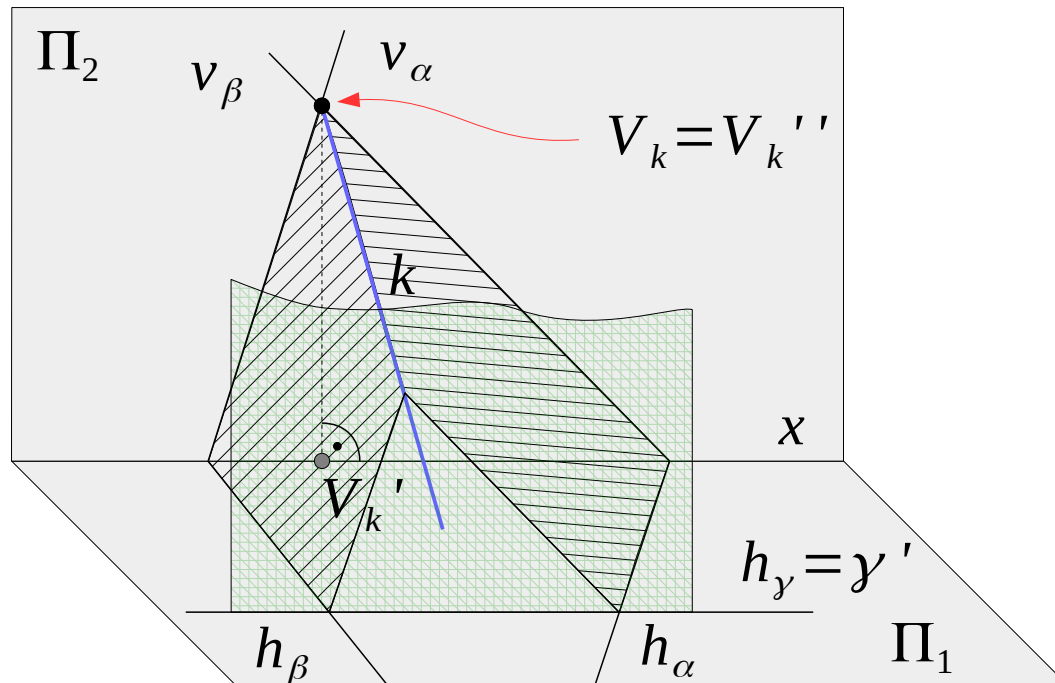


Elementy wspólne

Sytuacja kłopotliwa nr 1 – nie można znaleźć punktu styku odpowiednich śladów płaszczyzn.

$$\alpha(h_\alpha, v_\alpha) \quad \beta(h_\beta, v_\beta)$$

Rozwiązanie polega na wprowadzeniu w dowolnym miejscu płaszczyzny szczególnej: poziomej lub czołowej, zależnie od sytuacji – tu musi to być płaszczyzna czołowa.

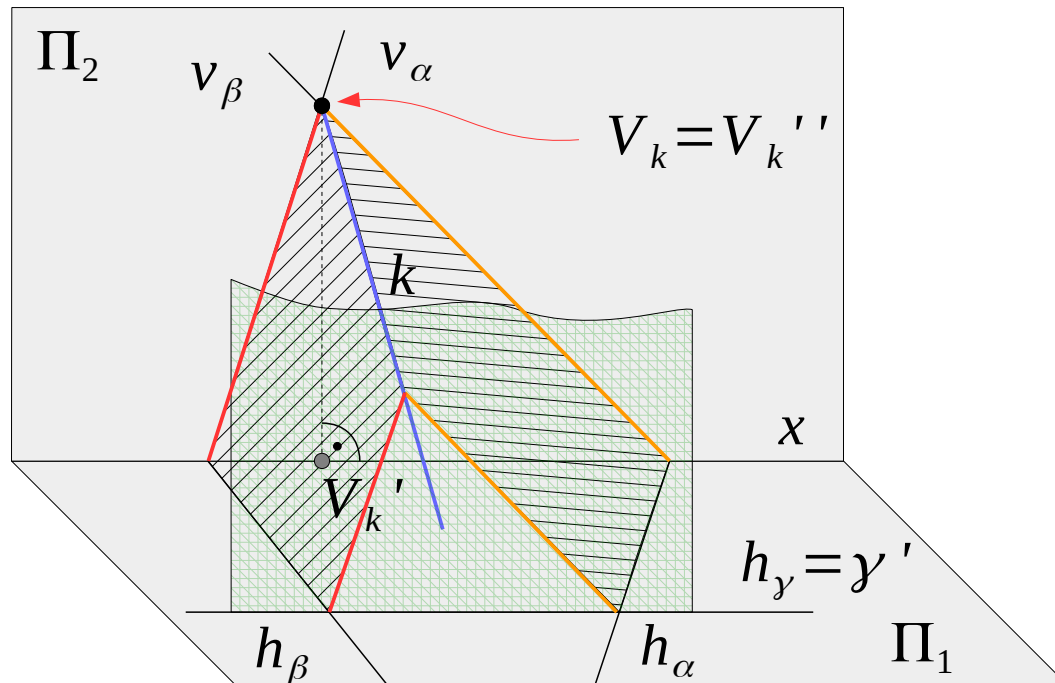


Elementy wspólne

Sytuacja kłopotliwa nr 1 – nie można znaleźć punktu styku odpowiednich śladów płaszczyzn.

$$\alpha(h_\alpha, v_\alpha) \quad \beta(h_\beta, v_\beta)$$

Zwróćmy uwagę, że jak tnjemy jakiś regularny profil (np. klin) płaszczyznami równoległymi, to krawędzie cięcia również są do siebie równoległe.

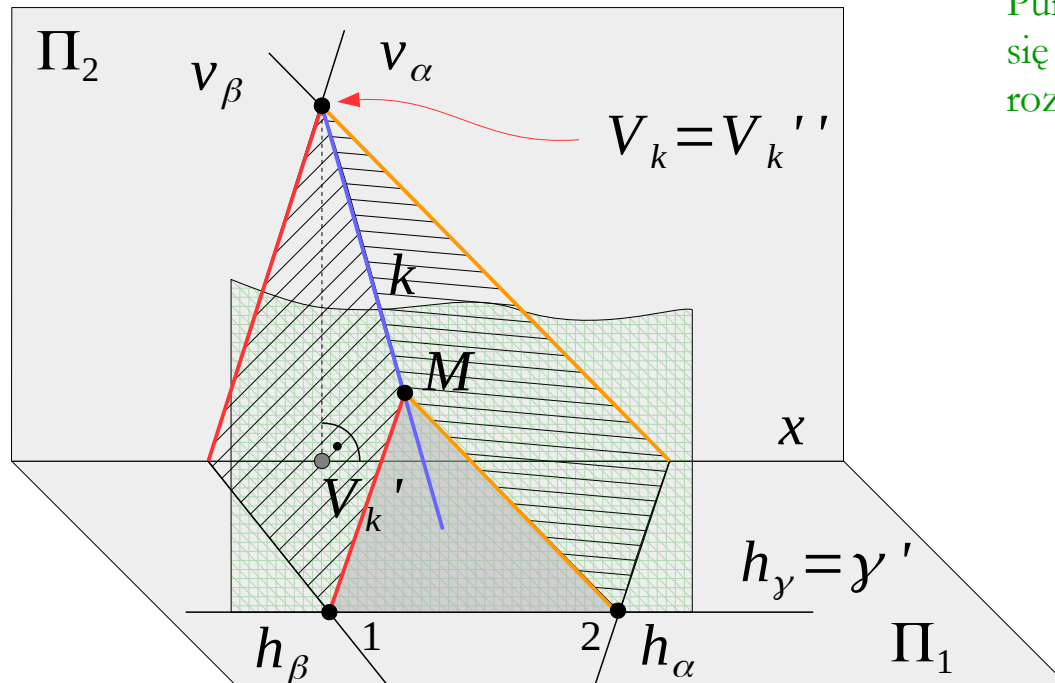


Elementy wspólne

Sytuacja kłopotliwa nr 1 – nie można znaleźć punktu styku odpowiednich śladów płaszczyzn.

$\alpha(h_\alpha, v_\alpha)$ $\beta(h_\beta, v_\beta)$

Skupmy się na trójkącie, który powstał po odcięciu „resztek” płaszczyzn α i β płaszczyzną czołową γ .



Punkt M należy do krawędzi – gdyby udało się znaleźć jego rzuty, to zadanie zostałoby rozwiązane.

$M \in k$

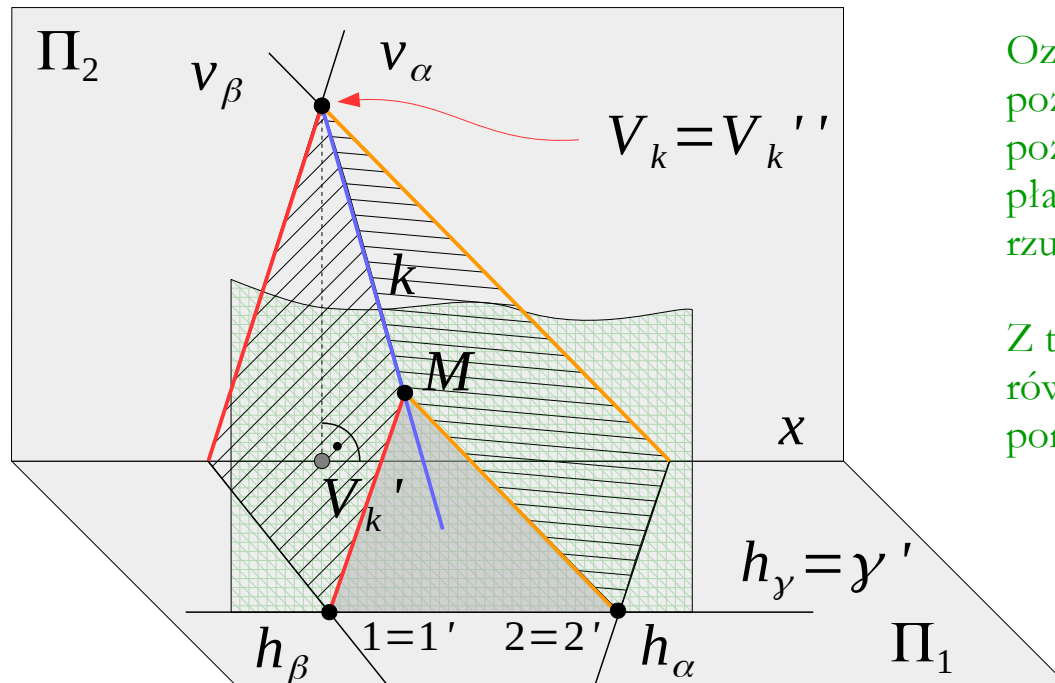
Elementy wspólne

Sytuacja kłopotliwa nr 1 – nie można znaleźć punktu styku odpowiednich śladów płaszczyzn.

$$\alpha(h_\alpha, v_\alpha) \quad \beta(h_\beta, v_\beta)$$

W przypadku płaszczyzny czołowej:

$$h_y = \gamma'$$



Oznacza to, że na śladzie poziomym (rzucie poziomym) tej płaszczyzny znajdują się rzuty poziome wszystkich obiektów leżących na tej płaszczyźnie – w tym punktu M (z tym, że rzutu M' nie można od razu wyznaczyć).

Z tej samej przyczyny na linii tej znajdują się również rzuty poziome punktów pomocniczych 1 i 2.

