



GEOMETRIA WYKREŚLNA

Elementy równoległe. Elementy prostopadłe.

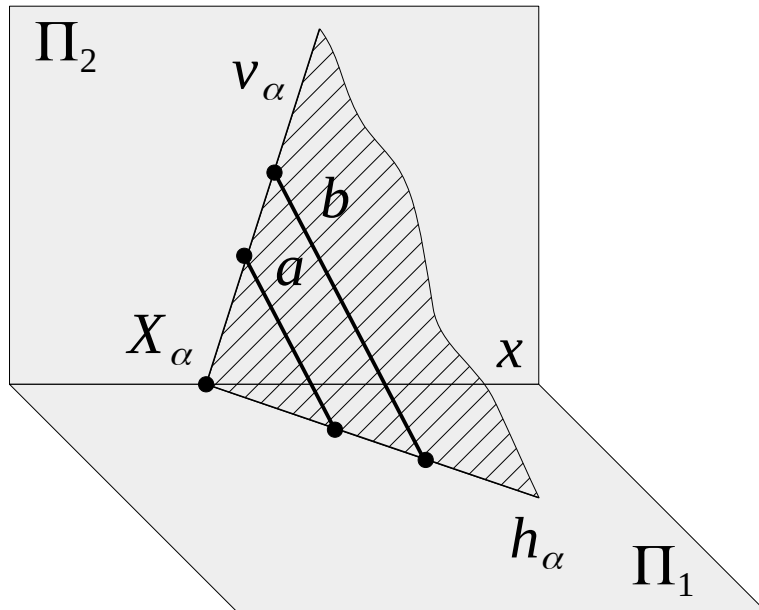
Elementy równoległe

Elementy równoległe:

- prosta równoległa do innej prostej
- prosta równoległa do płaszczyzny
- płaszczyzna równoległa do prostej
- płaszczyzna równoległa do płaszczyzny

Patrz tematy:

- położenie dwóch prostych w przestrzeni – proste równoległe.
- elementy wspólne – prosta na płaszczyźnie,
- elementy wspólne – punkt na prostej.

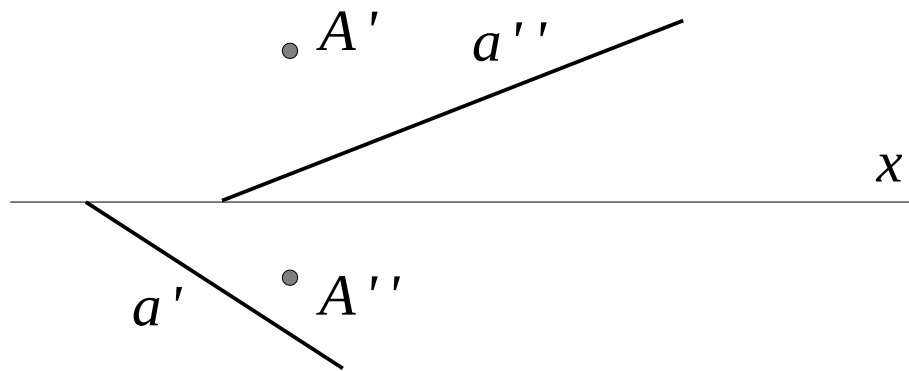


Było już powiedziane, że jeżeli dwie proste są równoległe, to odpowiednie ich rzuty są do siebie równoległe – jest to kluczowa kwestia w tym dziale!

$$b' \parallel a' \quad \text{oraz} \quad b'' \in a''$$

Elementy równoległe

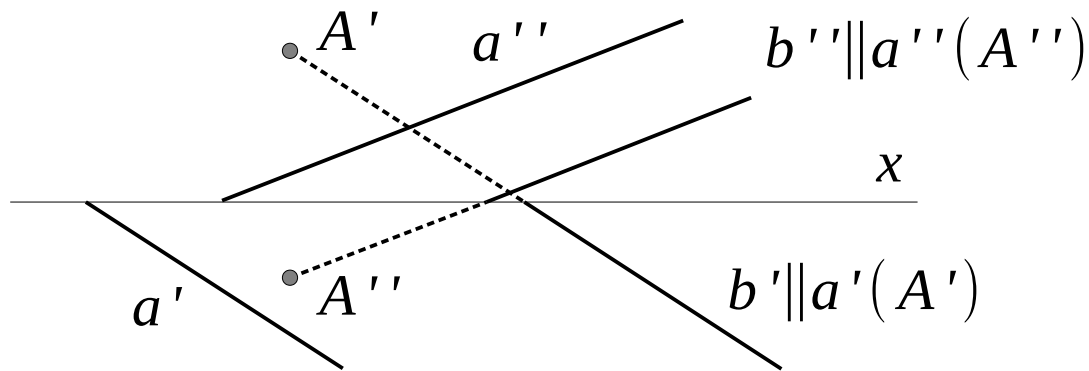
Narysować rzuty prostej b ,
równoległej do prostej a
i przechodzącej przez punkt A .



Elementy równoległe

Narysować rzuty prostej b ,
równoległej do prostej a
i przechodzącej przez punkt A .

Zadanie rozwiązujemy stosując warunki z ramki i pamiętając, że punkt leżący na prostej musi mieć rzuty leżące na odpowiednich rzutach tej prostej.



$$b' \parallel a' \quad \text{oraz} \quad b'' \in a''$$

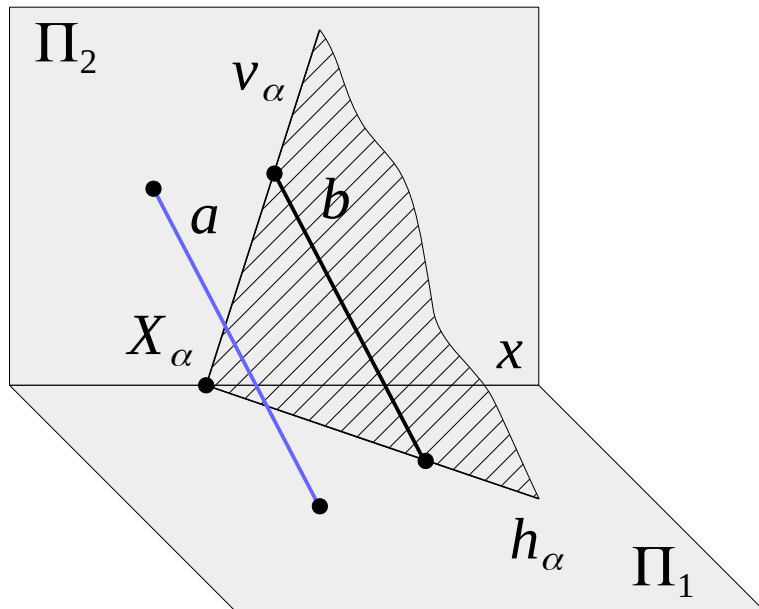
Elementy równoległe

Elementy równoległe:

- prosta równoległa do innej prostej
- prosta równoległa do płaszczyzny
- płaszczyzna równoległa do prostej
- płaszczyzna równoległa do płaszczyzny

Patrz tematy:

- położenie dwóch prostych w przestrzeni – proste równoległe.
- elementy wspólne – prosta na płaszczyźnie,
- elementy wspólne – punkt na prostej.

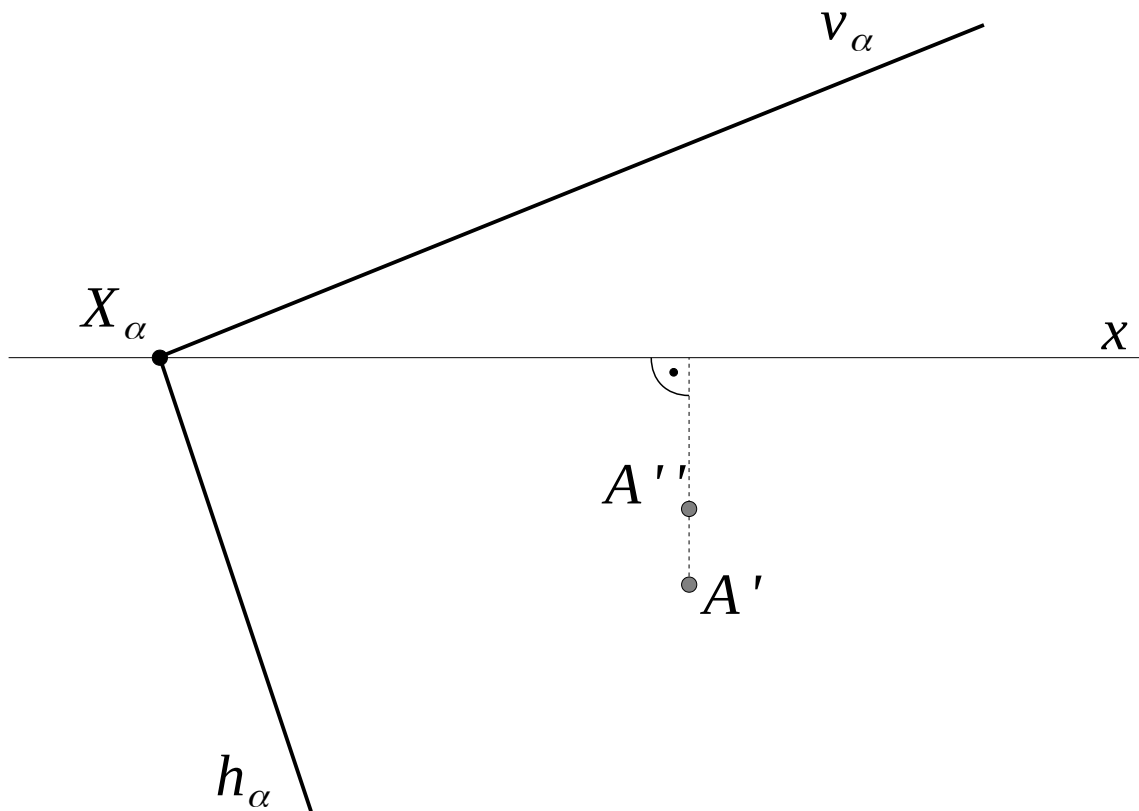


Prosta jest równoległa do płaszczyzny, gdy jest równoległa do jakiejś prostej leżącej na tej płaszczyźnie.

Elementy równoległe

Narysować rzuty prostej a ,
równoległej do płaszczyzny α
i przechodzącej przez punkt A .

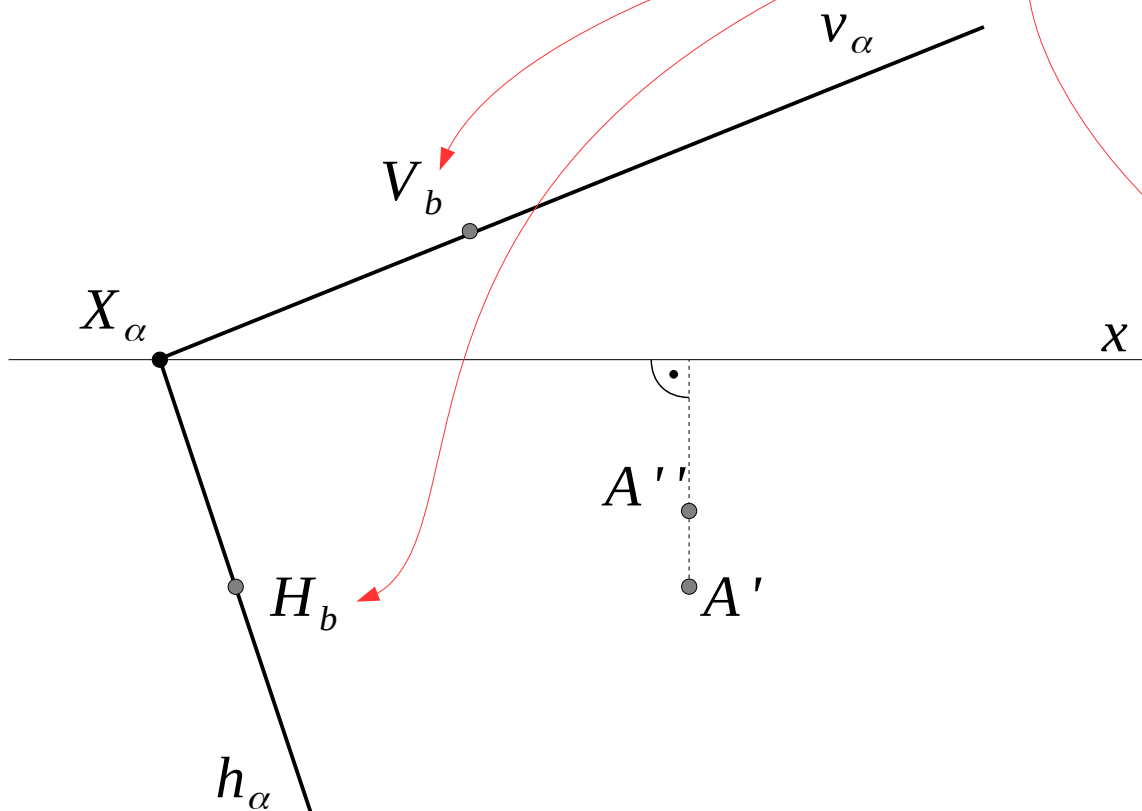
$$\alpha(h_\alpha, v_\alpha)$$



Elementy równoległe

Narysować rzuty prostej a ,
równoległej do płaszczyzny α
i przechodzącej przez punkt A .

$$\alpha(h_\alpha, v_\alpha)$$



Uwaga na oznaczenia prostych!

Możemy odruchowo podpisać prostą
pomocniczą symbolem „a”!

- Rysujemy ślady prostej pomocniczej, tak
aby leżały one na odpowiednich śladach
płaszczyzny.

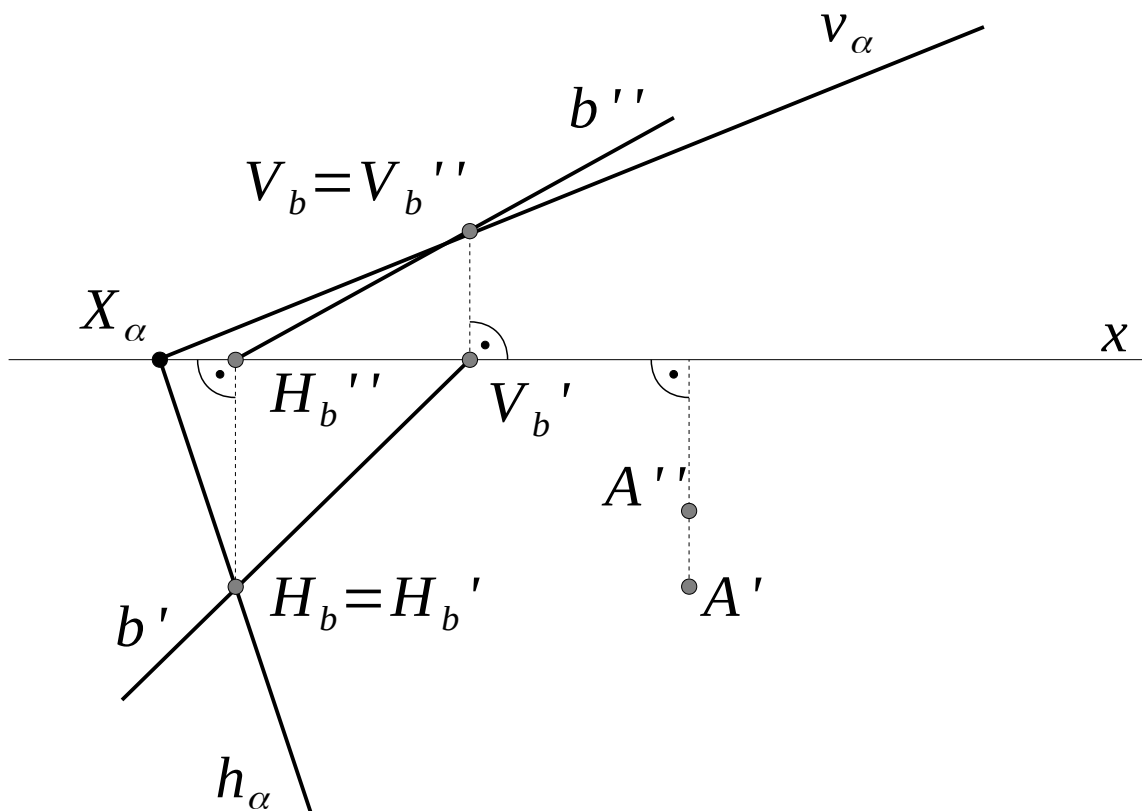
$$\begin{aligned} H_b &\in h_\alpha \\ V_b &\in v_\alpha \end{aligned}$$

UWAGA – etap redukuje się do postaci:
znaleźć rzuty prostej mając jej ślady.

Elementy równoległe

Narysować rzuty prostej a ,
równoległej do płaszczyzny α
i przechodzącej przez punkt A .

$$\alpha(h_\alpha, v_\alpha)$$



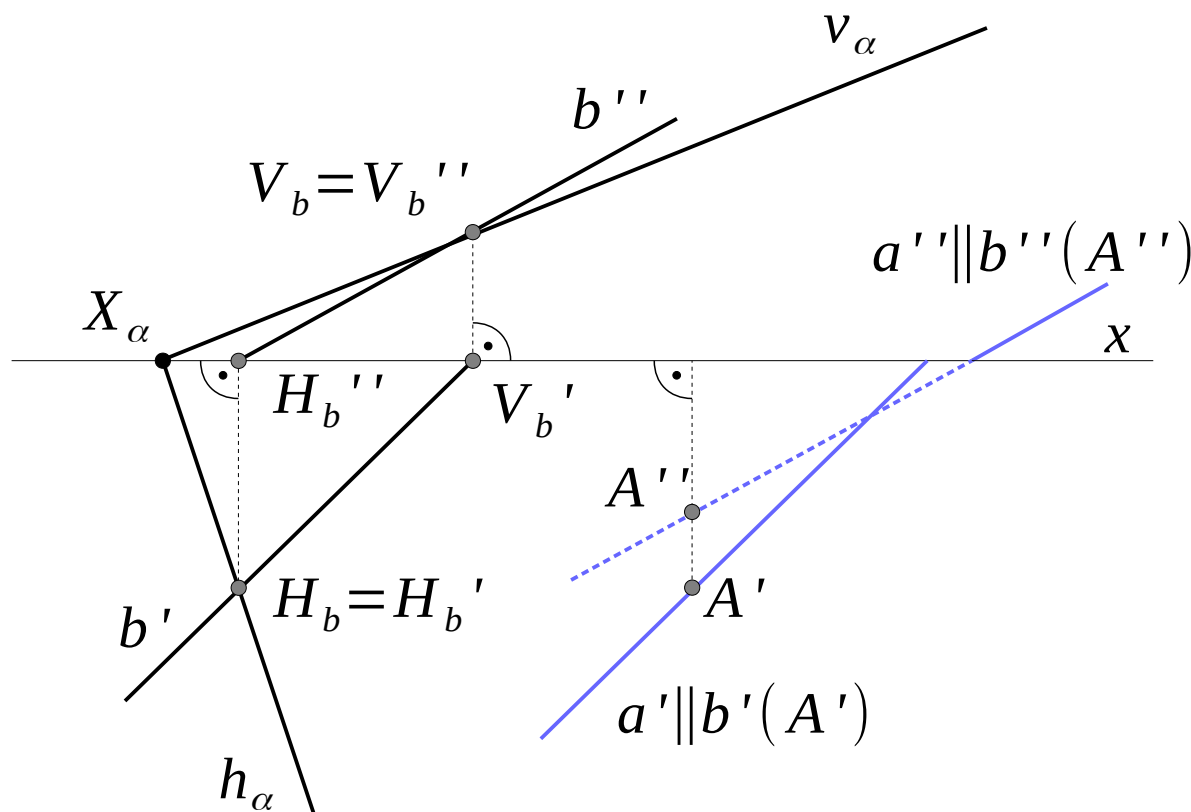
- Wyznaczamy rzuty prostej pomocniczej.

UWAGA – etap redukuje się do postaci:
znaleźć rzuty prostej równoległej do innej
prostej i przechodzącej przez punkt.

Elementy równoległe

Narysować rzuty prostej a ,
równoległej do płaszczyzny α
i przechodzącej przez punkt A .

$$\alpha(h_\alpha, v_\alpha)$$

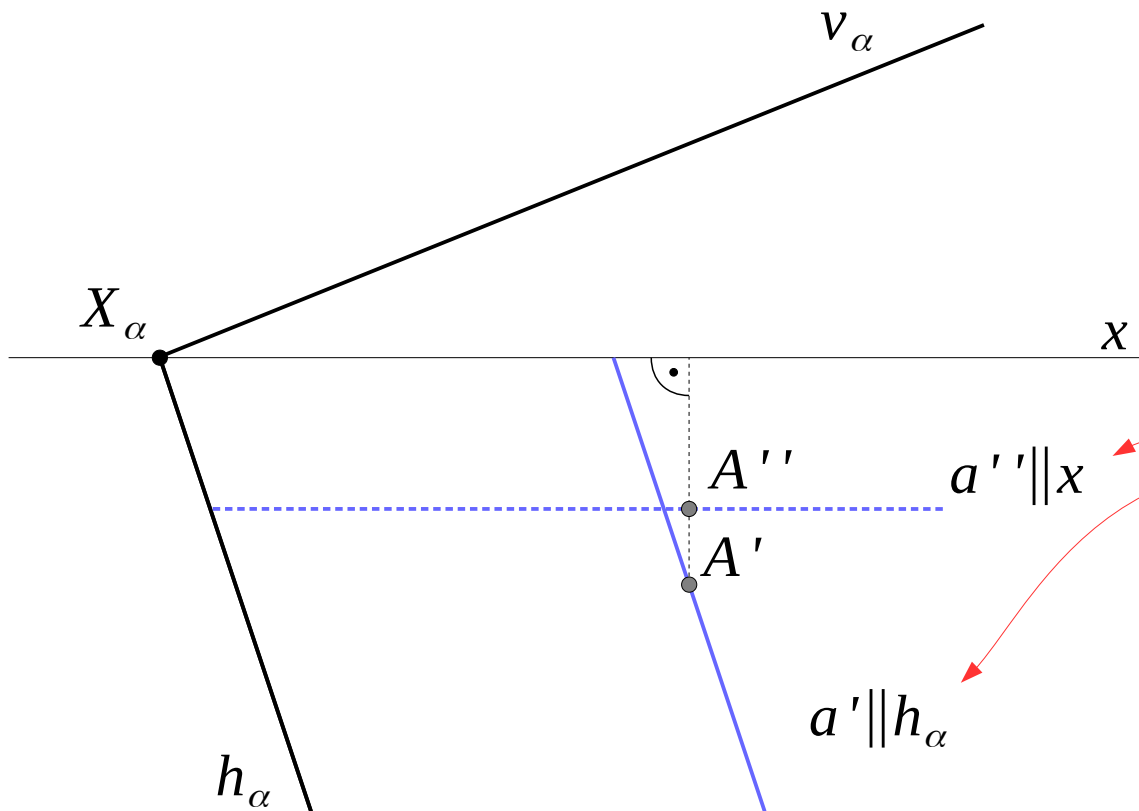


- Rysujemy rzuty prostej szukanej: równoległe do odpowiednich rzutów prostej pomocniczej oraz tak aby przechodziły one przez odpowiednie rzuty punktu.

Elementy równoległe

Narysować rzuty prostej a ,
równoległej do płaszczyzny α
i przechodzącej przez punkt A .

$$\alpha(h_\alpha, v_\alpha)$$



W praktyce bardzo przydatne jest korzystanie z prostych szczególnych – można je rysować od razu!

Przykład z prostą poziomą.



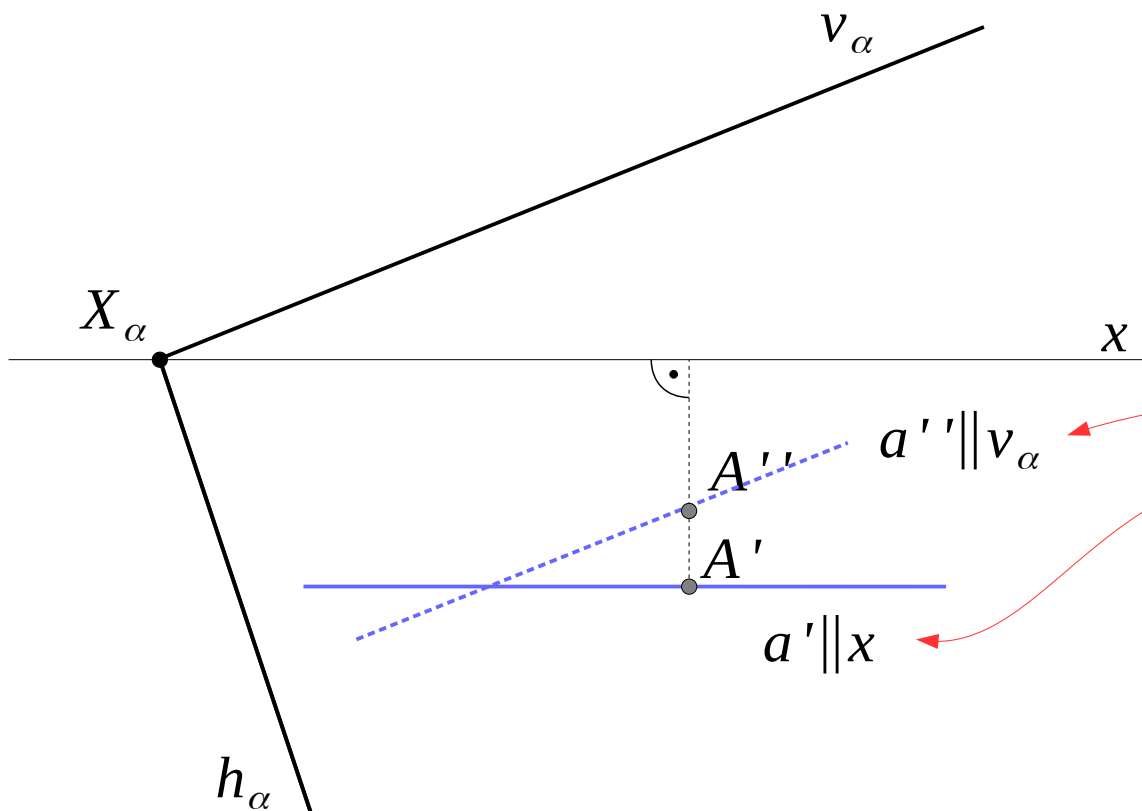
Rzut pionowy każdej prostej poziomej jest
(zawsze, zawsze) równoległy do osi x .

Rzut poziomy każdej prostej poziomej leżącej na
jakiejś płaszczyźnie jest (zawsze, zawsze)
równoległy do śladu poziomego tej płaszczyzny.

Elementy równoległe

Narysować rzuty prostej a ,
równoległej do płaszczyzny α
i przechodzącej przez punkt A .

$$\alpha(h_\alpha, v_\alpha)$$



W praktyce bardzo przydatne jest korzystanie z prostych szczególnych – można je rysować od razu!

Przykład z prostą czołową.

Rzut pionowy każdej prostej czołowej leżącej na jakiejś płaszczyźnie jest (**zawsze, zawsze**) równoległy do śladu pionowego tej płaszczyzny.

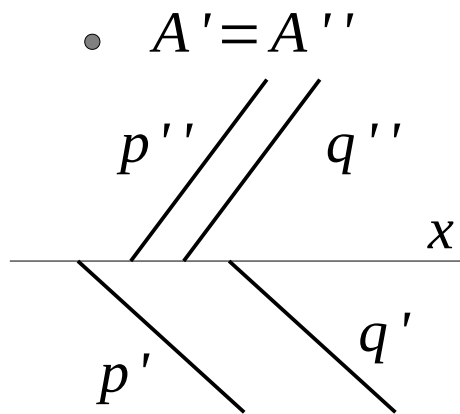
Rzut poziomy każdej prostej czołowej jest (**zawsze, zawsze**) równoległy do osi x .

Elementy równoległe

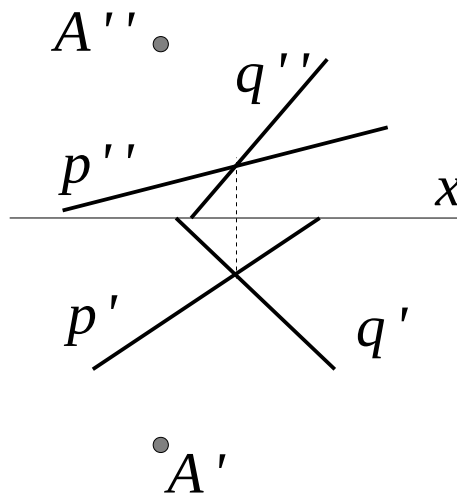
Narysować rzuty prostej a ,
równoległej do płaszczyzny α
i przechodzącej przez punkt A .