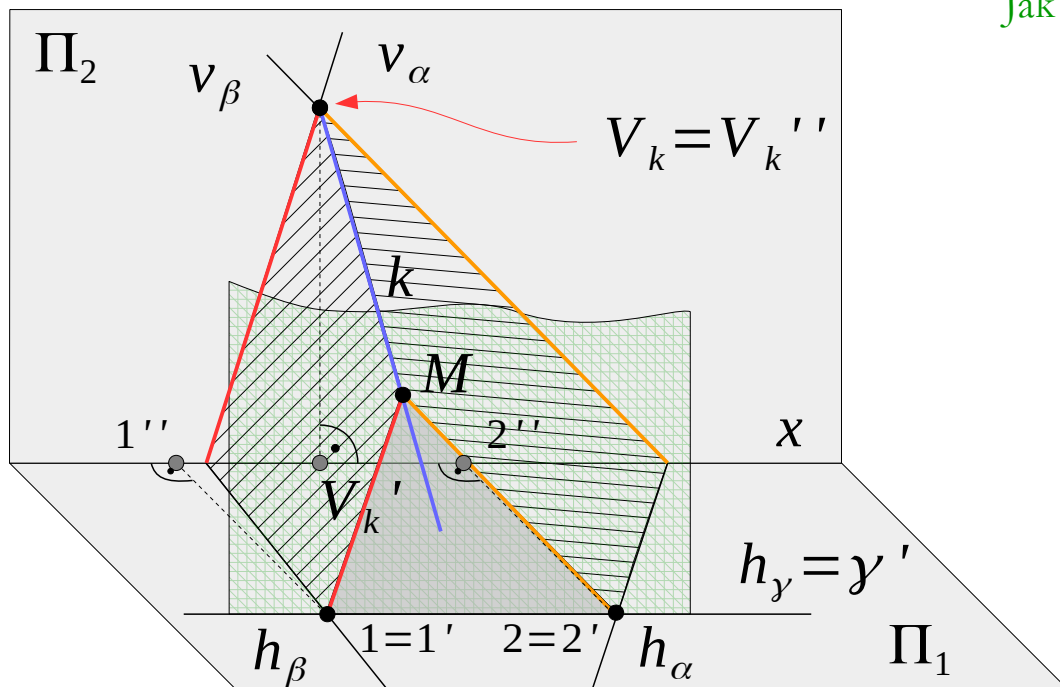
Elementy wspólne

Sytuacja kłopotliwa nr 1 – nie można znaleźć punktu styku odpowiednich śladów płaszczyzn.

$\alpha(h_\alpha, v_\alpha)$ $\beta(h_\beta, v_\beta)$

Ponieważ punkty 1 i 2 nie posiadają wysokości (leżą na rzutni poziomej), to ich rzuty pionowe znajdują się na osi x.

Jak znaleźć rzut pionowy punktu M?

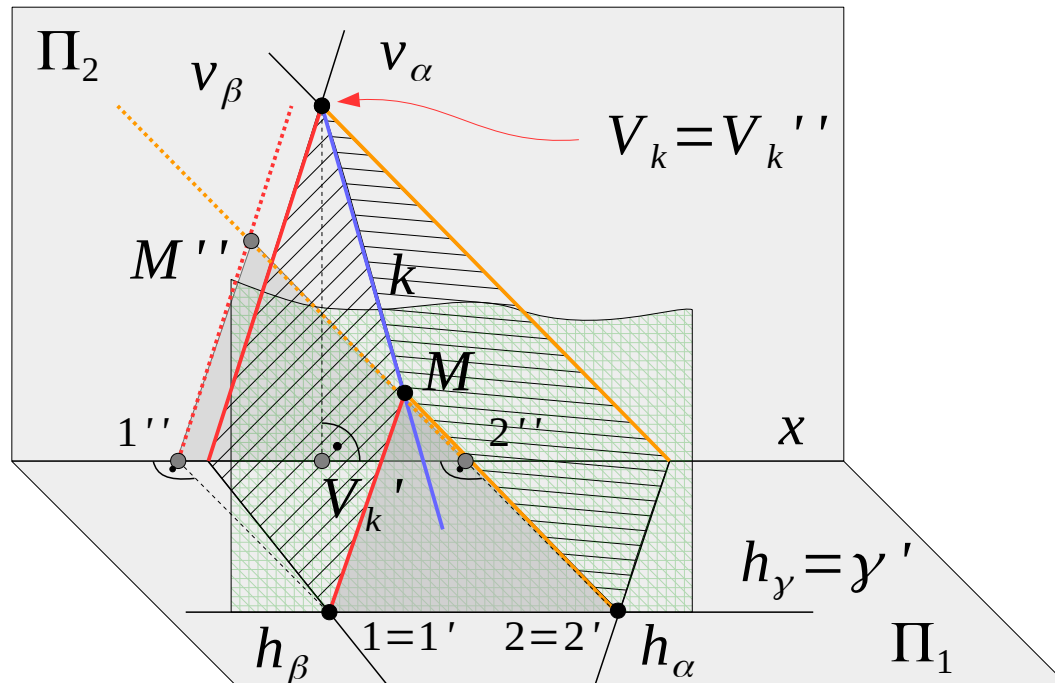


Elementy wspólne

Sytuacja kłopotliwa nr 1 – nie można znaleźć punktu styku odpowiednich śladów płaszczyzn.

$$\alpha(h_\alpha, v_\alpha) \quad \beta(h_\beta, v_\beta)$$

Tam, gdzie spotkają się te linie znajduje się wierzchołek trójkąta – czyli szukany rzut M'' .



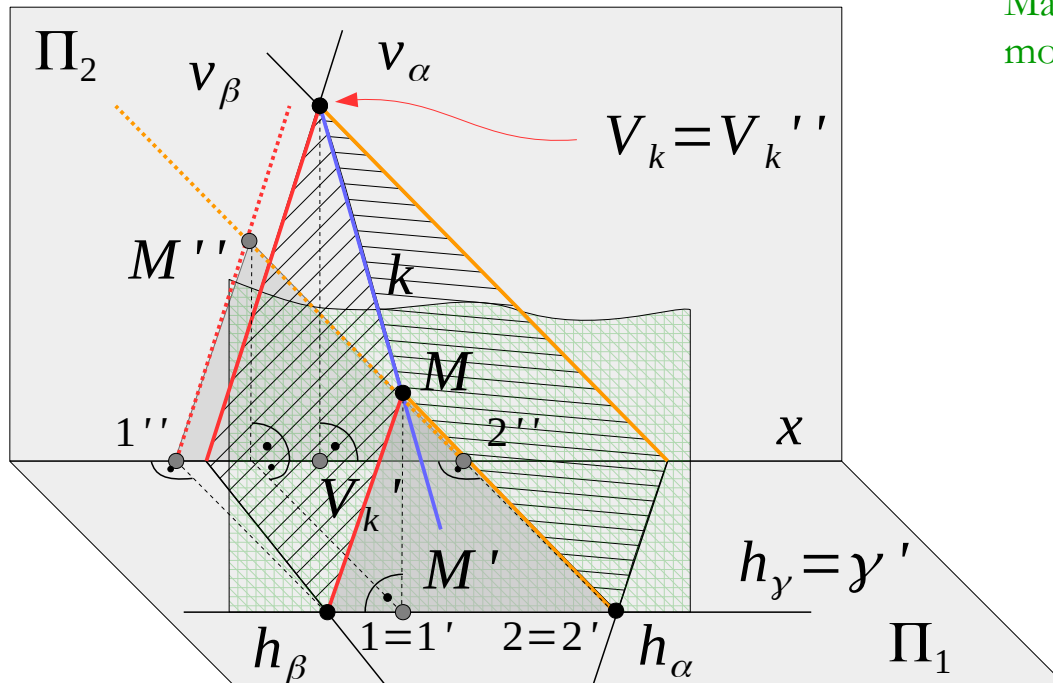
Elementy wspólne

Sytuacja kłopotliwa nr 1 – nie można znaleźć punktu styku odpowiednich śladów płaszczyzn.

$$\alpha(h_\alpha, v_\alpha) \quad \beta(h_\beta, v_\beta)$$

Rzut poziomy punktu M znajduje się na jednej odnoszącej z rzutem M'' i leży na śladzie płaszczyzny $h_y = \gamma'$.

Mając już rzuty V_k' i M' oraz V_k'' i M'' można wyznaczyć rzuty krawędzi k .

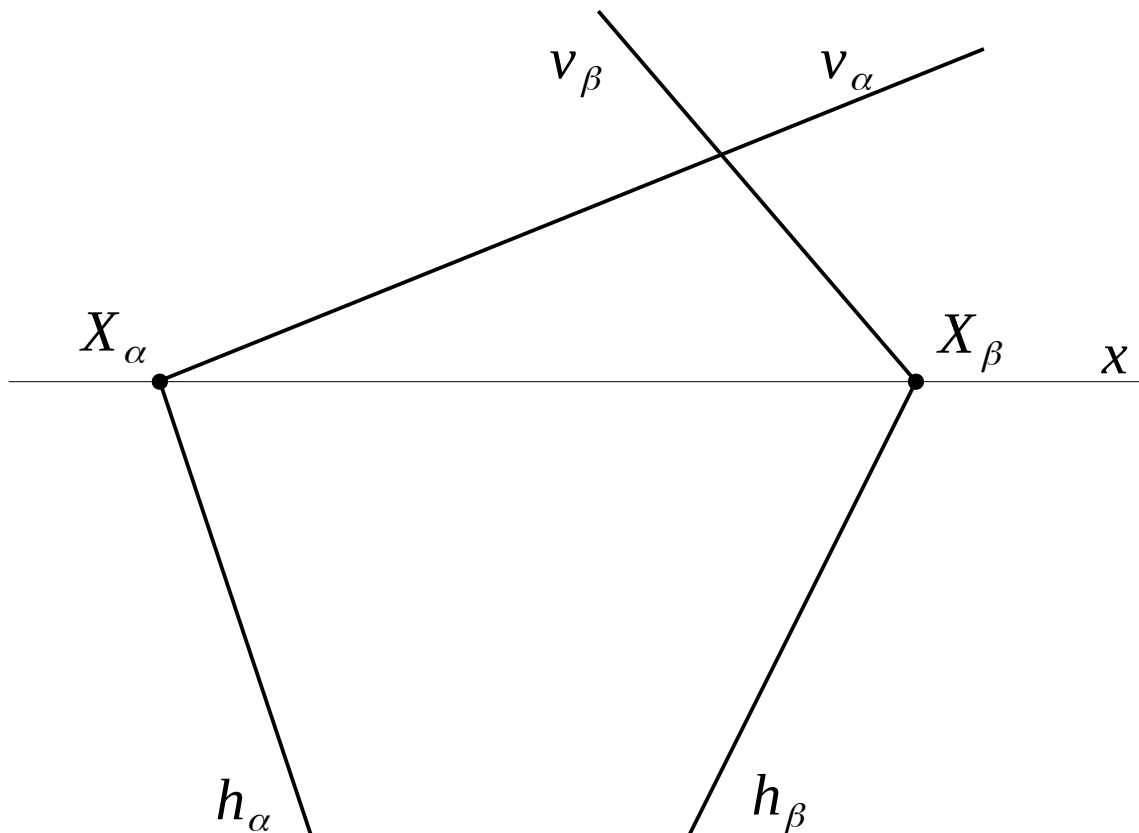


Elementy wspólne

Sytuacja kłopotliwa nr 1 – nie można znaleźć punktu styku odpowiednich śladów płaszczyzn.