Do zastanowienia się:

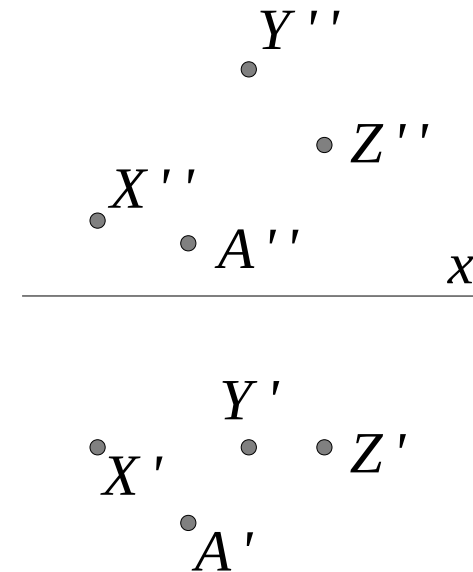
- jak rozwiązać zadanie, jeżeli płaszczyzna określona jest inaczej niż za pomocą śladów?



$\alpha(p \parallel q)$



$\alpha(p \times q)$



$\alpha(X, Y, Z)$

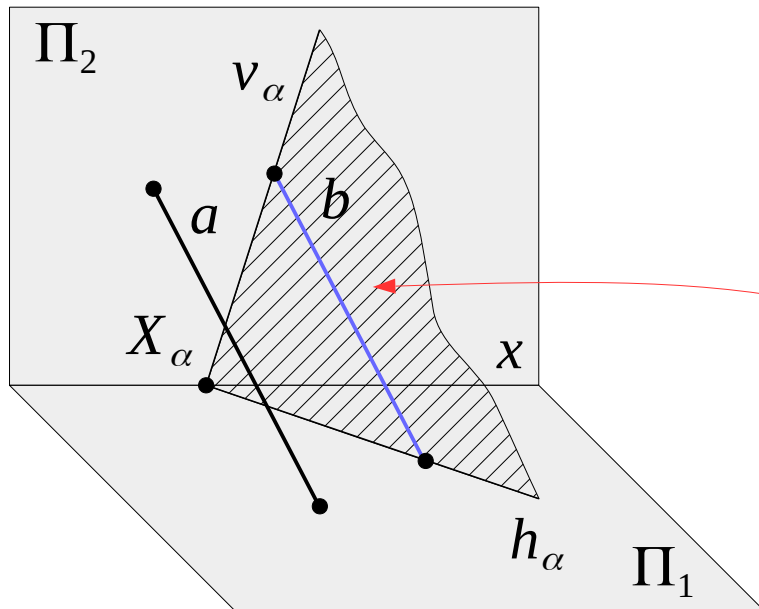
Elementy równoległe

Elementy równoległe:

- prosta równoległa do innej prostej
- prosta równoległa do płaszczyzny
- płaszczyzna równoległa do prostej
- płaszczyzna równoległa do płaszczyzny

Patrz tematy:

- położenie dwóch prostych w przestrzeni – proste równoległe.
- elementy wspólne – prosta na płaszczyźnie,
- elementy wspólne – punkt na prostej.

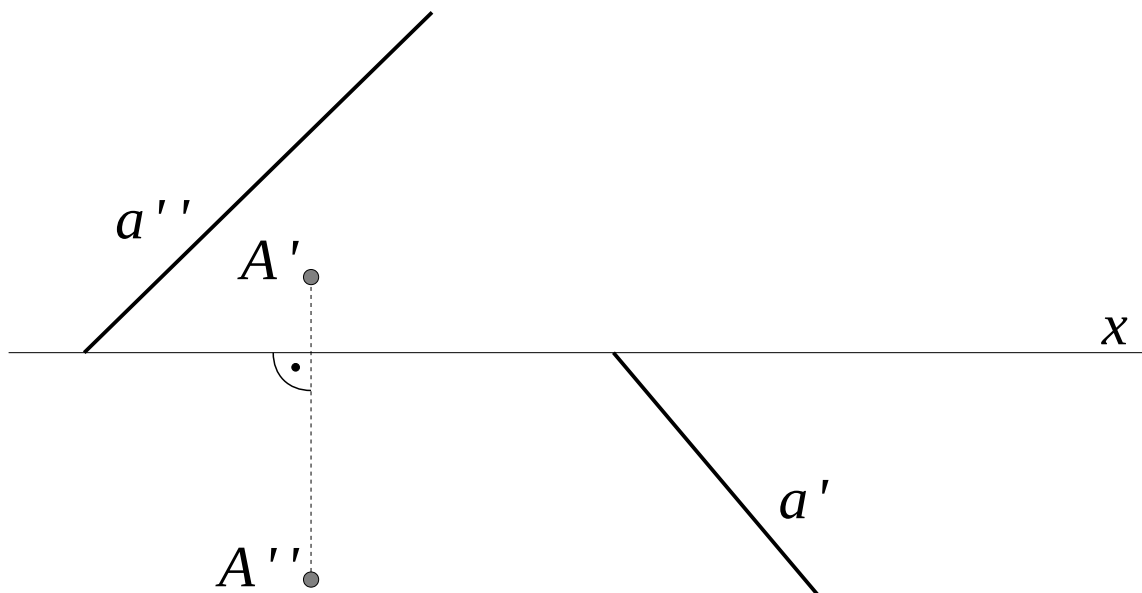


Płaszczyzna jest równoległa do prostej, jeżeli zawiera jakąś prostą do niej równoległą.

Ile jest płaszczyzn równoległych do jakiejś prostej?

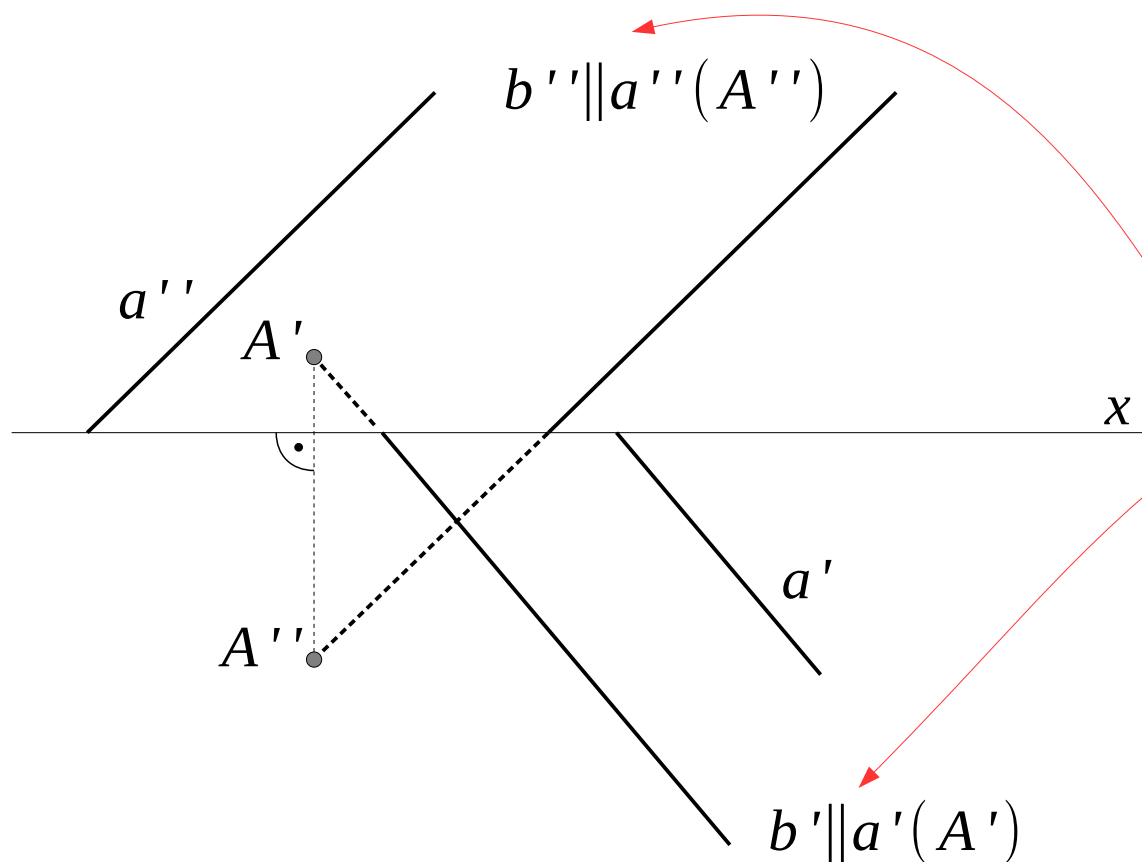
Elementy równoległe

Wyznaczyć ślady płaszczyzny α
równoległej do prostej a
i przechodzącej przez punkt A .



Elementy równoległe

Wyznaczyć ślady płaszczyzny α równoległej do prostej a i przechodzącej przez punkt A .



- Rysujemy prostą pomocniczą równoległą do danej prostej i przechodzącą przez punkt A .

UWAGA – etap redukuje się do postaci: znaleźć ślady prostej mając jej rzuty (wykład 1).

Prosta b równoległa do a i przechodząca przez punkt A .

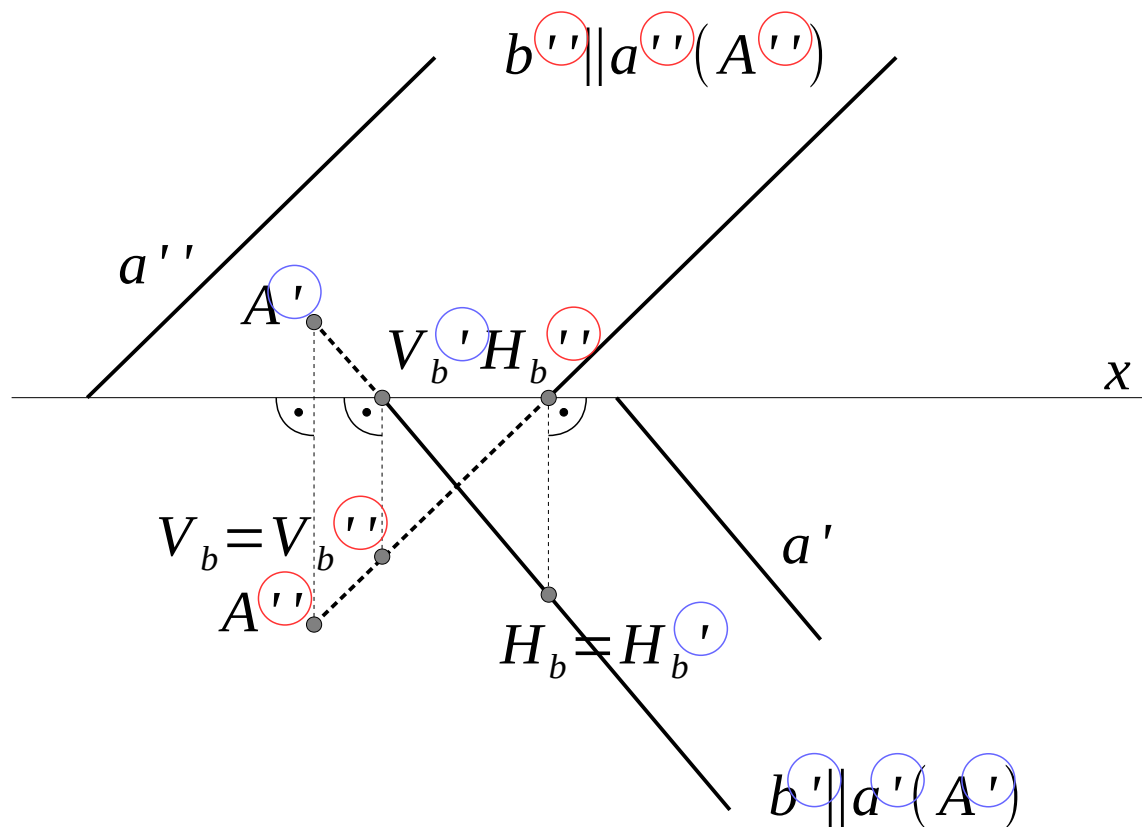
Zwróć uwagę na zgodność rzutów: są albo „primy” albo „biszy”.

Elementy równoległe

Wyznaczyć ślady płaszczyzny α równoległej do prostej a i przechodzącej przez punkt A .

- Wyznaczamy ślady prostej pomocniczej.

UWAGA – etap redukuje się do postaci: narysować dowolną płaszczyznę zawierającą daną prostą.

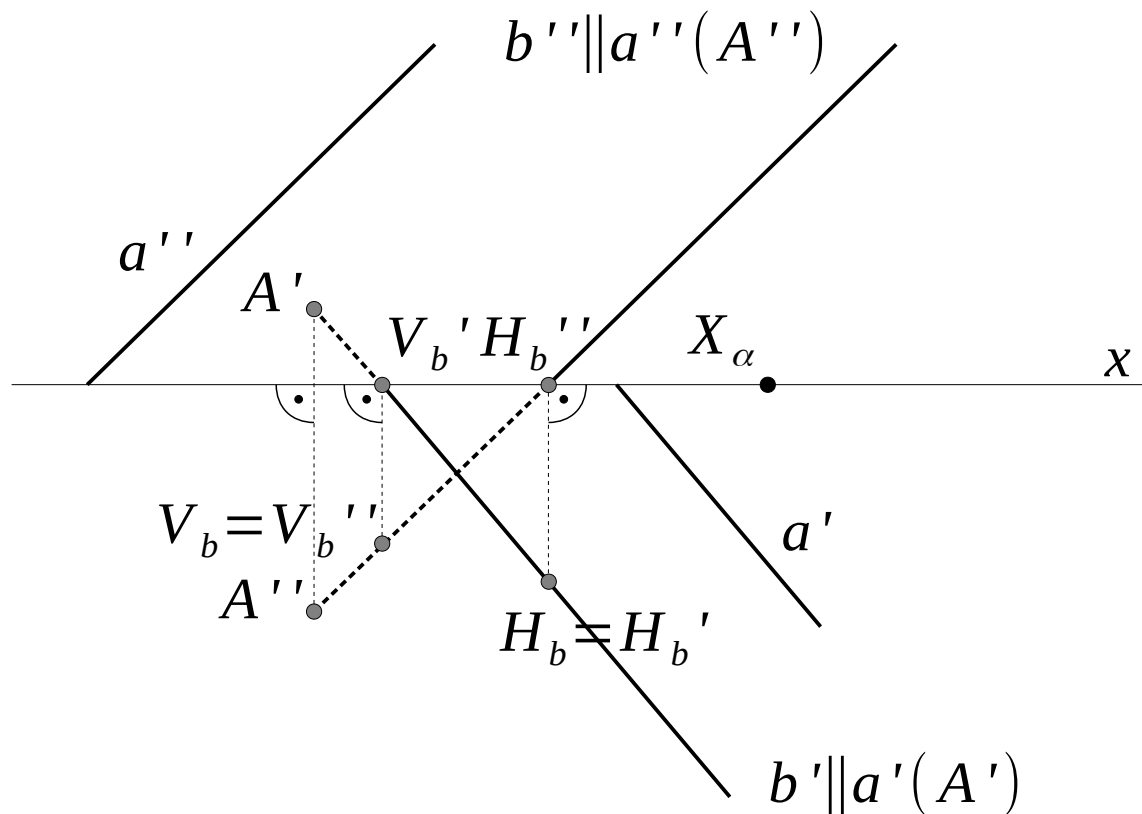


Dobłą metodą sprawdzania poprawności rysunków jest analiza zgodności rzutów: czy „primy” są na „primach”, a „bisy” na „bisach”.

Elementy równoległe

Wyznaczyć ślady płaszczyzny α równoległej do prostej a i przechodzącej przez punkt A .

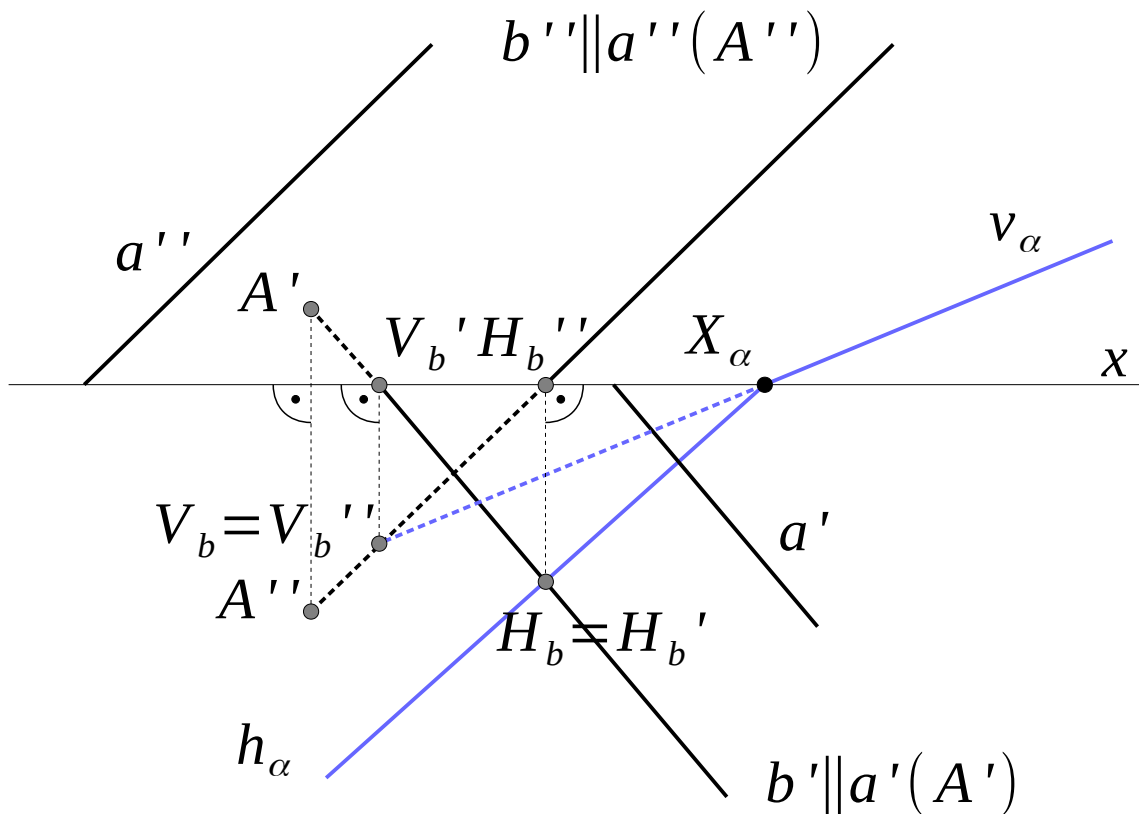
- W dowolnym miejscu na osi x zaznaczamy węzeł płaszczyzny.



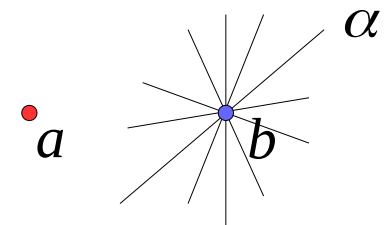
Elementy równoległe

Wyznaczyć ślady płaszczyzny α równoległej do prostej a i przechodzącej przez punkt A .

- Węzeł łączymy ze śladami prostej pomocniczej i uzyskujemy ślady szukanej płaszczyzny.



Nie ma znaczenia gdzie będzie węzeł, gdyż istnieje nieskończenie wiele płaszczyzn (tworzą one tzw. pęk płaszczyzn) równoległych do jakiejś prostej.



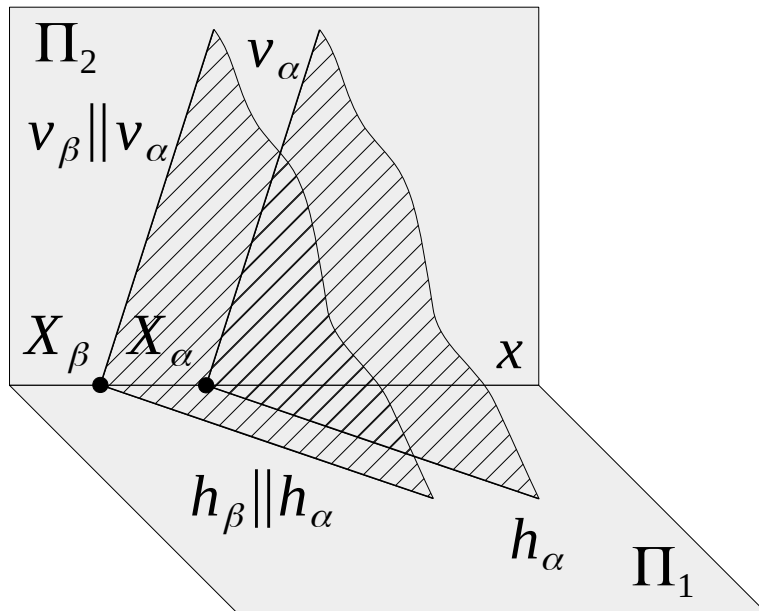
Elementy równoległe

Elementy równoległe:

- prosta równoległa do innej prostej
- prosta równoległa do płaszczyzny
- płaszczyzna równoległa do prostej
- płaszczyzna równoległa do płaszczyzny

Patrz tematy:

- położenie dwóch prostych w przestrzeni – proste równoległe.
- elementy wspólne – prosta na płaszczyźnie,
- elementy wspólne – punkt na prostej.



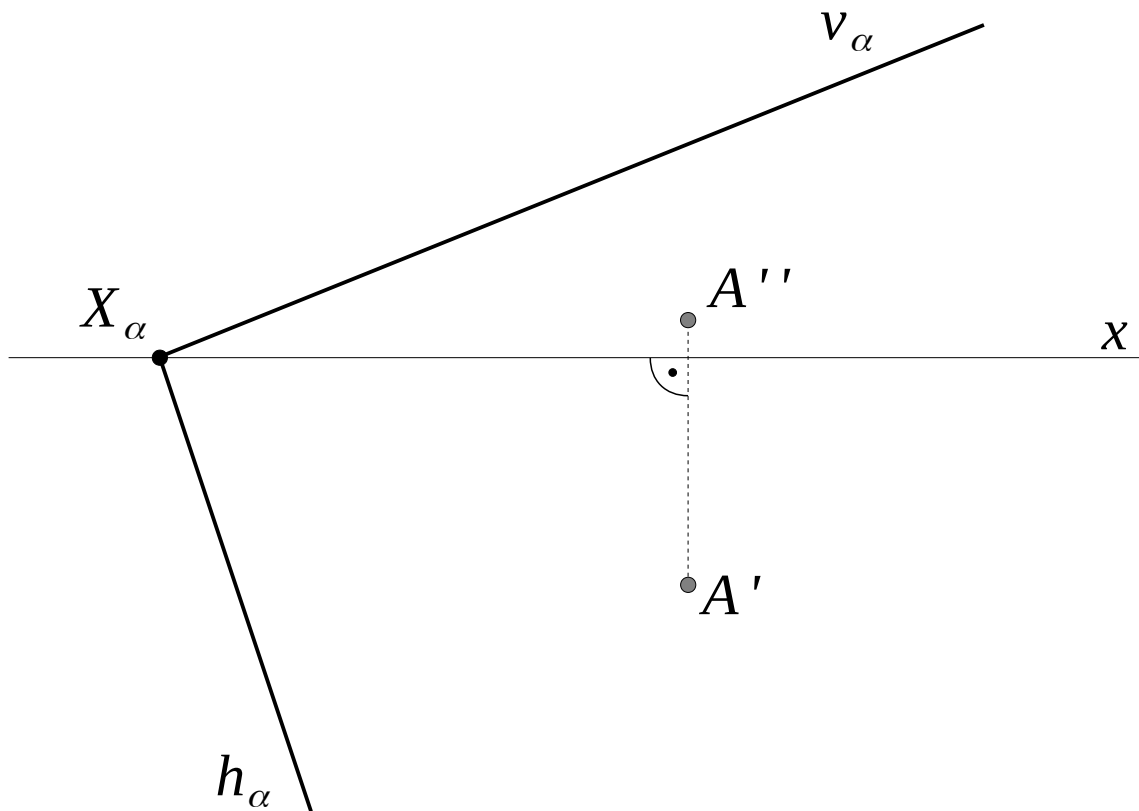
Płaszczyzny są do siebie równoległe, jeżeli odpowiednie ich ślady są do siebie równoległe.

$$h_\beta \parallel h_\alpha$$
$$v_\beta \parallel v_\alpha$$

Elementy równoległe

Narysować ślady płaszczyzny β
równoległej do płaszczyzny α
i przechodzącej przez punkt A.

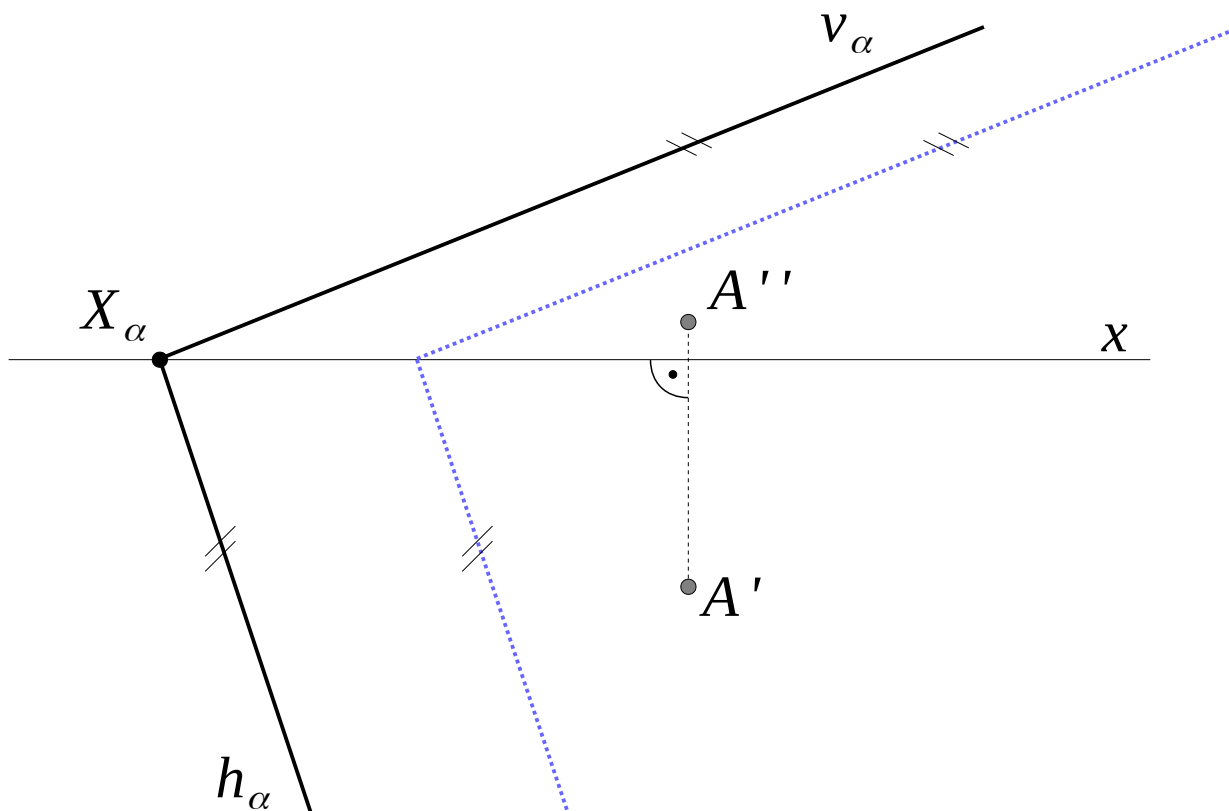
$$\alpha(h_\alpha, v_\alpha)$$



Elementy równoległe

Narysować ślady płaszczyzny β
równoległej do płaszczyzny α
i przechodzącej przez punkt A.

$$\alpha(h_\alpha, v_\alpha)$$



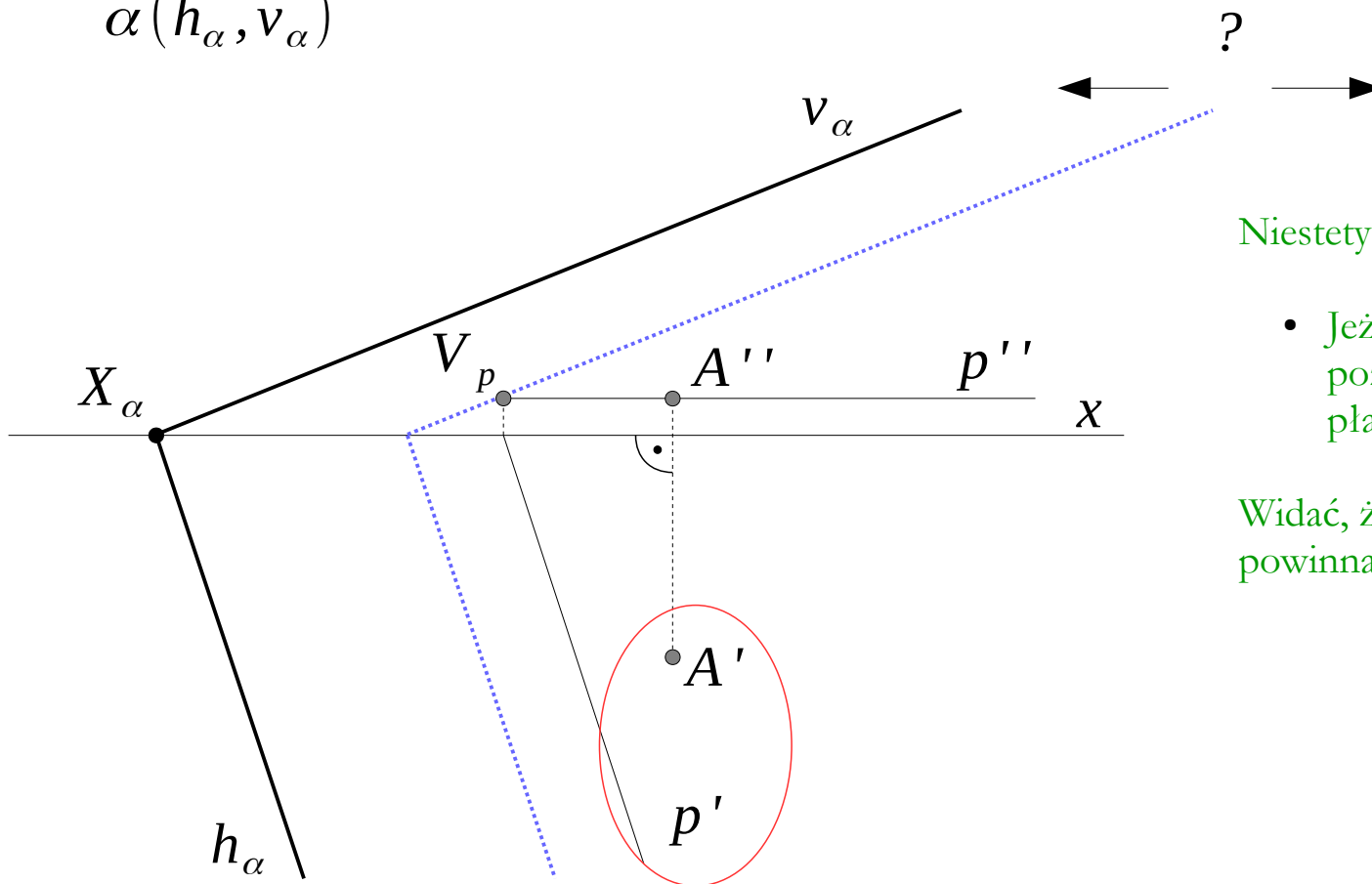
Wiemy, że ślady muszą być równoległe,
tylko gdzie je narysować?