$\alpha(h_\alpha, v_\alpha)$ $\beta(h_\beta, v_\beta)$

Powtórzmy konstrukcję na rozłożonych rzutniach:



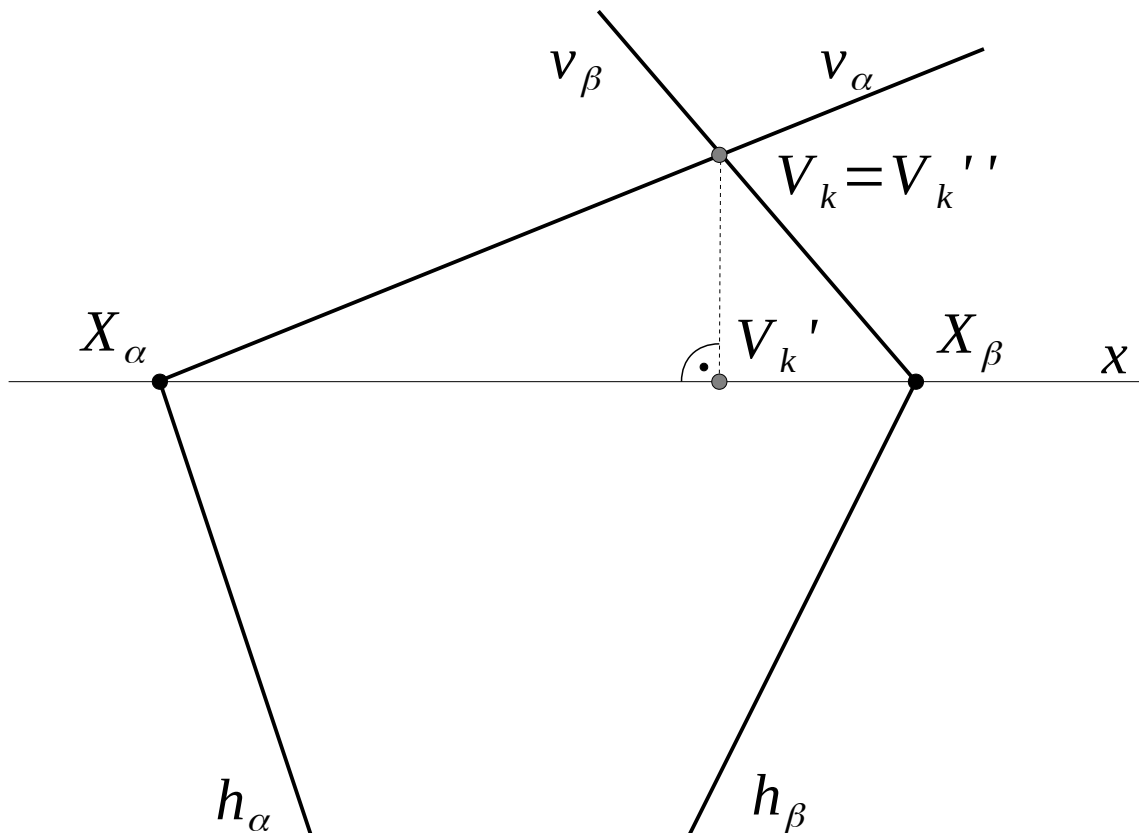
Elementy wspólne

Sytuacja kłopotliwa nr 1 – nie można znaleźć punktu styku odpowiednich śladów płaszczyzn.

$\alpha(h_\alpha, v_\alpha)$ $\beta(h_\beta, v_\beta)$

Powtórzmy konstrukcję na rozłożonych rzutniach:

- Znajdujemy istniejący ślad i jego rzuty.



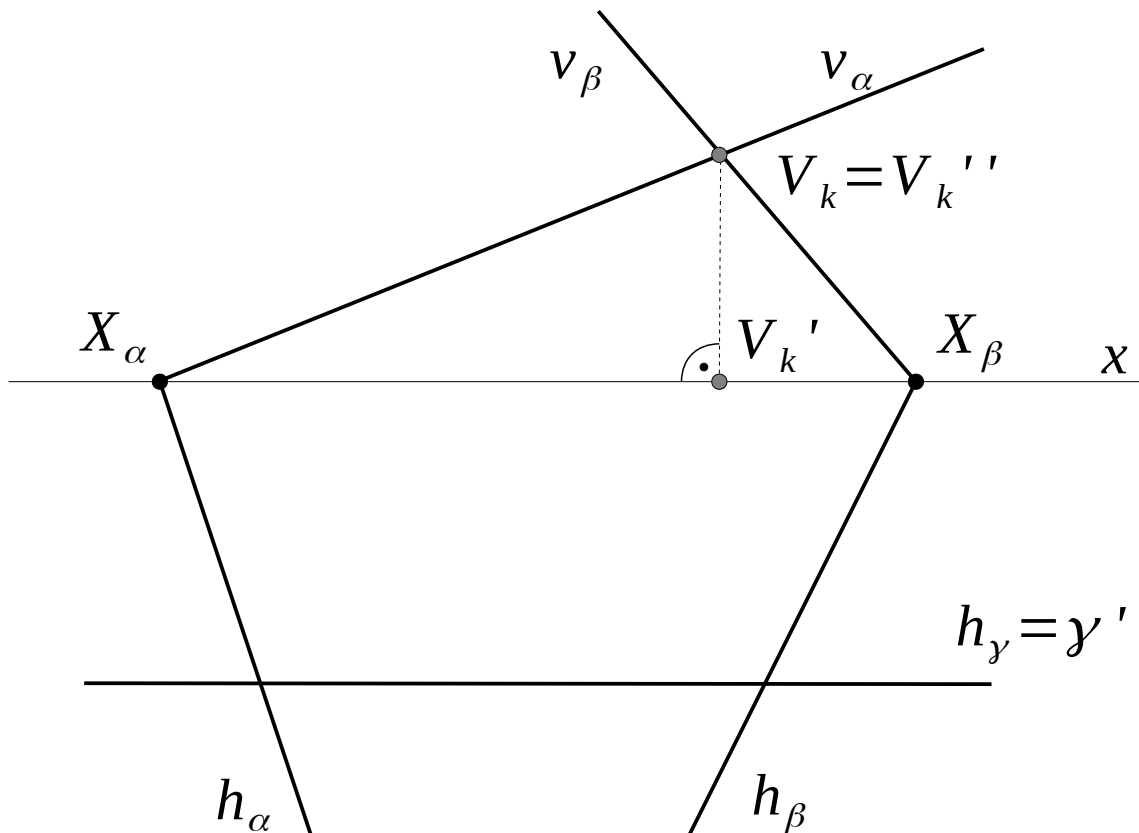
Elementy wspólne

Sytuacja kłopotliwa nr 1 – nie można znaleźć punktu styku odpowiednich śladów płaszczyzn.

$\alpha(h_\alpha, v_\alpha)$ $\beta(h_\beta, v_\beta)$

Powtórzmy konstrukcję na rozłożonych rzutniach:

- Znajdujemy istniejący ślad i jego rzuty.
- Dodajemy płaszczyznę czołową.

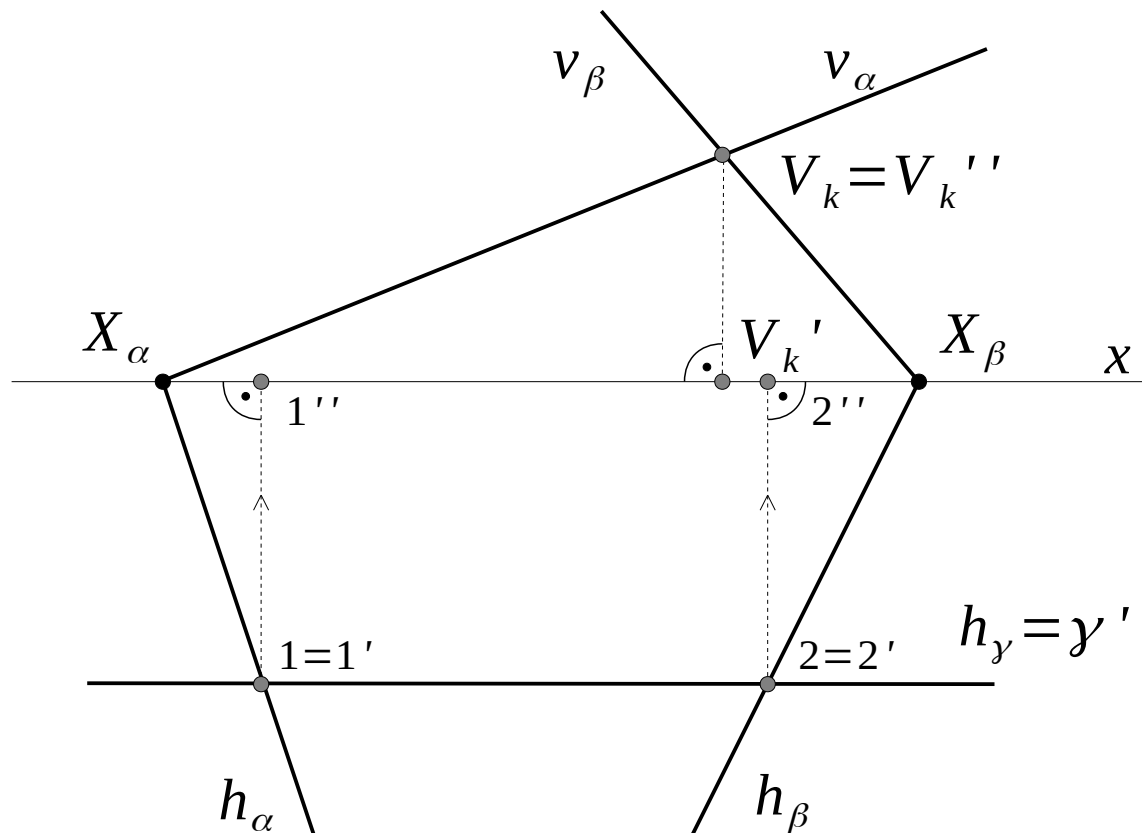


Elementy wspólne

Sytuacja kłopotliwa nr 1 – nie można znaleźć punktu styku odpowiednich śladów płaszczyzn.

$\alpha(h_\alpha, v_\alpha)$ $\beta(h_\beta, v_\beta)$

Powtórzmy konstrukcję na rozłożonych rzutniach:

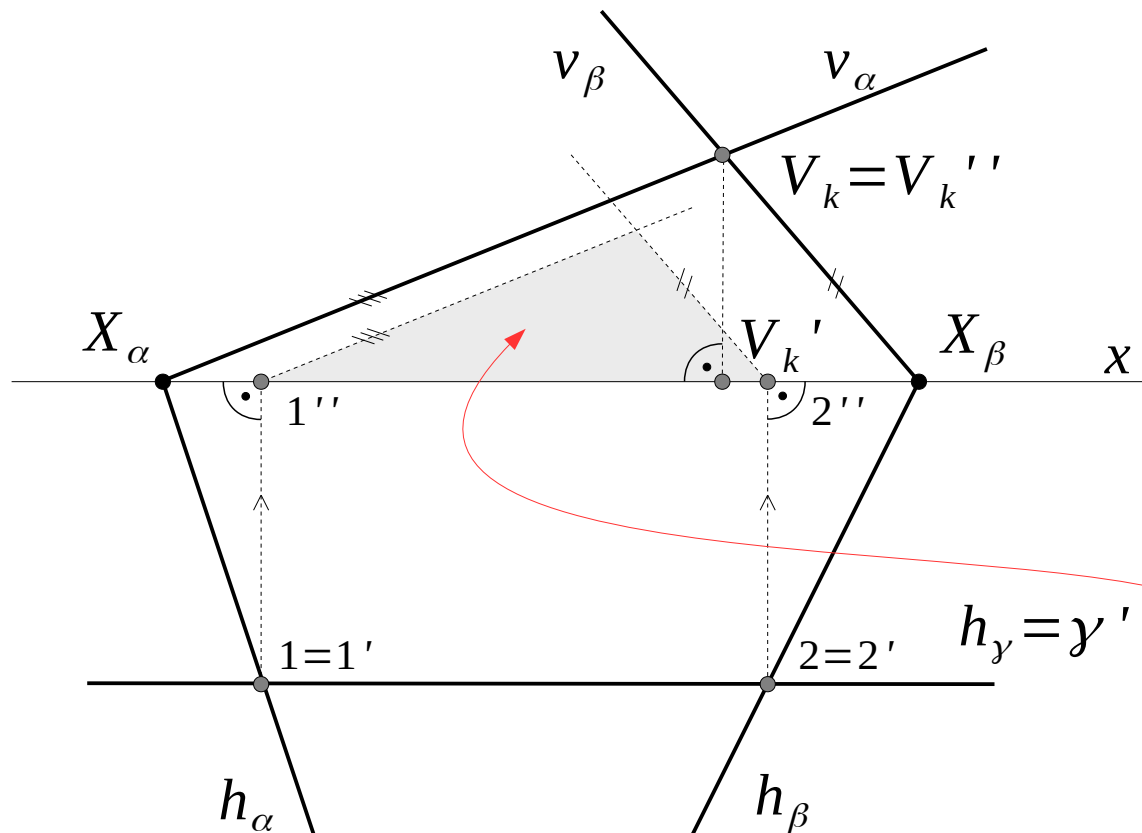


- Znajdujemy istniejący ślad i jego rzuty.
- Dodajemy płaszczyznę czołową.
- Zaznaczamy punkty pomocnicze 1 oraz 2 i je rzutujemy.

Elementy wspólne

Sytuacja kłopotliwa nr 1 – nie można znaleźć punktu styku odpowiednich śladów płaszczyzn.

$\alpha(h_\alpha, v_\alpha)$ $\beta(h_\beta, v_\beta)$



Powtórzmy konstrukcję na rozłożonych rzutniach:

- Znajdujemy istniejący ślad i jego rzuty.
- Dodajemy płaszczyznę czołową.
- Zaznaczamy punkty pomocnicze 1 oraz 2 i je rzutujemy.
- Rysujemy linie pomocnicze, równoległe do odpowiednich śladów płaszczyzn (uzyskujemy rzut trójkąta 1,2,M).

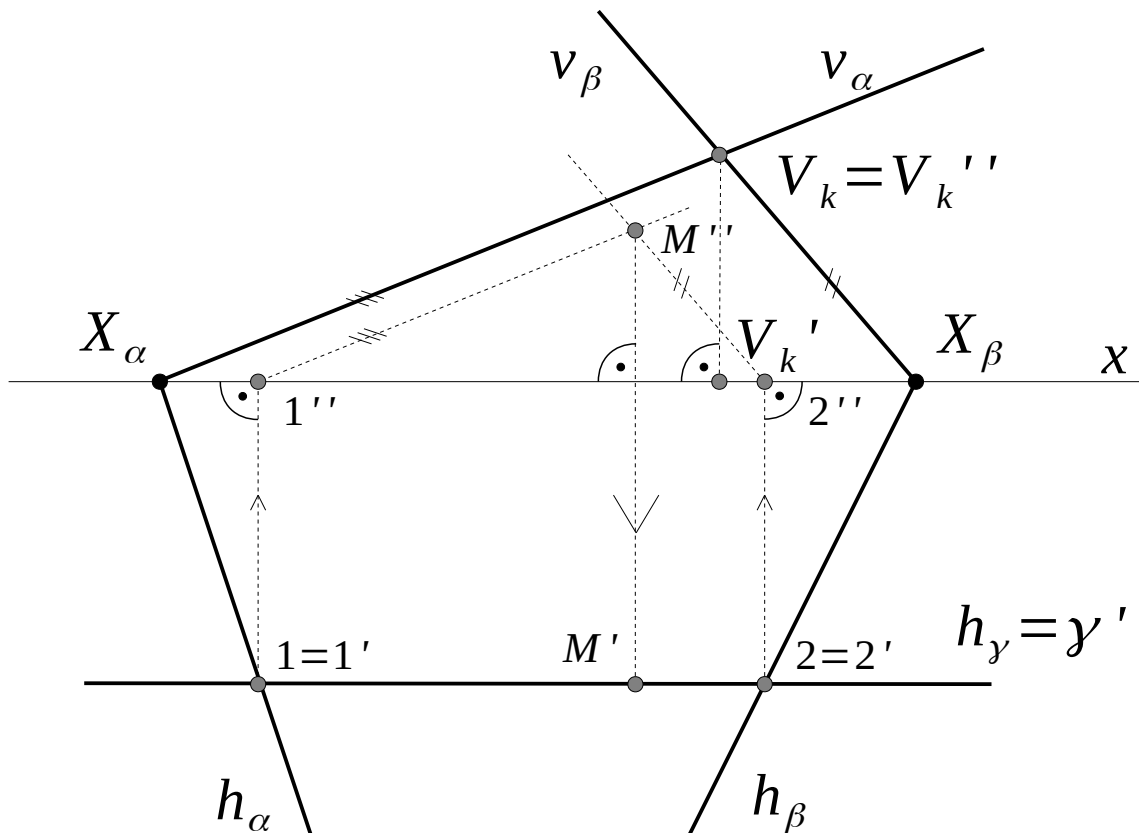
Trójkąta nie rysujemy – to został dodany dla zwiększenia czytelności opisu.

Elementy wspólne

Sytuacja kłopotliwa nr 1 – nie można znaleźć punktu styku odpowiednich śladów płaszczyzn.

$\alpha(h_\alpha, v_\alpha)$ $\beta(h_\beta, v_\beta)$

Powtórzmy konstrukcję na rozłożonych rzutniach:

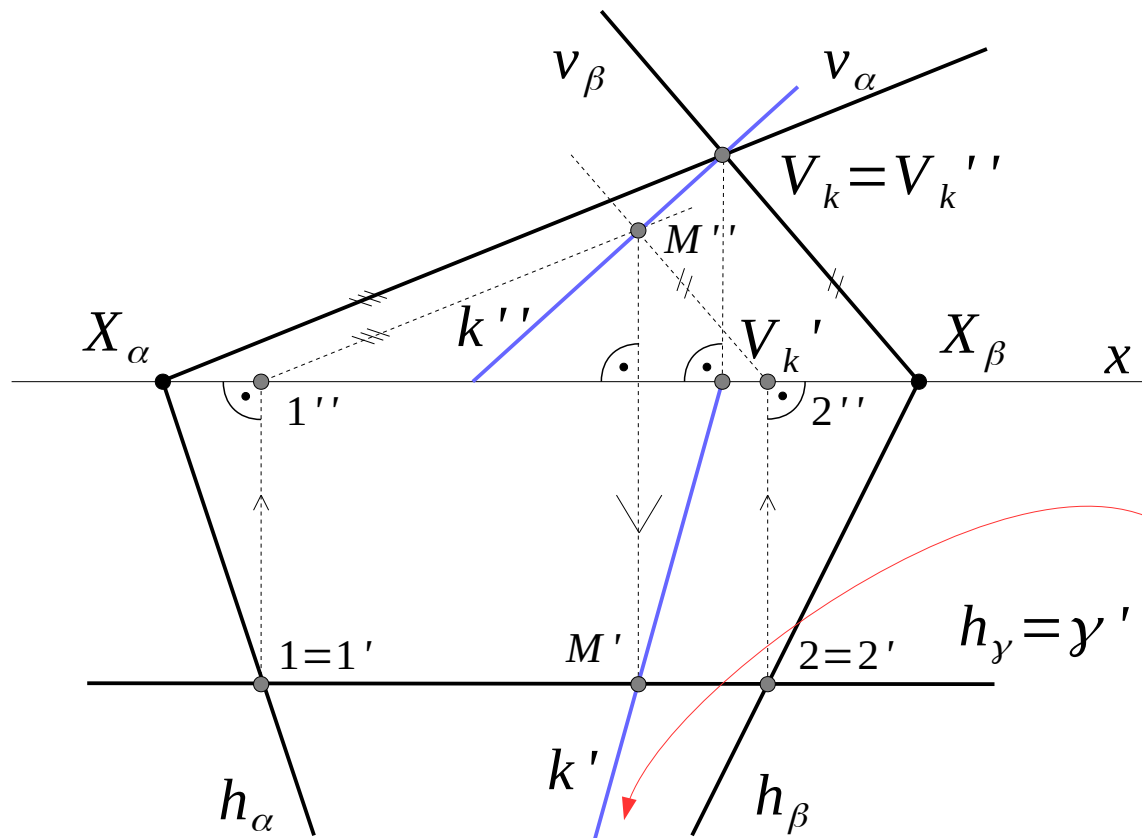


- Znajdujemy istniejący ślad i jego rzuty.
- Dodajemy płaszczyznę czołową.
- Zaznaczamy punkty pomocnicze 1 oraz 2 i je rzutujemy.
- Rysujemy linie pomocnicze, równoległe do odpowiednich śladów płaszczyzn (uzyskujemy rzut trójkąta 1,2,M).
- Wyznaczamy rzuty punktu M.

Elementy wspólne

Sytuacja kłopotliwa nr 1 – nie można znaleźć punktu styku odpowiednich śladów płaszczyzn.

$\alpha(h_\alpha, v_\alpha)$ $\beta(h_\beta, v_\beta)$



Powtórzmy konstrukcję na rozłożonych rzutniach:

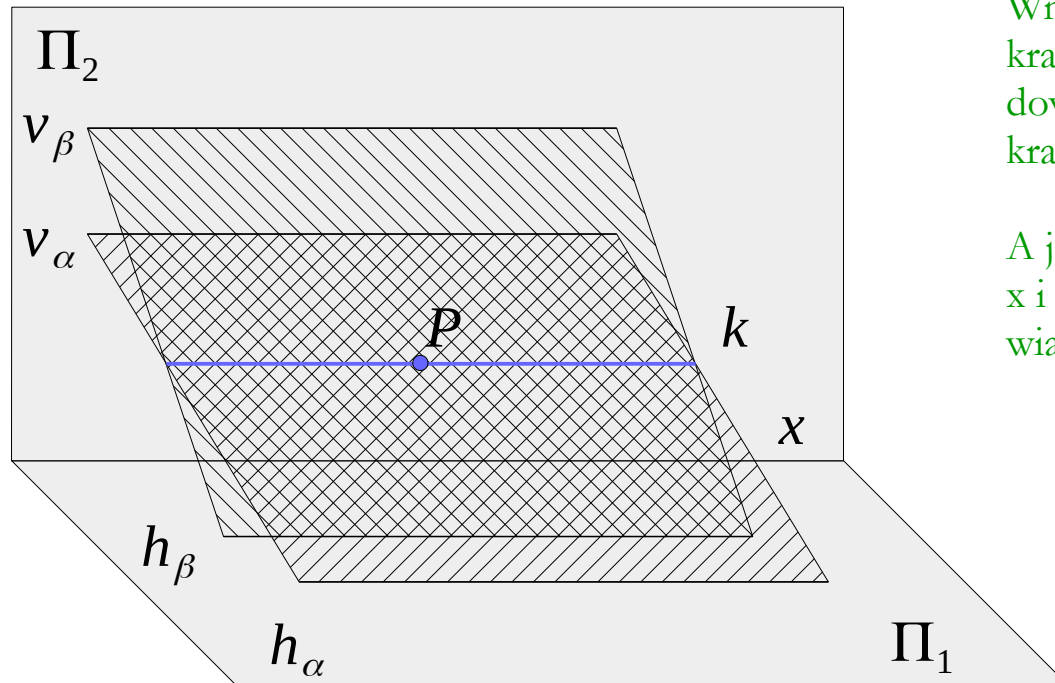
- Znajdujemy istniejący ślad i jego rzuty.
- Dodajemy płaszczyznę czołową.
- Zaznaczamy punkty pomocnicze 1 oraz 2 i je rzutowujemy.
- Rysujemy linie pomocnicze, równoległe do odpowiednich śladów płaszczyzn (uzyskujemy rzut trójkąta 1,2,M).
- Wyznaczamy rzuty punktu M.
- Łączymy odpowiednie rzuty punktów V_k oraz M i uzyskujemy rzuty krawędzi.

Zastanówmy się: czy jest szansa aby rzut krawędzi przeszedł przez miejsce spotkania się śladów płaszczyzn?

Elementy wspólne

Sytuacja kłopotliwa nr 2 – obie płaszczyzny są równoległe do osi x.

$$\alpha(h_\alpha, v_\alpha) \quad \beta(h_\beta, v_\beta)$$



Skoro obie płaszczyzny są równoległe do osi x, a krawędź jest prostą należącą do obu tych płaszczyzn, to i ona musi być równoległa do osi x.

Wniosek jest taki, że aby narysować rzuty krawędzi, to trzeba wyznaczyć tylko jeden dowolny, wspólny punkt obu płaszczyzn – krawędź będzie przez niego przechodziła.