Sprawdźmy, czy punkt leży na płaszczyźnie
– może trafiliśmy w rozwiązanie!

Elementy równoległe

Narysować ślady płaszczyzny β
 równoległej do płaszczyzny α
 i przechodzącej przez punkt A.

$\alpha(h_\alpha, v_\alpha)$



Niestety nie trafiliśmy:

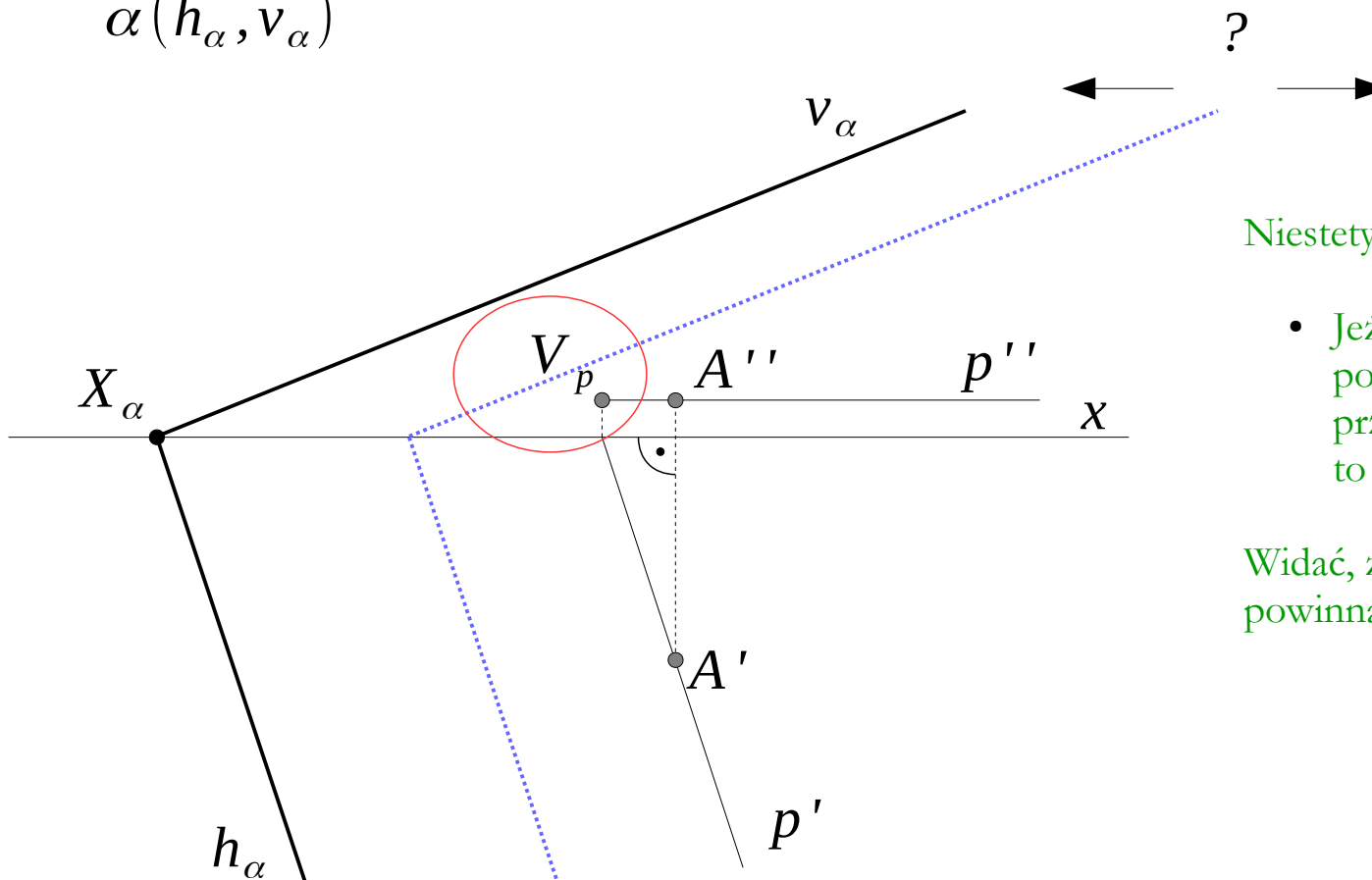
- Jeżeli próbujemy narysować prostą poziomą p , tak aby na pewno leżała na płaszczyźnie, to rzut A' nie leży na p' .

Widać, że aby było dobrze, to płaszczyzna powinna leżeć bardziej w prawo.

Elementy równoległe

Narysować ślady płaszczyzny β
równoległej do płaszczyzny α
i przechodzącej przez punkt A.

$\alpha(h_\alpha, v_\alpha)$



Niestety nie trafiliśmy:

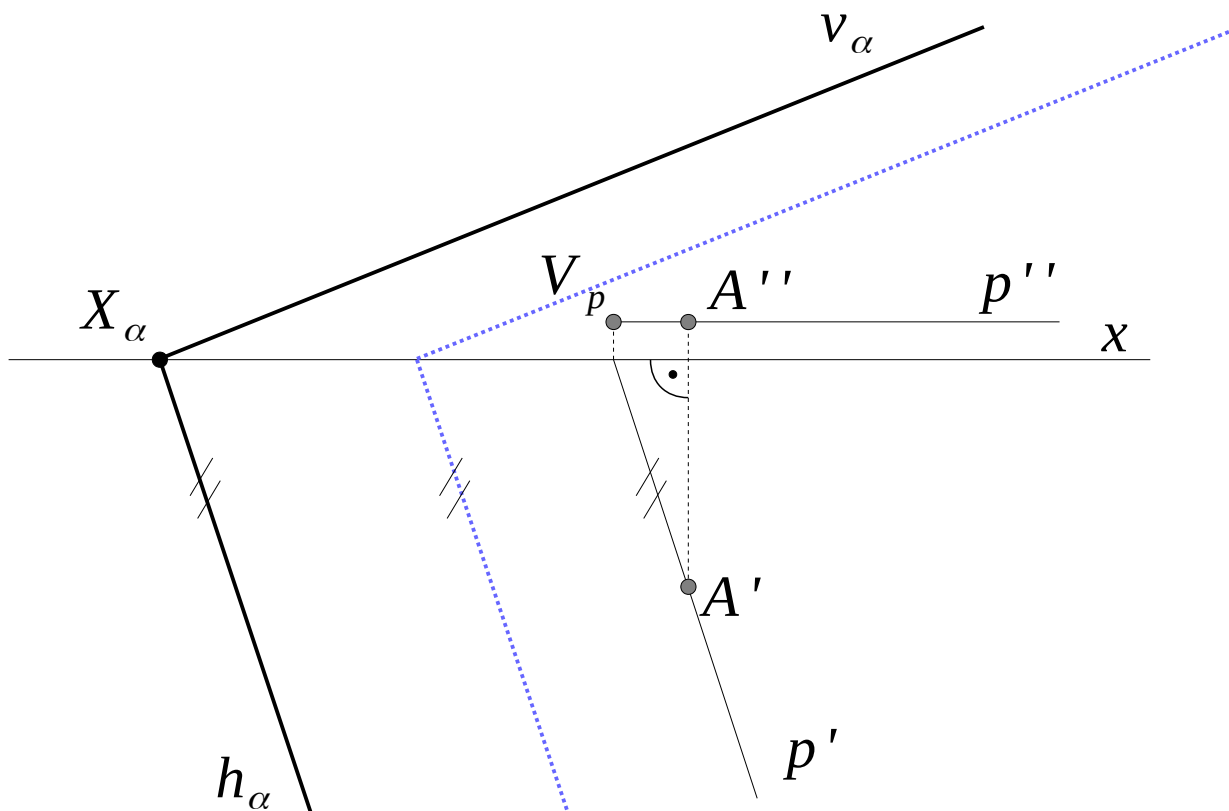
- Jeżeli próbujemy narysować prostą poziomą p , tak aby na pewno przechodziła przez punkt A, to nie leży ona na płaszczyźnie.

Widać, że aby było dobrze, to płaszczyzna powinna leżeć bardziej w prawo.

Elementy równoległe

Narysować ślady płaszczyzny β równoległej do płaszczyzny α i przechodzącej przez punkt A.

$$\alpha(h_\alpha, v_\alpha)$$



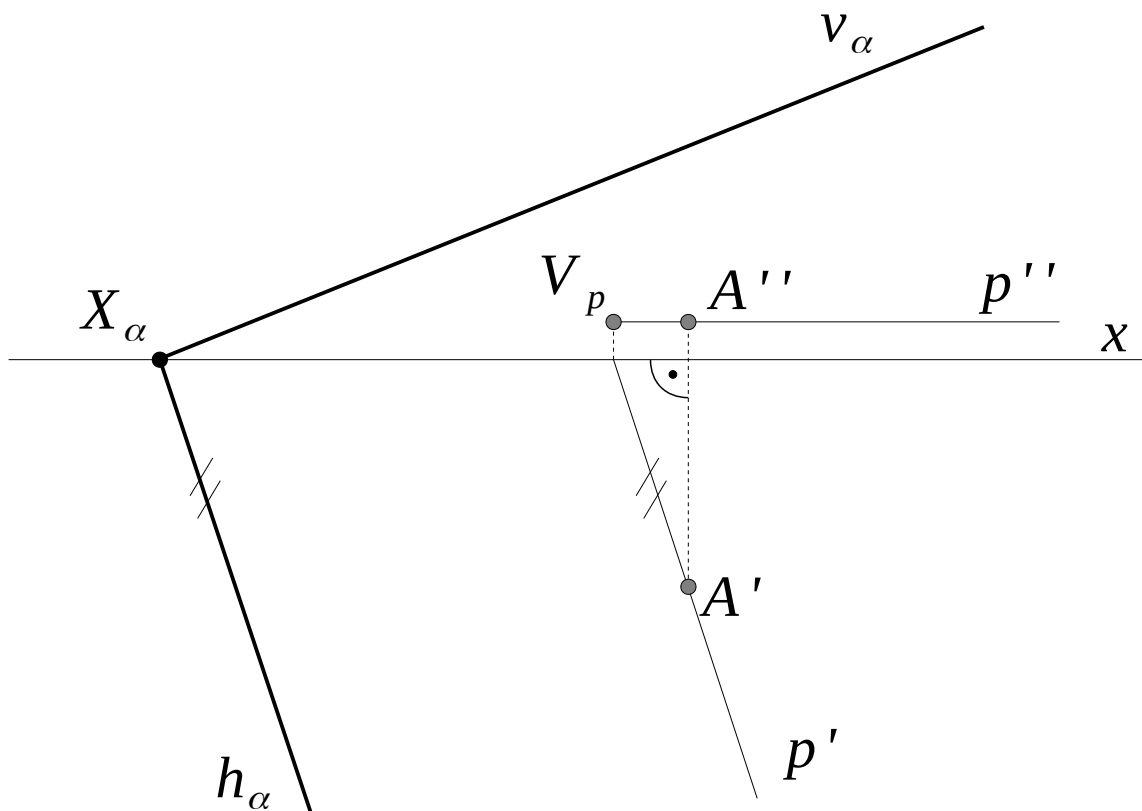
Przypomnijmy sobie slajd z Garfieldem:
można łatwo narysować prostą równoległą
do płaszczyzny i przechodzącą przez jakiś
punkt – popatrzmy na zależności:

- ma być: $p' \parallel h_\beta$
- ale przecież: $h_\beta \parallel h_\alpha$
- czyli: $p' \parallel h_\alpha$

Elementy równoległe

Narysować ślady płaszczyzny β równoległej do płaszczyzny α i przechodzącej przez punkt A.