A jak narysować rzuty prostej równoległej do osi x i przechodzącej przez jakiś punkt to już wiadomo.

$$P' \in k'$$
$$P'' \in k''$$

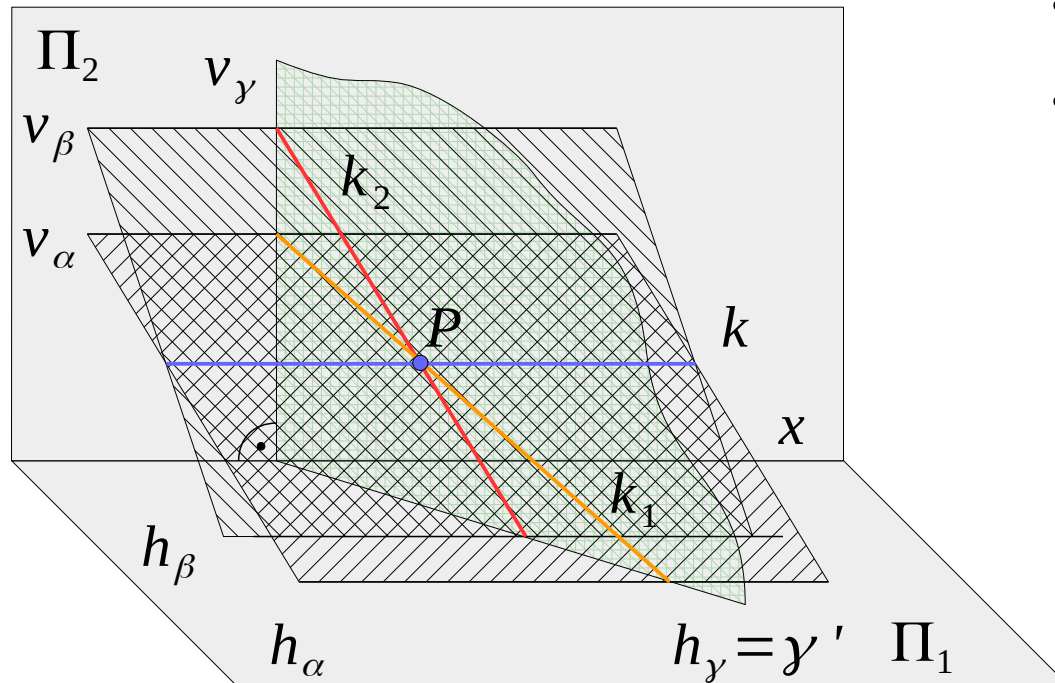
Elementy wspólne

Sytuacja kłopotliwa nr 2 – obie płaszczyzny są równoległe do osi x.

$$\alpha(h_\alpha, v_\alpha) \quad \beta(h_\beta, v_\beta)$$

Rozwiązanie polega na:

- Wprowadzeniu dowolnej płaszczyzny poziomo-rzutującej lub pionowo-rzutującej.
- Wyznaczeniu krawędzi tej płaszczyzny z płaszczyznami α i β .
- Wyznaczeniu punktu wspólnego obu krawędzi.

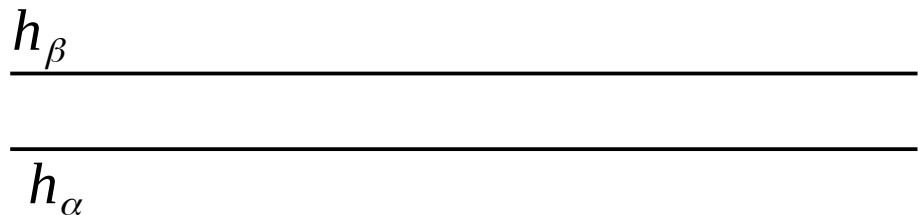
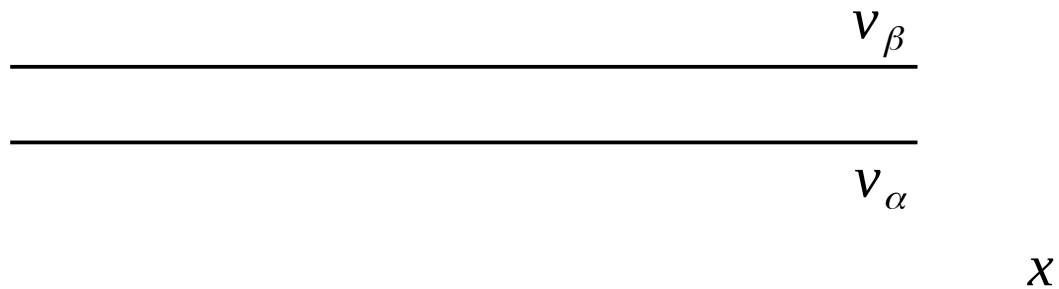


Elementy wspólne

Sytuacja kłopotliwa nr 2 – obie płaszczyzny są równoległe do osi x.

$$\alpha(h_\alpha, v_\alpha) \quad \beta(h_\beta, v_\beta)$$

Powtórzmy konstrukcję na rozłożonych rzutniach:



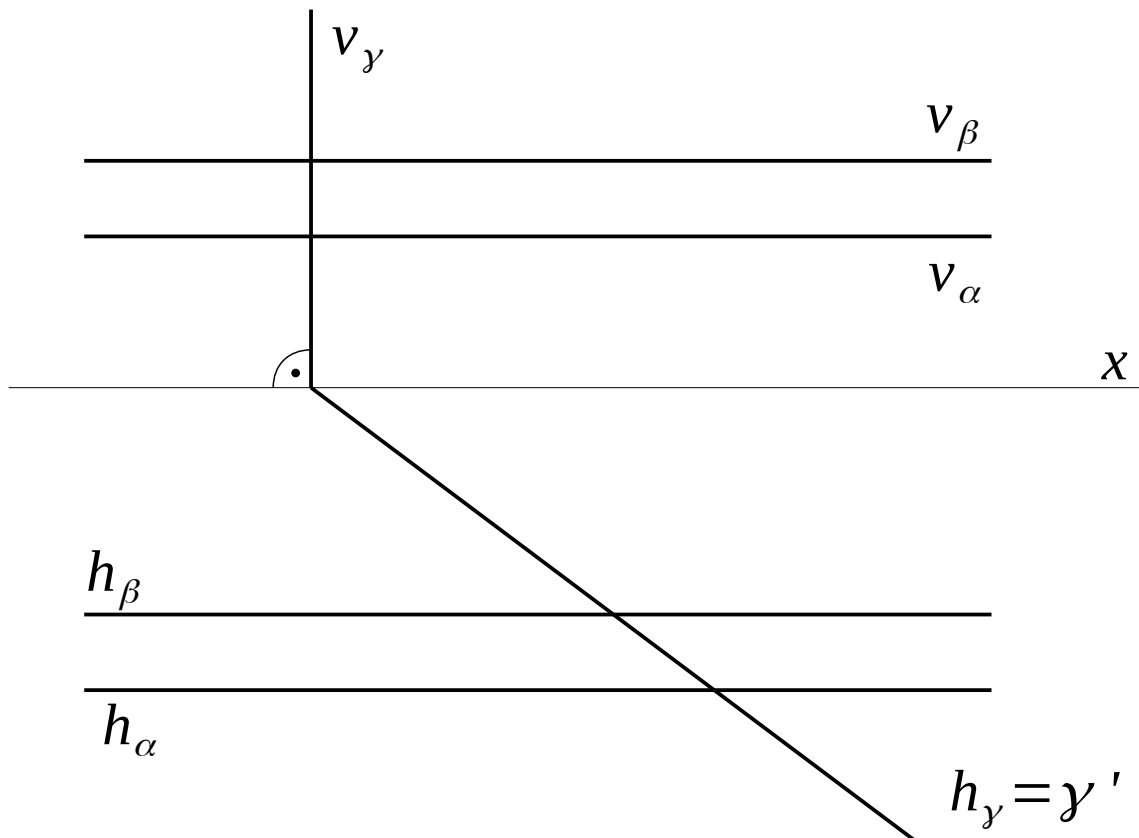
Elementy wspólne

Sytuacja kłopotliwa nr 2 – obie płaszczyzny są równoległe do osi x.

$\alpha(h_\alpha, v_\alpha)$ $\beta(h_\beta, v_\beta)$

Powtórzmy konstrukcję na rozłożonych rzutniach:

- Wprowadzamy dodatkową płaszczyznę poziomo-lub pionowo-rzutującą.

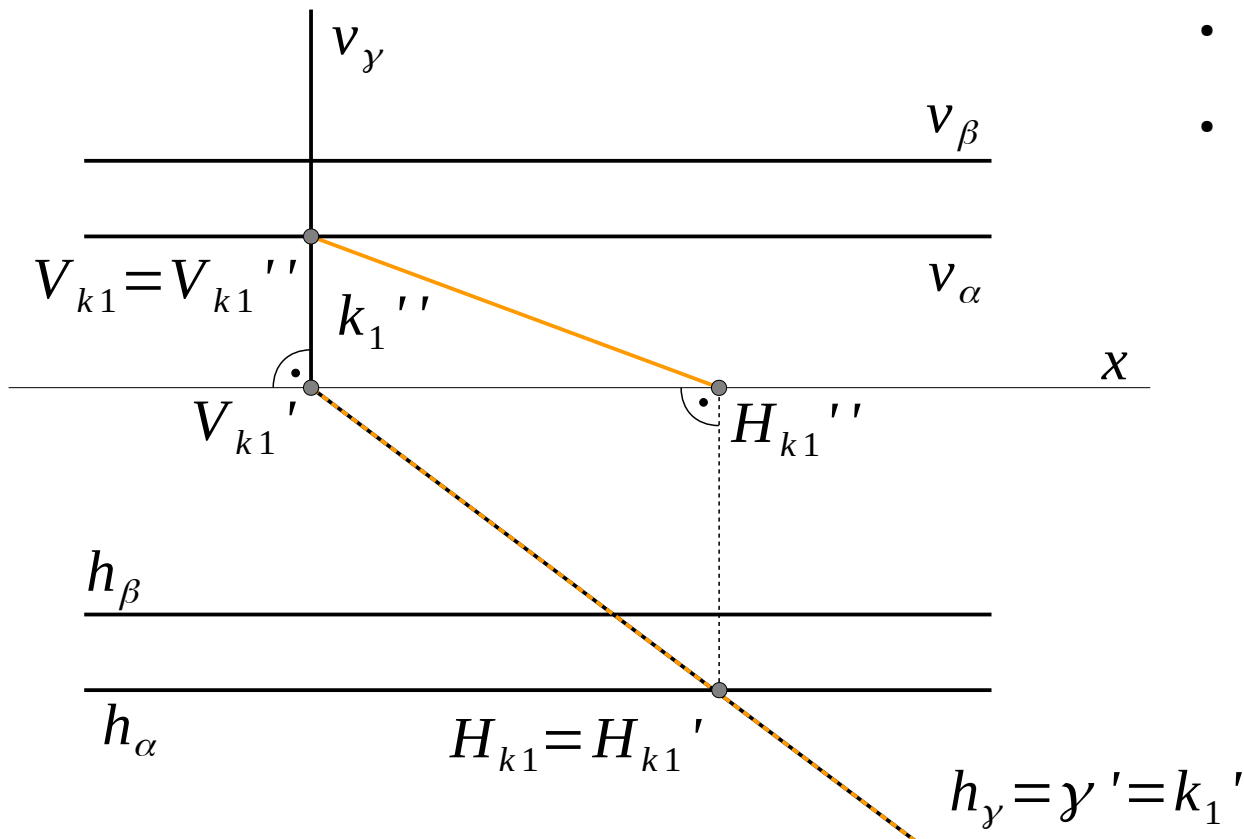


Elementy wspólne

Sytuacja kłopotliwa nr 2 – obie płaszczyzny są równoległe do osi x.

$\alpha(h_\alpha, v_\alpha)$ $\beta(h_\beta, v_\beta)$

Powtórzmy konstrukcję na rozłożonych rzutniach:



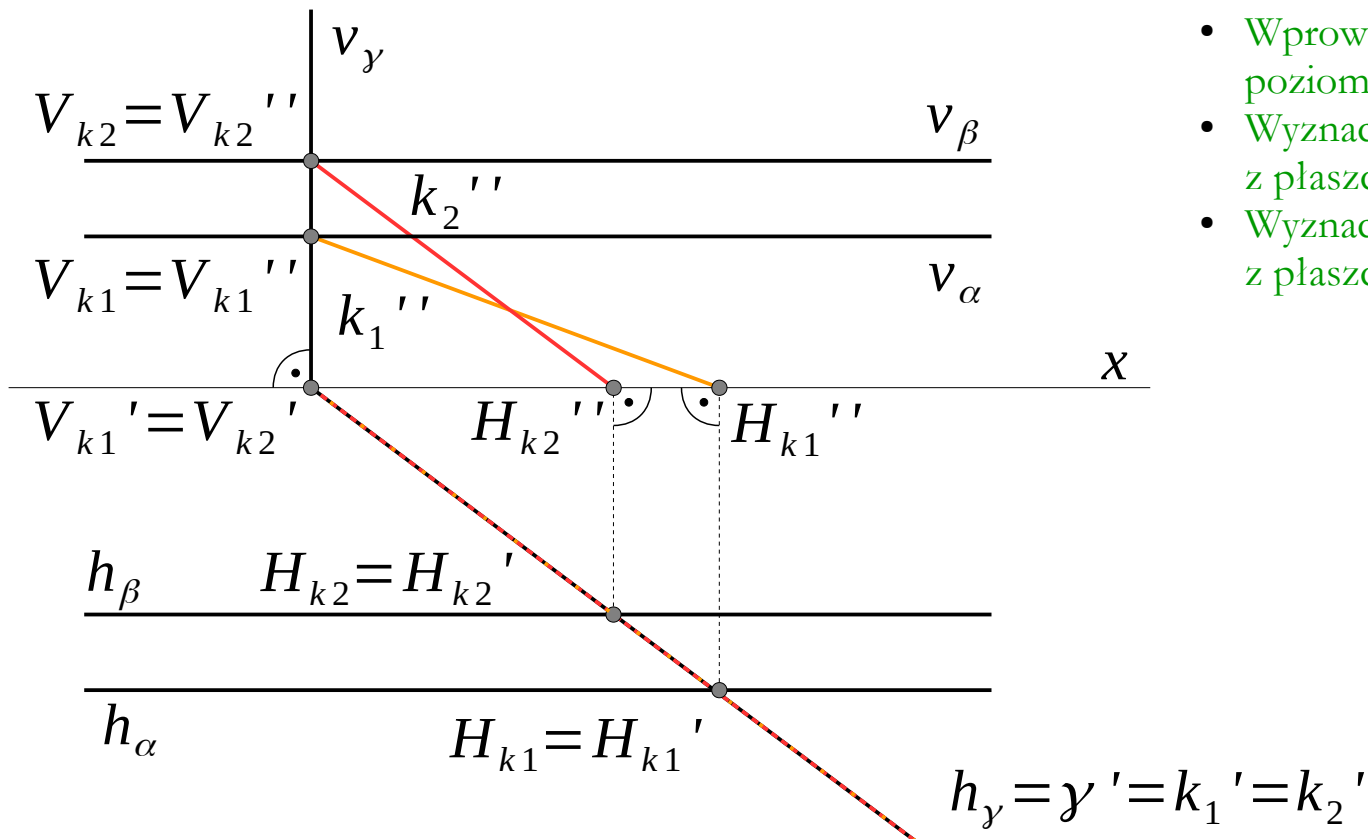
- Wprowadzamy dodatkową płaszczyznę poziomo-lub pionowo-rzutującą.
- Wyznaczamy krawędź tej płaszczyzny z płaszczyzną α .

Elementy wspólne

Sytuacja kłopotliwa nr 2 – obie płaszczyzny są równoległe do osi x.

$\alpha(h_\alpha, v_\alpha)$ $\beta(h_\beta, v_\beta)$

Powtórzmy konstrukcję na rozłożonych rzutniach:



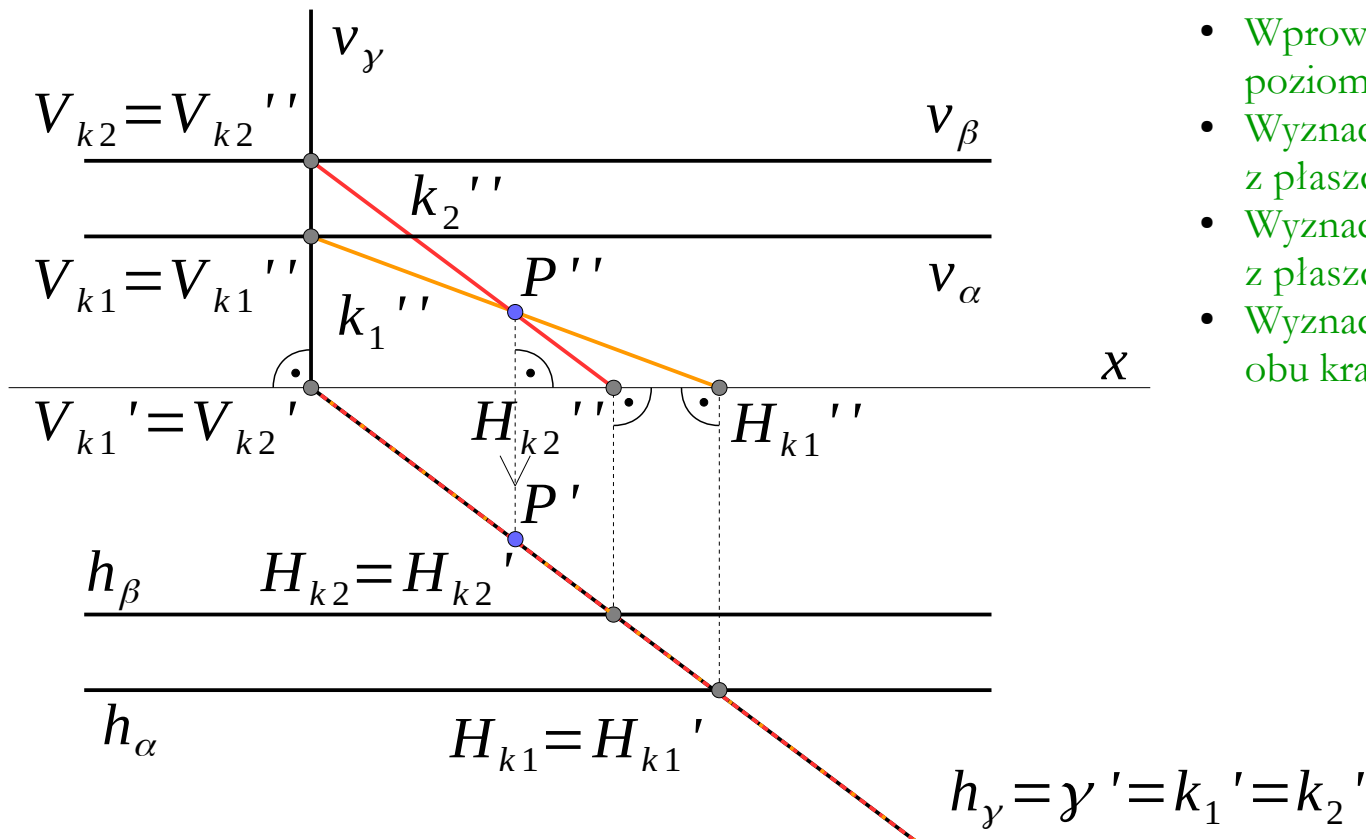
- Wprowadzamy dodatkową płaszczyznę poziomo-lub pionowo-rzutującą.
- Wyznaczamy krawędź tej płaszczyzny z płaszczyzną α .
- Wyznaczamy krawędź tej płaszczyzny z płaszczyzną β .

Elementy wspólne

Sytuacja kłopotliwa nr 2 – obie płaszczyzny są równoległe do osi x.

$\alpha(h_\alpha, v_\alpha)$ $\beta(h_\beta, v_\beta)$

Powtórzmy konstrukcję na rozłożonych rzutniach:

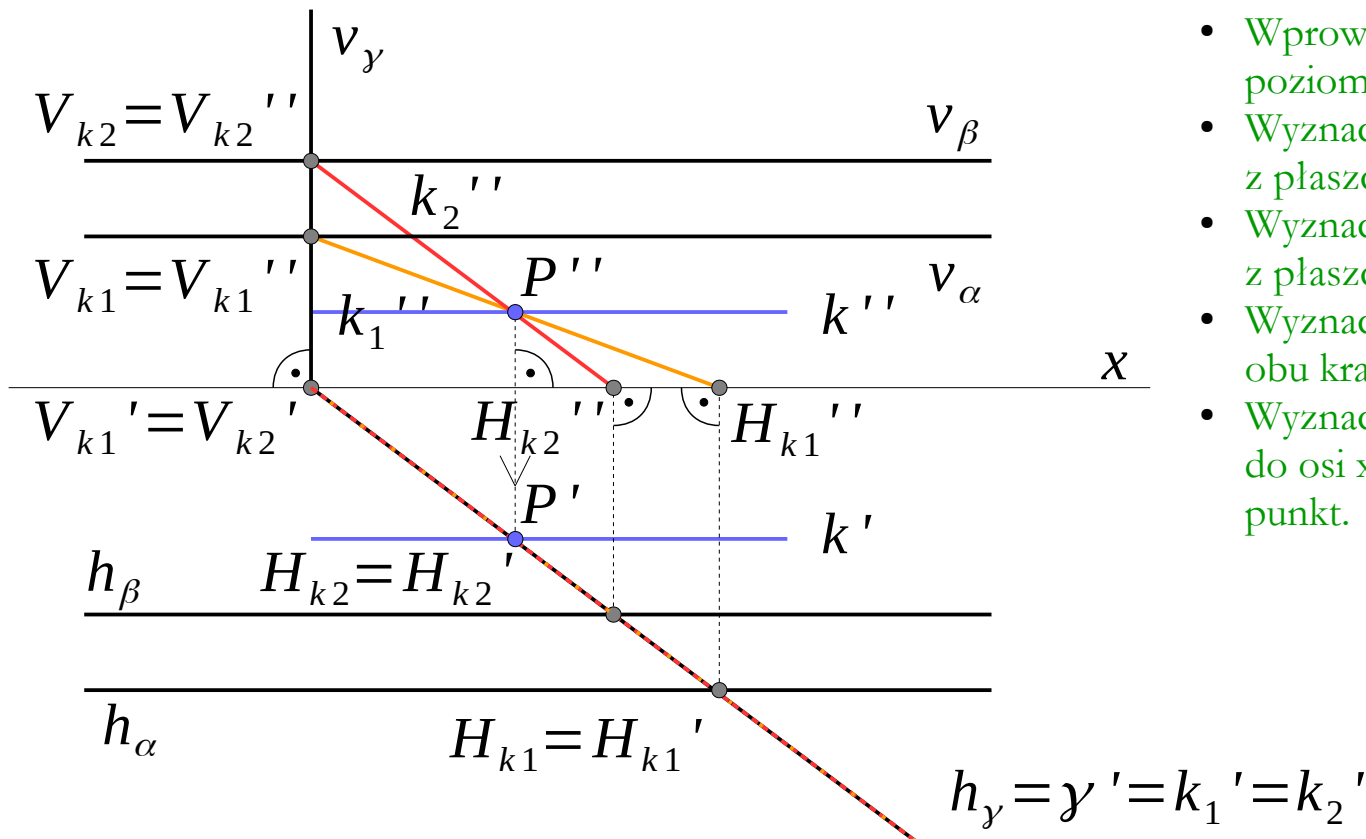


- Wprowadzamy dodatkową płaszczyznę poziomo-lub pionowo-rzutującą.
- Wyznaczamy krawędź tej płaszczyzny z płaszczyzną α .
- Wyznaczamy krawędź tej płaszczyzny z płaszczyzną β .
- Wyznaczamy rzuty punktu wspólnego obu krawędzi.

Elementy wspólne

Sytuacja kłopotliwa nr 2 – obie płaszczyzny są równoległe do osi x.

$\alpha(h_\alpha, v_\alpha)$ $\beta(h_\beta, v_\beta)$



Powtórzmy konstrukcję na rozłożonych rzutniach:

- Wprowadzamy dodatkową płaszczyznę poziomo-lub pionowo-rzutującą.
- Wyznaczamy krawędź tej płaszczyzny z płaszczyzną α .
- Wyznaczamy krawędź tej płaszczyzny z płaszczyzną β .
- Wyznaczamy rzuty punktu wspólnego obu krawędzi.
- Wyznaczamy rzuty prostej równoległej do osi x i przechodzącej przez ten punkt.