$$\alpha(h_\alpha, v_\alpha)$$



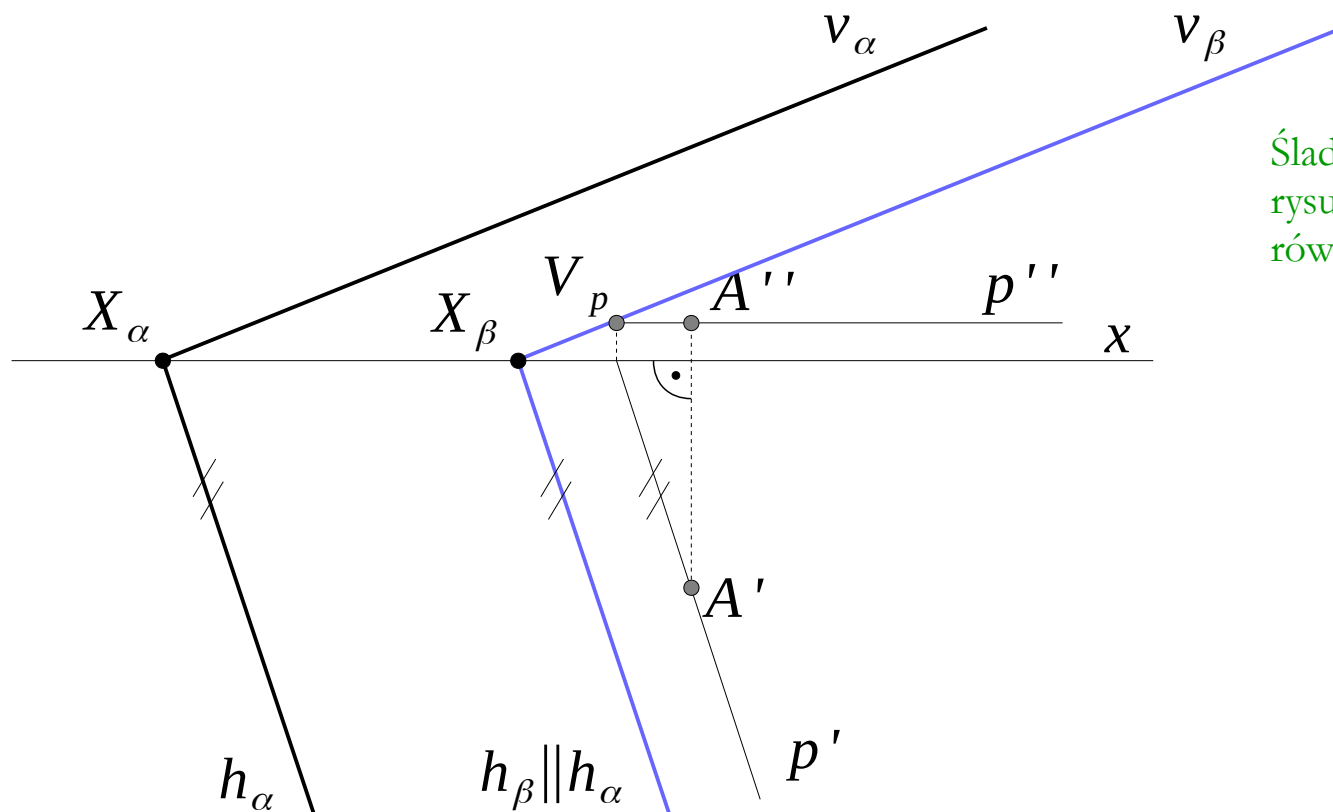
Wykorzystajmy te związki i narysujmy najpierw prostą poziomą tak, aby przechodziła przez punkt.

Później można wyznaczyć ślad tej prostej (nie trzeba go rzutować).

Elementy równoległe

Narysować ślady płaszczyzny β
równoległej do płaszczyzny α
i przechodzącej przez punkt A.

$$\alpha(h_\alpha, v_\alpha)$$



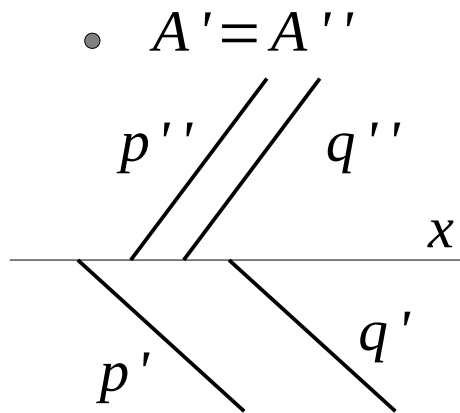
Ślad poziomy szukanej płaszczyzny
rysujemy z jej węzła, pamiętając o warunku
równoległości płaszczyzn.

Elementy równoległe

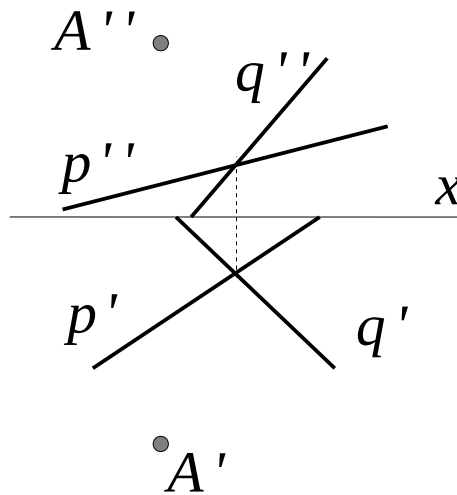
Narysować ślady płaszczyzny β równoległej do płaszczyzny α i przechodzącej przez punkt A.

Do zastanowienia się:

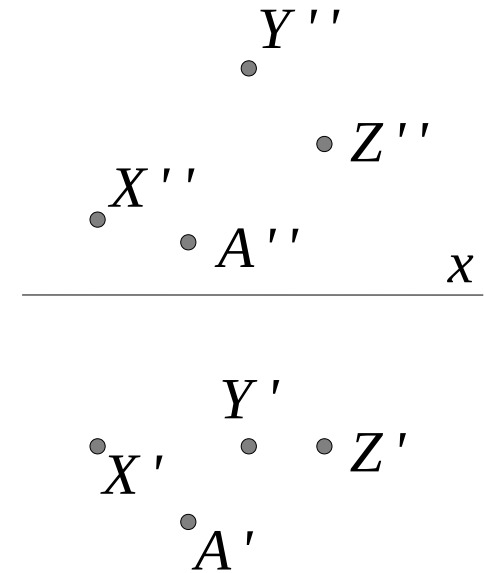
- jak rozwiązać zadanie, jeżeli płaszczyzna określona jest inaczej niż za pomocą śladów?



$\alpha(p \parallel q)$



$\alpha(p \times q)$



$\alpha(X, Y, Z)$

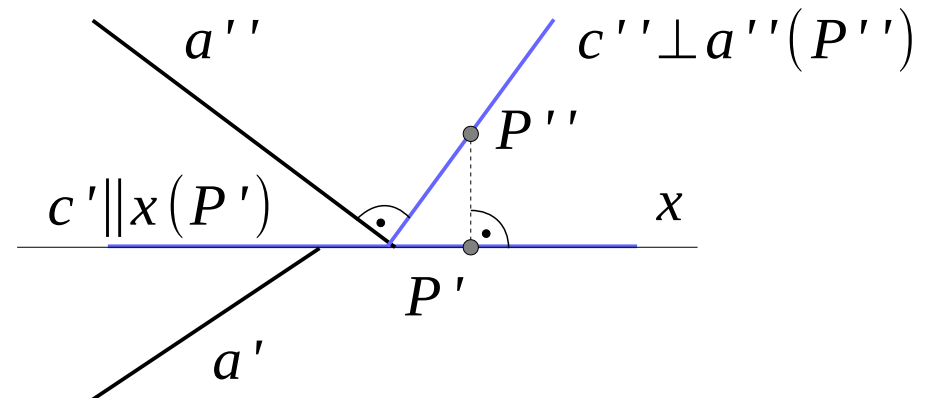
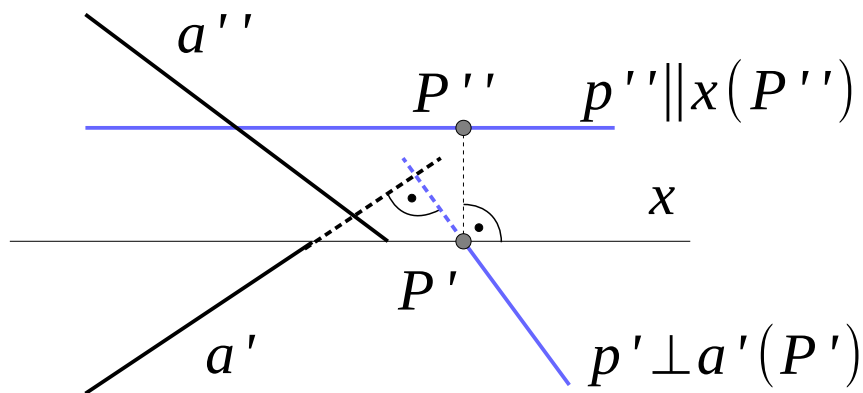
Elementy prostopadłe

Elementy prostopadłe:

- prosta prostopadła do innej prostej
- prosta prostopadła do płaszczyzny
- płaszczyzna prostopadła do prostej
- płaszczyzna prostopadła do płaszczyzny

Patrz tematy:

- położenie dwóch prostych w przestrzeni – proste prostopadłe.
- elementy wspólne – prosta na płaszczyźnie,
- elementy wspólne – punkt na prostej.



Zagadnienie prostych prostopadłych omówione zostało w temacie „położenie prostych w przestrzeni” (wykład 2).

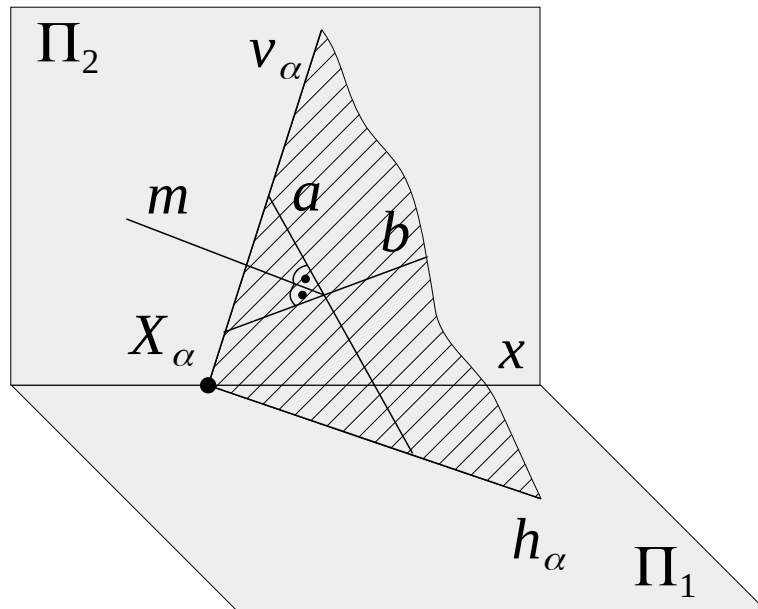
Elementy prostopadłe

Elementy prostopadłe:

- prosta prostopadła do innej prostej
- prosta prostopadła do płaszczyzny
- płaszczyzna prostopadła do prostej
- płaszczyzna prostopadła do płaszczyzny

Patrz tematy:

- położenie dwóch prostych w przestrzeni – proste prostopadłe.
- elementy wspólne – prosta na płaszczyźnie,
- elementy wspólne – punkt na prostej.

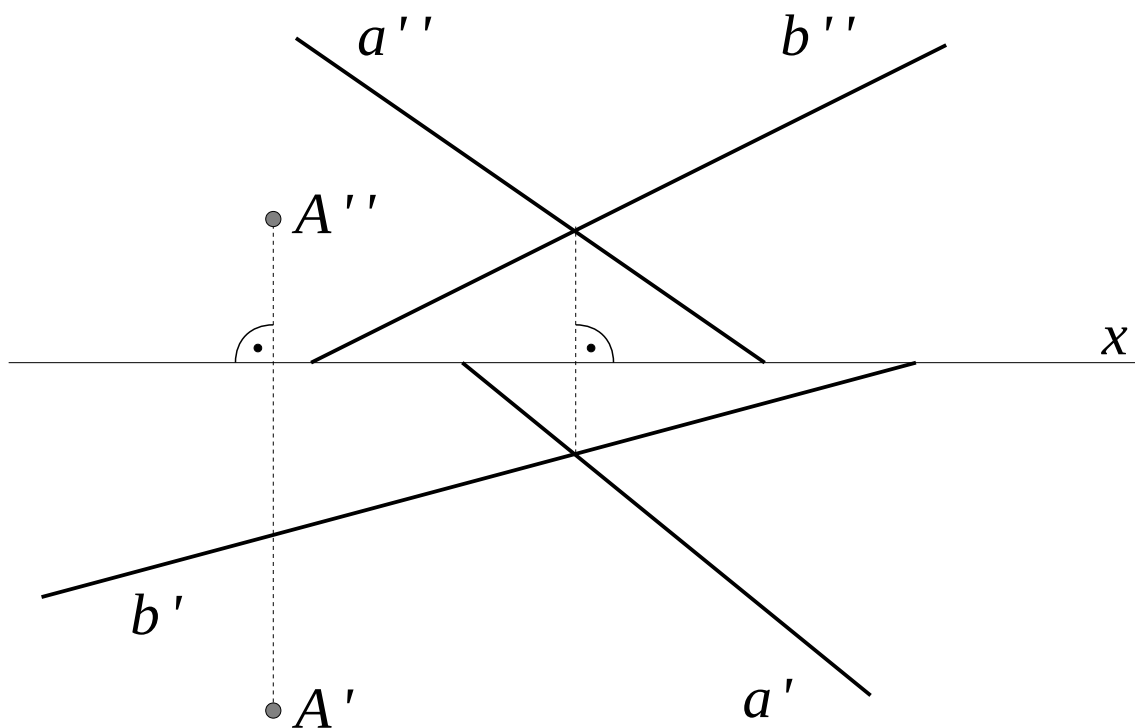


Prosta jest prostopadła do płaszczyzny, gdy jest prostopadła do dwóch nierównoległych prostych leżących na tej płaszczyźnie.

Elementy prostopadłe

Narysować rzuty prostej m ,
prostopadłej do płaszczyzny α
i przechodzącej przez punkt A .

$\alpha(a \times b)$



Co należy zrobić:

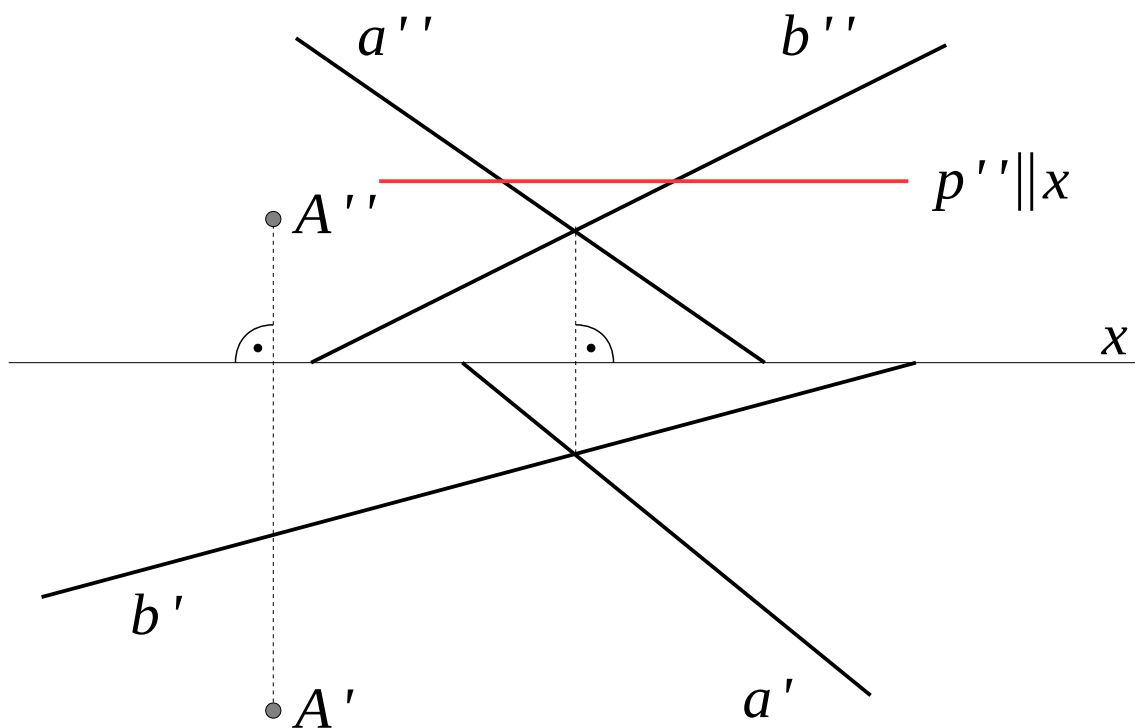
- płaszczyznę określoną prostymi a i b należy wyrazić za pomocą dwóch innych prostych, z których jedna będzie prostą poziomą, a druga prostą czołową.

UWAGA – etap redukuje się do postaci:
narysować na płaszczyźnie dowolną prostą
poziomą oraz dowolną prostą czołową.

Elementy prostopadłe

Narysować rzuty prostej m ,
prostopadłej do płaszczyzny α
i przechodzącej przez punkt A .

$\alpha(a \times b)$



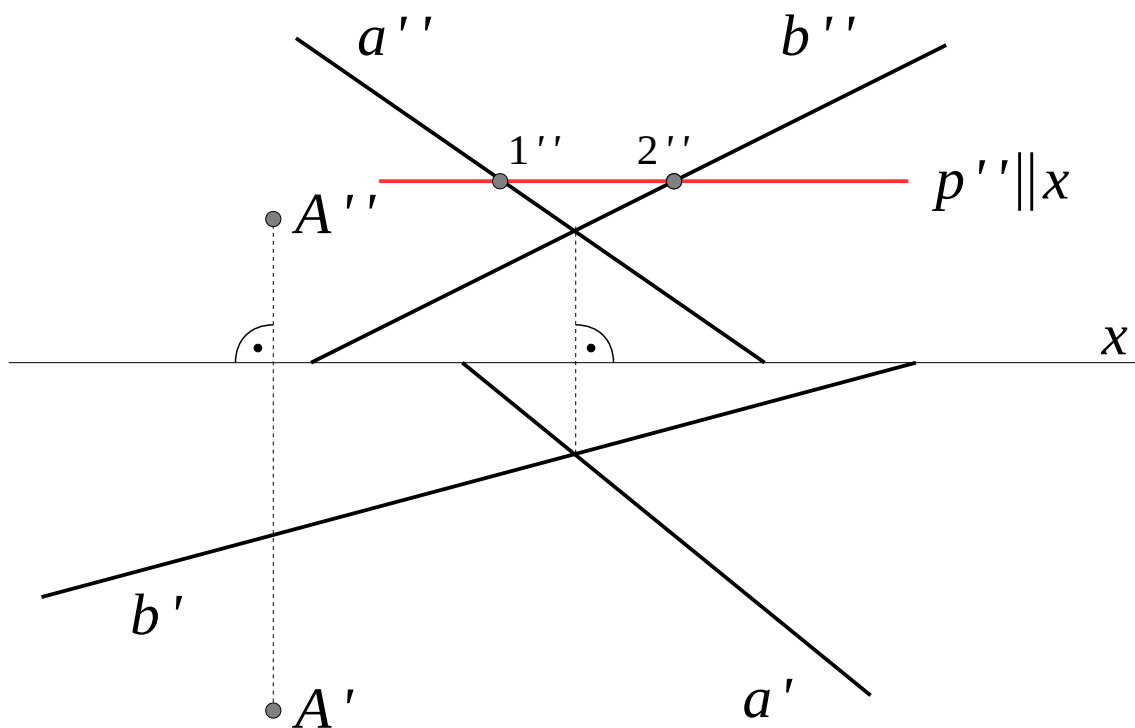
Rysujemy prostą poziomą:

- w dowolnym miejscu rysujemy rzut pionowy prostej poziomej.

Elementy prostopadłe

Narysować rzuty prostej m ,
prostopadłej do płaszczyzny α
i przechodzącej przez punkt A .

$\alpha(a \times b)$



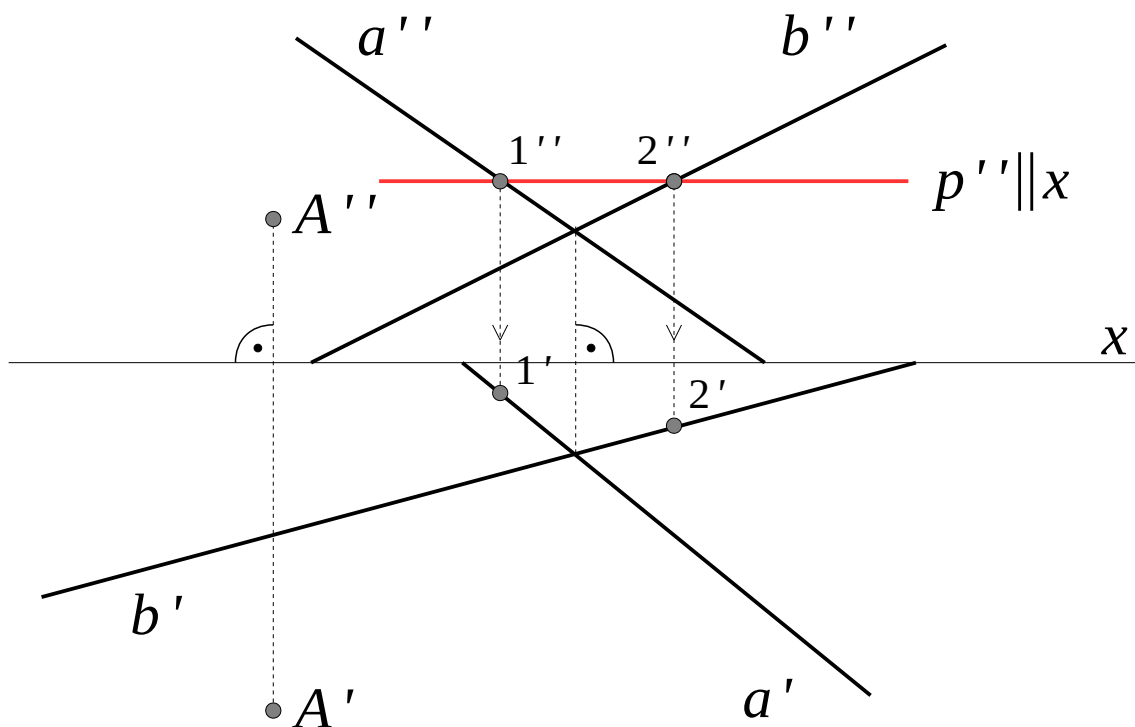
Rysujemy prostą poziomą:

- zaznaczamy punkty przecięcia tego rzutu z pionowymi rzutami prostych tworzących płaszczyznę – tu są to punkty 1 i 2.

Elementy prostopadłe

Narysować rzuty prostej m ,
prostopadłej do płaszczyzny α
i przechodzącej przez punkt A .

$\alpha(a \times b)$



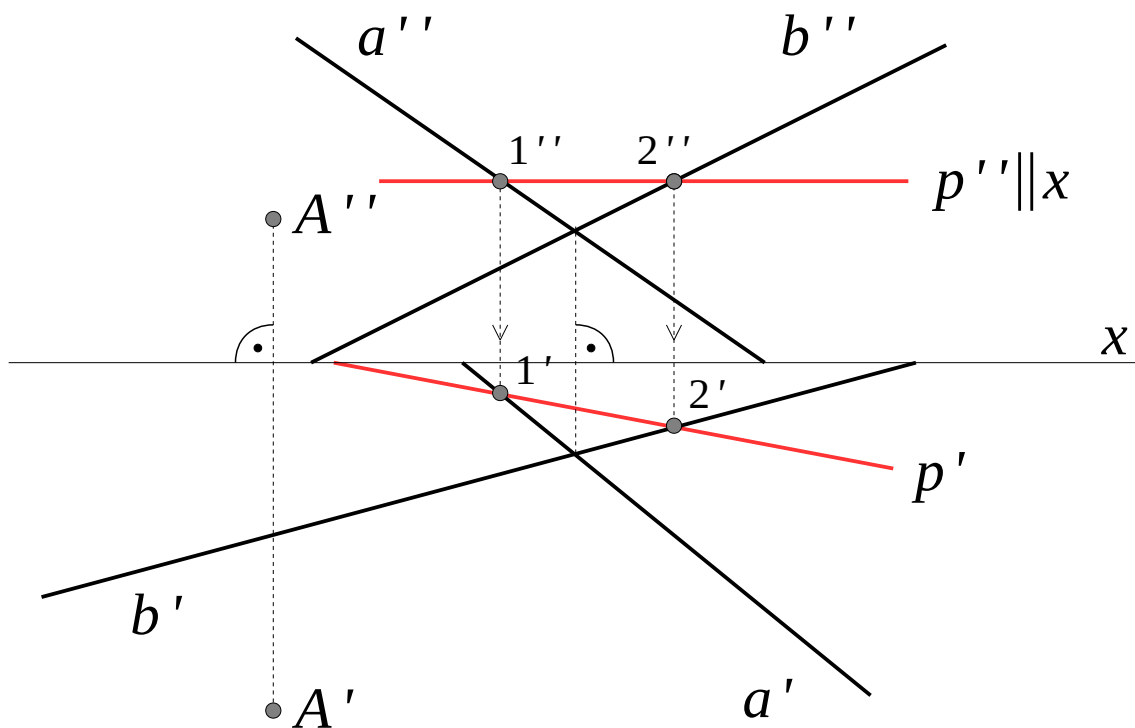
Rysujemy prostą poziomą:

- wyznaczamy rzuty poziome punktów pomocniczych 1 i 2 wiedząc, że leżą one na prostych a i b .

Elementy prostopadłe

Narysować rzuty prostej m ,
prostopadłej do płaszczyzny α
i przechodzącej przez punkt A .

$\alpha(a \times b)$



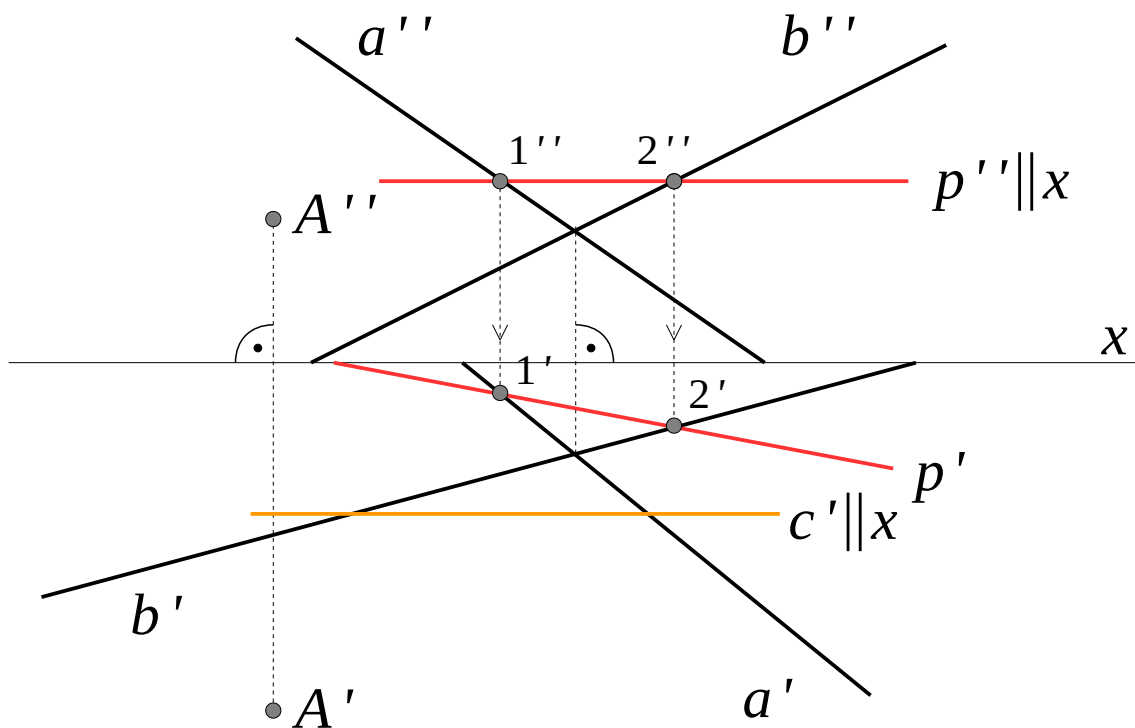
Rysujemy prostą poziomą:

- łączymy rzuty poziome punktów pomocniczych 1 i 2 – uzyskujemy rzut poziomy prostej poziomej.

Elementy prostopadłe

Narysować rzuty prostej m ,
prostopadłej do płaszczyzny α
i przechodzącej przez punkt A .

$\alpha(a \times b)$



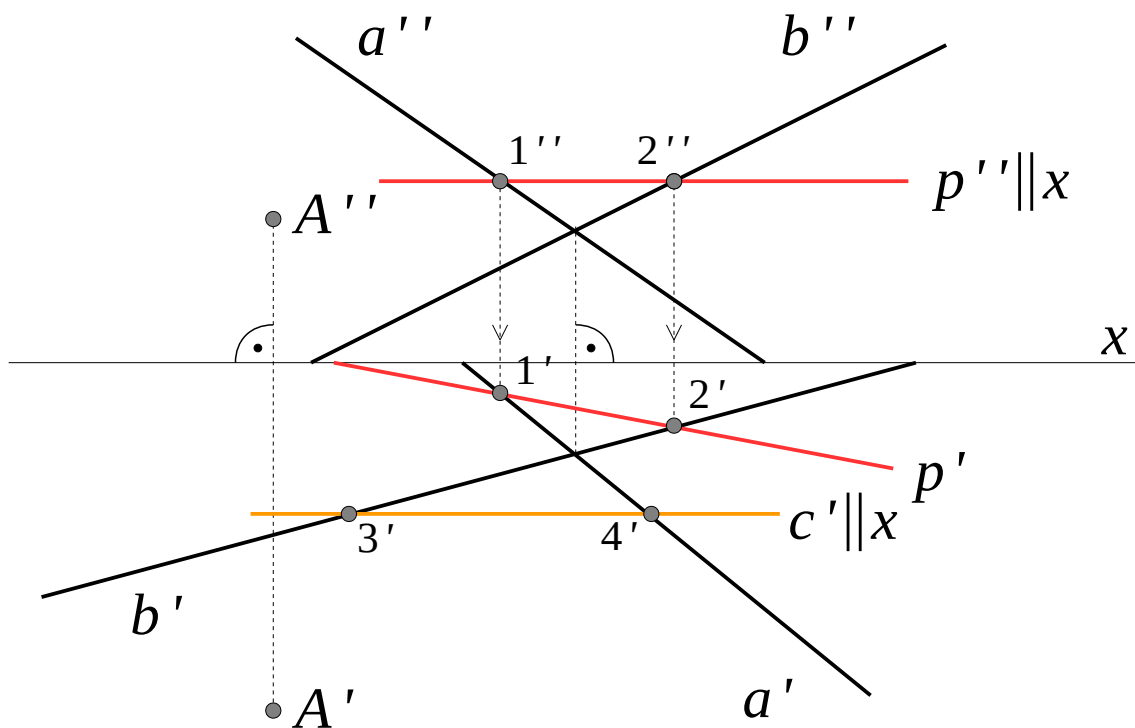
Rysujemy prostą czołową:

- w dowolnym miejscu rysujemy rzut poziomy prostej czołowej.