Elementy wspólne

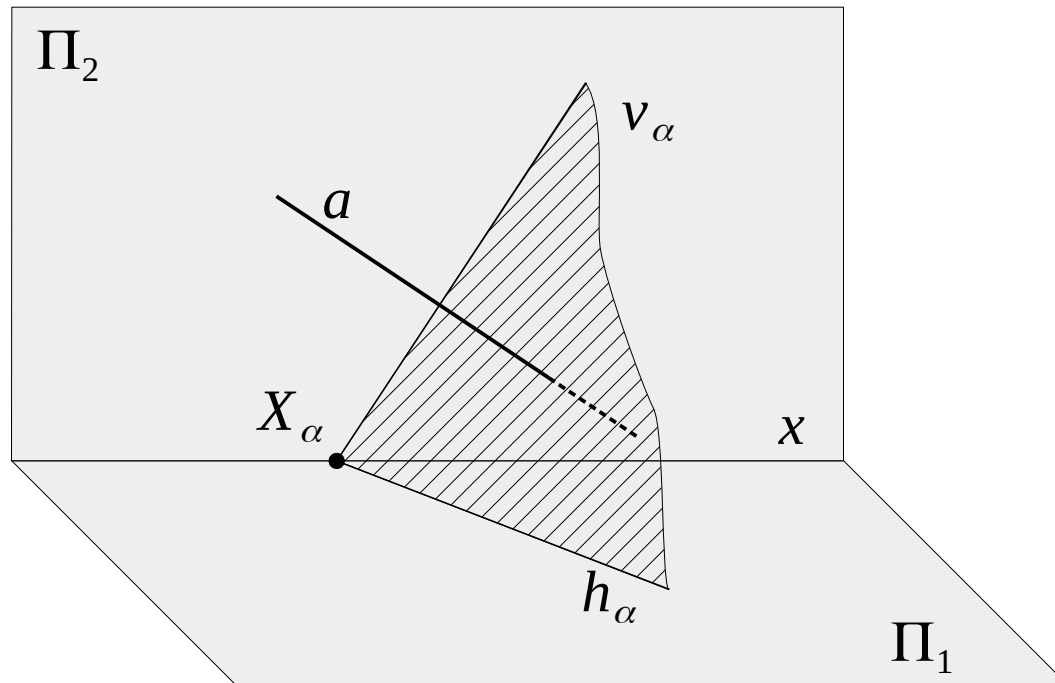
Elementy wspólne:

- punkt wspólny prostych
- krawędź płaszczyzn
- punkt przebicia płaszczyzny prosta

Patrz tematy:

- elementy przynależne – prosta na płaszczyźnie,
- elementy przynależne – punkt na prostej,
- elementy wspólne – krawędź płaszczyzn.

Punkt przebicia najczęściej oznacza się literą P .



Elementy wspólne

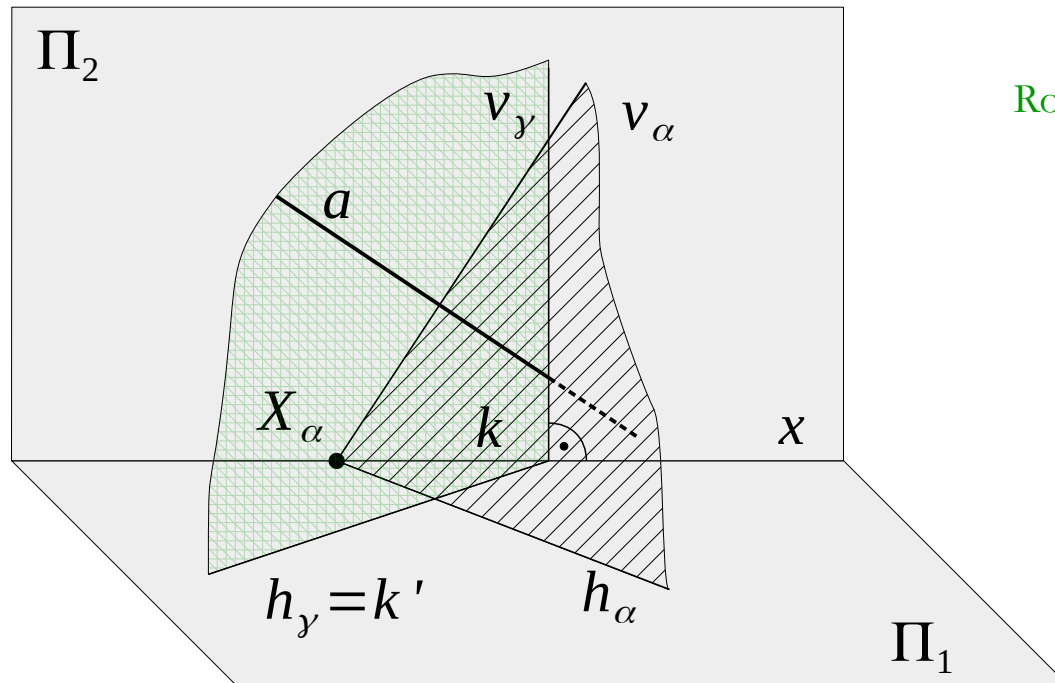
Elementy wspólne:

- punkt wspólny prostych
- krawędź płaszczyzn
- punkt przebicia płaszczyzny prostą

Patrz tematy:

- elementy przynależne – prosta na płaszczyźnie,
- elementy przynależne – punkt na prostej,
- elementy wspólne – krawędź płaszczyzn.

Punkt przebicia najczęściej oznacza się literą P.



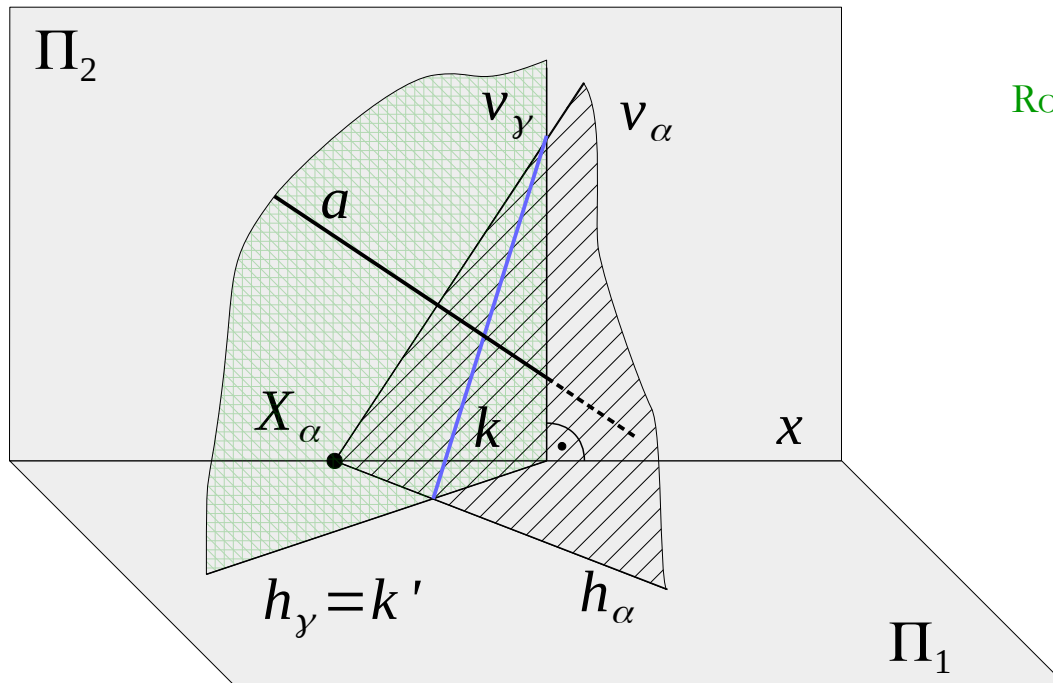
Rozwiązanie polega na:

- Wprowadzeniu dodatkowej płaszczyzny poziomo-rzutującej, przez rzut poziomy prostej, lub płaszczyzny pionowo rzutującej, przez rzut pionowy prostej.

Elementy wspólne

Elementy wspólne:

- punkt wspólny prostych
- krawędź płaszczyzn
- punkt przebicia płaszczyzny prosta



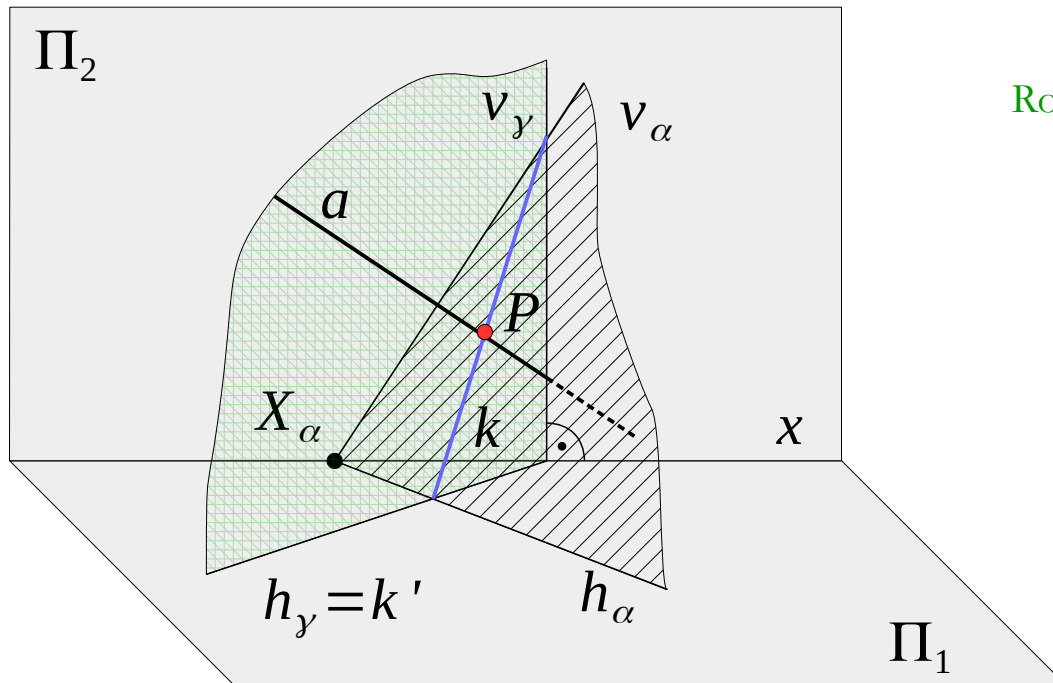
Rozwiązanie polega na:

- Wprowadzeniu dodatkowej płaszczyzny poziomo-rzutującej, przez rzut poziomy prostej, lub płaszczyzny pionowo rzutującej, przez rzut pionowy prostej.
- Wyznaczeniu krawędzi płaszczyzn.

Elementy wspólne

Elementy wspólne:

- punkt wspólny prostych
- krawędź płaszczyzn
- punkt przebicia płaszczyzny prostą



Rozwiązanie polega na:

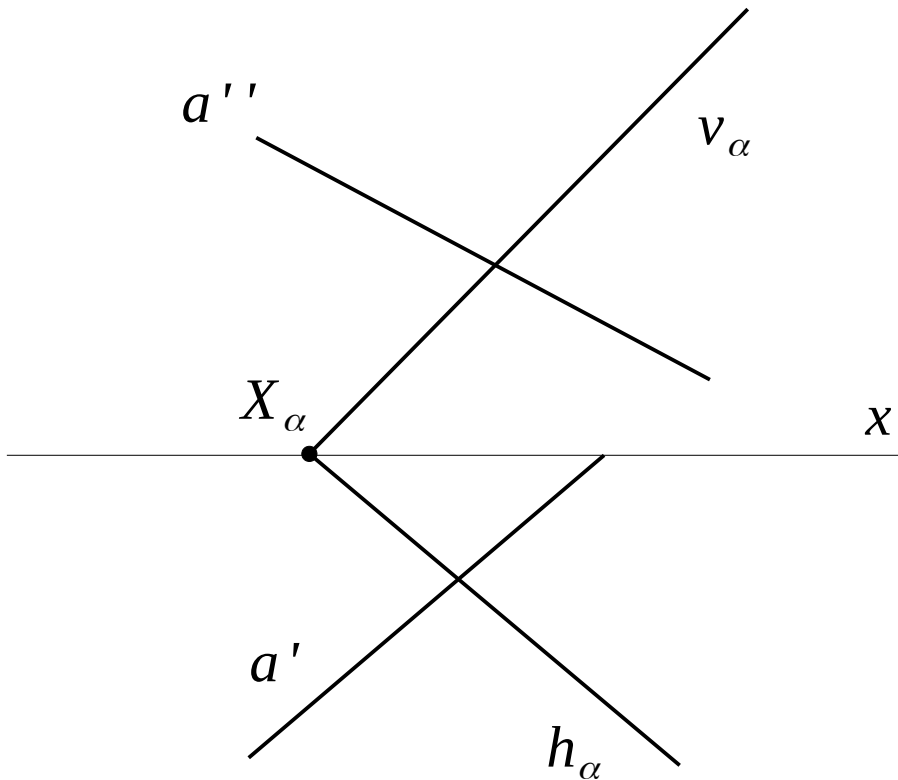
- Wprowadzeniu dodatkowej płaszczyzny poziomo-rzutującej, przez rzut poziomy prostej, lub płaszczyzny pionowo rzutującej, przez rzut pionowy prostej.
- Wyznaczeniu krawędzi płaszczyzn.
- Wyznaczeniu punktu wspólnego krawędzi i prostej przebijającej.

Elementy wspólne

Wyznaczyć punkt wspólny płaszczyzny α
i prostej a .

$$\alpha(h_\alpha, v_\alpha)$$

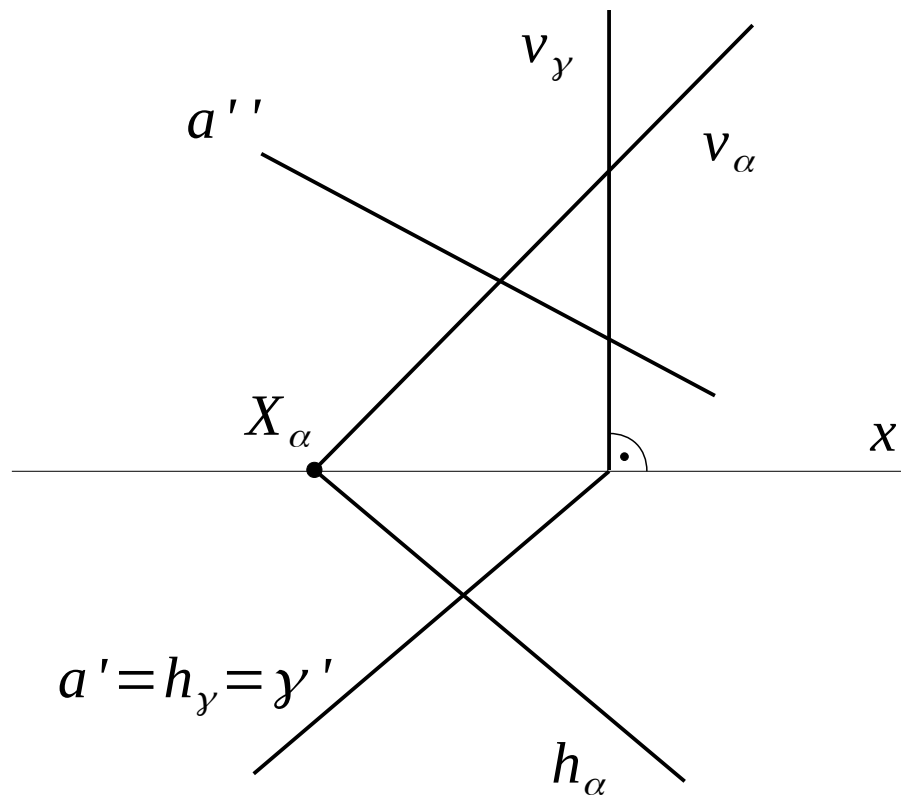
Powtórzmy konstrukcję na rozłożonych
rzutniach:



Elementy wspólne

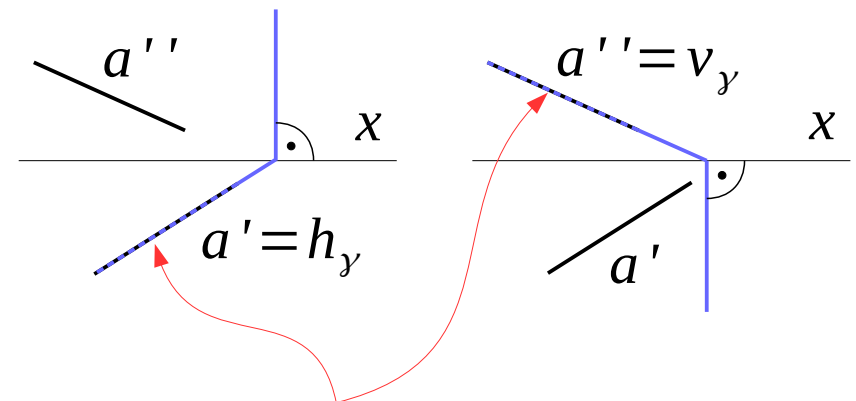
Wyznaczyć punkt wspólny płaszczyzny α i prostej a .

$$\alpha(h_\alpha, v_\alpha)$$



Powtórzmy konstrukcję na rozłożonych rzutniach:

- Wprowadzamy dodatkową płaszczyznę – tu wygodniejsza jest płaszczyzna poziomo-rzutująca.

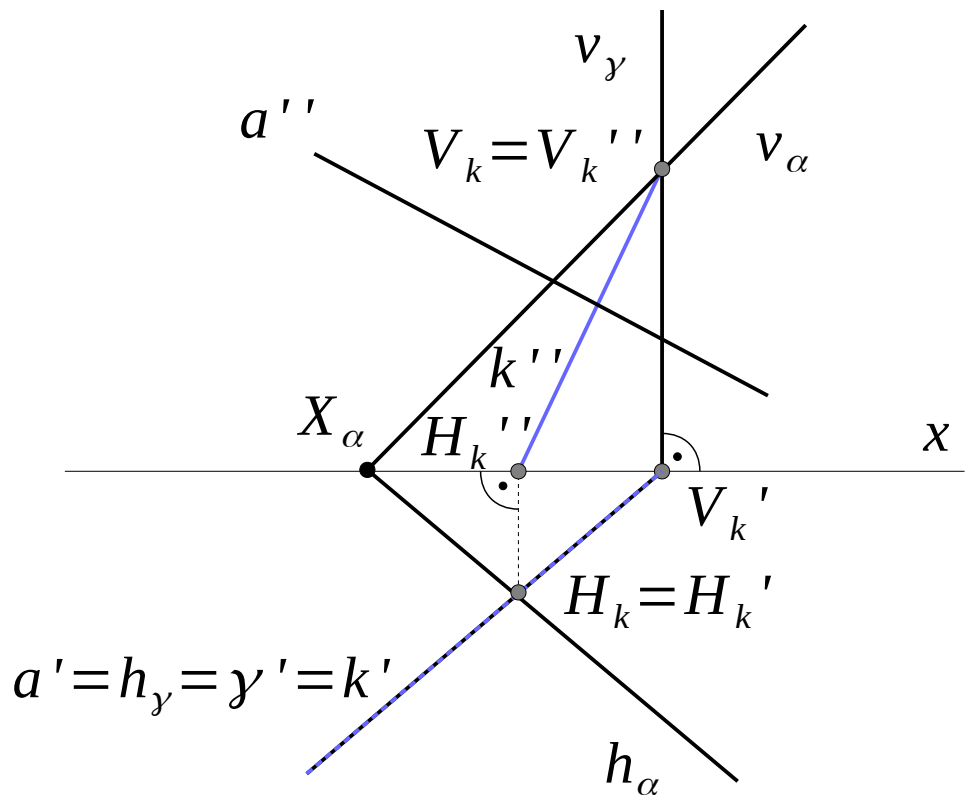


Zaczynamy rysowanie od tego śladu płaszczyzny, który ma się pokrywać z rzutem prostej.

Elementy wspólne

Wyznaczyć punkt wspólny płaszczyzny α i prostej a .

$$\alpha(h_\alpha, v_\alpha)$$



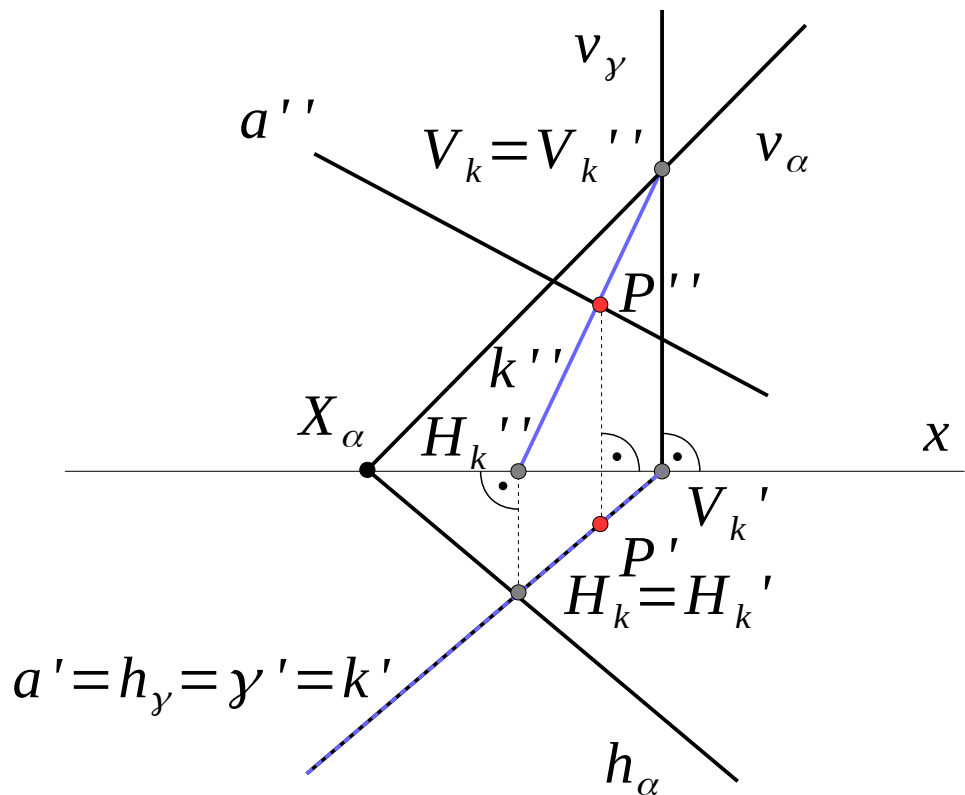
Powtórzmy konstrukcję na rozłożonych rzutniach:

- Wprowadzamy dodatkową płaszczyznę – tu wygodniejsza jest płaszczyzna poziomo-rzutująca.
- Wyznaczamy krawędź obu płaszczyzn.

Elementy wspólne

Wyznaczyć punkt wspólny płaszczyzny α i prostej a .

$$\alpha(h_\alpha, v_\alpha)$$



Powtórzmy konstrukcję na rozłożonych rzutniach:

- Wprowadzamy dodatkową płaszczyznę – tu wygodniejsza jest płaszczyzna poziomo-rzutująca.
- Wyznaczamy krawędź obu płaszczyzn.
- Wyznaczamy punkt wspólny obu prostych.

$$P \in k$$

$$P \in a$$

Podsumowanie

Zagadnienia:

Elementy przynależne: punkt na prostej, prosta na płaszczyźnie, punkt na płaszczyźnie; elementy wspólne: punkt wspólny dwóch prostych, krawędź płaszczyzn, punkt przebicia płaszczyzny prostą.

UNIVERSITY OF WARMIA AND MAZURY IN OLSZTYN
The Faculty of Technical Sciences
POLAND, 10-957 Olsztyn, M. Oczapowskiego 11
tel.: (48)(89) 5-23-32-40, fax: (48)(89) 5-23-32-55
URL: <http://www.uwm.edu.pl/edu/sobieski/> (in Polish)



Dziękuję za uwagę

Wojciech Sobieski

Olsztyn, 2021