Elementy prostopadłe

Narysować rzuty prostej m ,
prostopadłej do płaszczyzny α
i przechodzącej przez punkt A .

$\alpha(a \times b)$



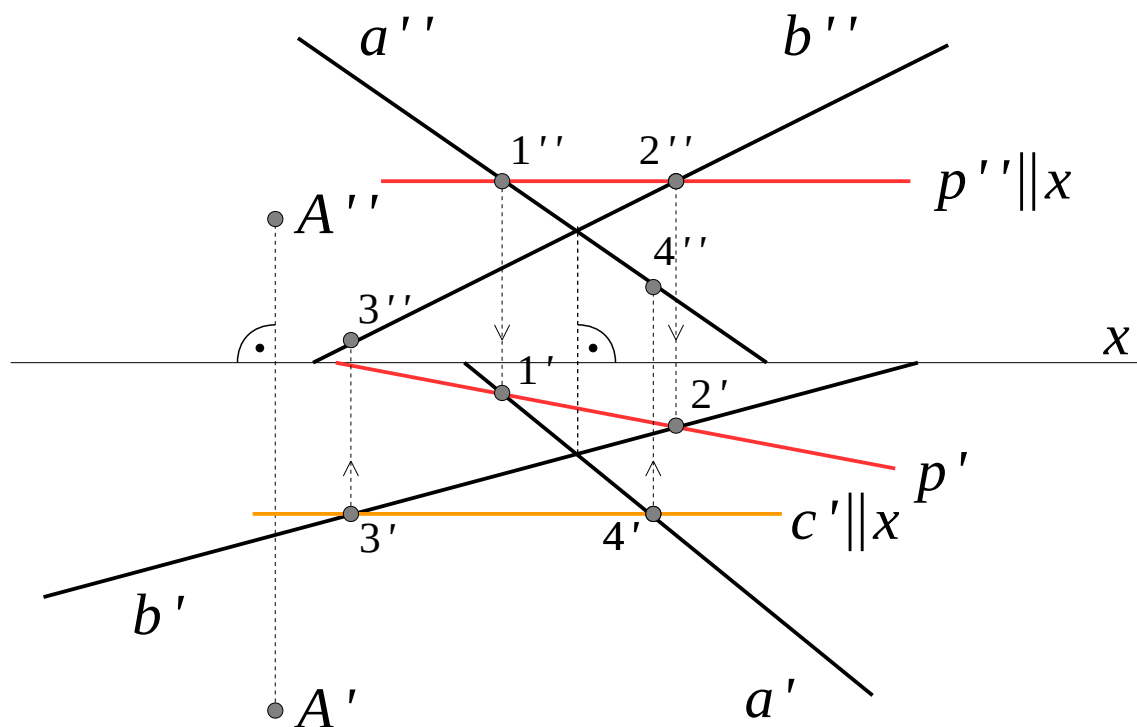
Rysujemy prostą czołową:

- zaznaczamy punkty przecięcia tego rzutu z poziomymi rzutami prostych tworzących płaszczyznę – tu są to punkty 3 i 4.

Elementy prostopadłe

Narysować rzuty prostej m ,
prostopadłej do płaszczyzny α
i przechodzącej przez punkt A .

$\alpha(a \times b)$



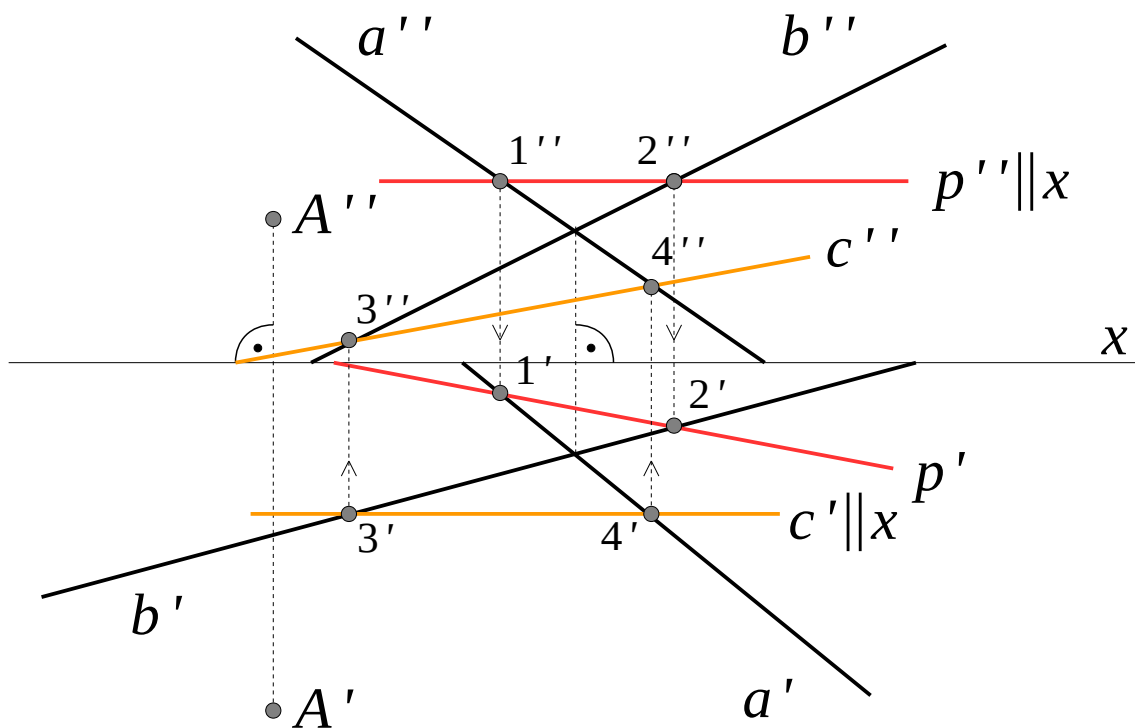
Rysujemy prostą czołową:

- wyznaczamy rzuty pionowe punktów pomocniczych 3 i 4 wiedząc, że leżą one na prostych a i b .

Elementy prostopadłe

Narysować rzuty prostej m ,
prostopadłej do płaszczyzny α
i przechodzącej przez punkt A .

$\alpha(a \times b)$



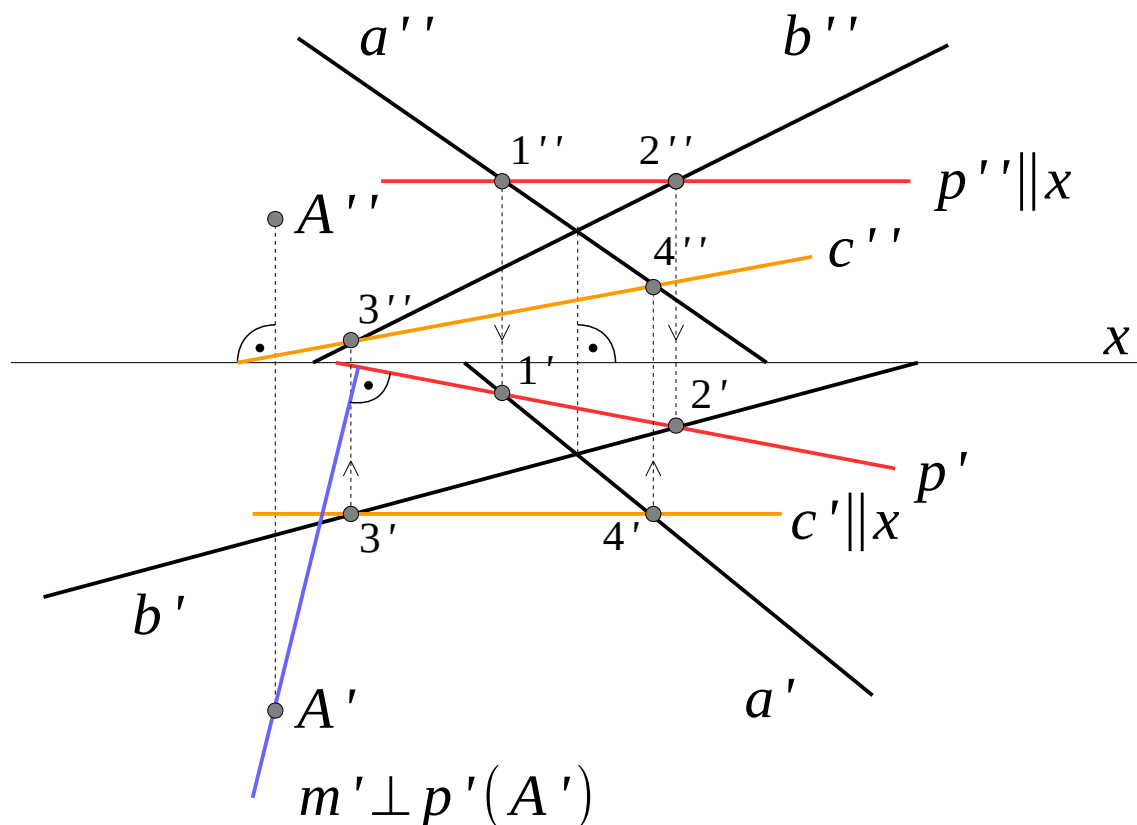
Rysujemy prostą czołową:

- łączymy rzuty pionowe punktów pomocniczych 3 i 4 – uzyskujemy rzut pionowy prostej czołowej.

Elementy prostopadłe

Narysować rzuty prostej m ,
prostopadłej do płaszczyzny α
i przechodzącej przez punkt A .

$\alpha(a \times b)$



UWAGA: tu wykorzystamy zagadnie prostej
poziomej lub prostej czołowej równoległej
do innej prostej, ale konstrukcję wykonamy
w odwrotnej kolejności.

Rysujemy prostą m :

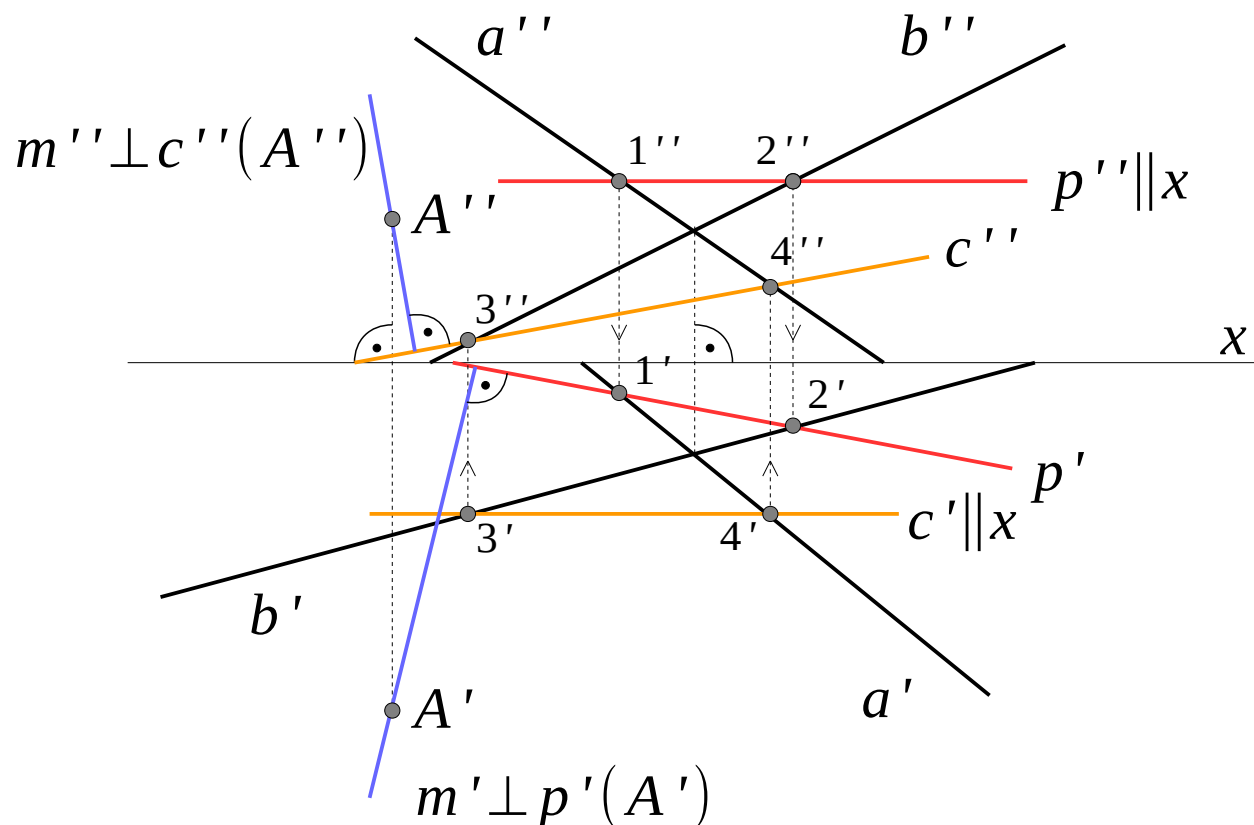
- rysujemy – przez rzut poziomy punktu A – poziomy rzut szukanej prostej (m), prostopadłe do rzutu poziomego prostej poziomej (p).

Elementy prostopadłe

Narysować rzuty prostej m ,
prostopadłej do płaszczyzny α
i przechodzącej przez punkt A .

$\alpha(a \times b)$

UWAGA: tu wykorzystamy zagadnie prostej
poziomej lub prostej czołowej równoległej
do innej prostej, ale konstrukcję wykonamy
w odwrotnej kolejności.



Rysujemy prostą m :

- rysujemy – przez rzut pionowy punktu A – pionowy rzut szukanej prostej (m), prostopadłe do rzutu pionowego prostej czołowej (c).

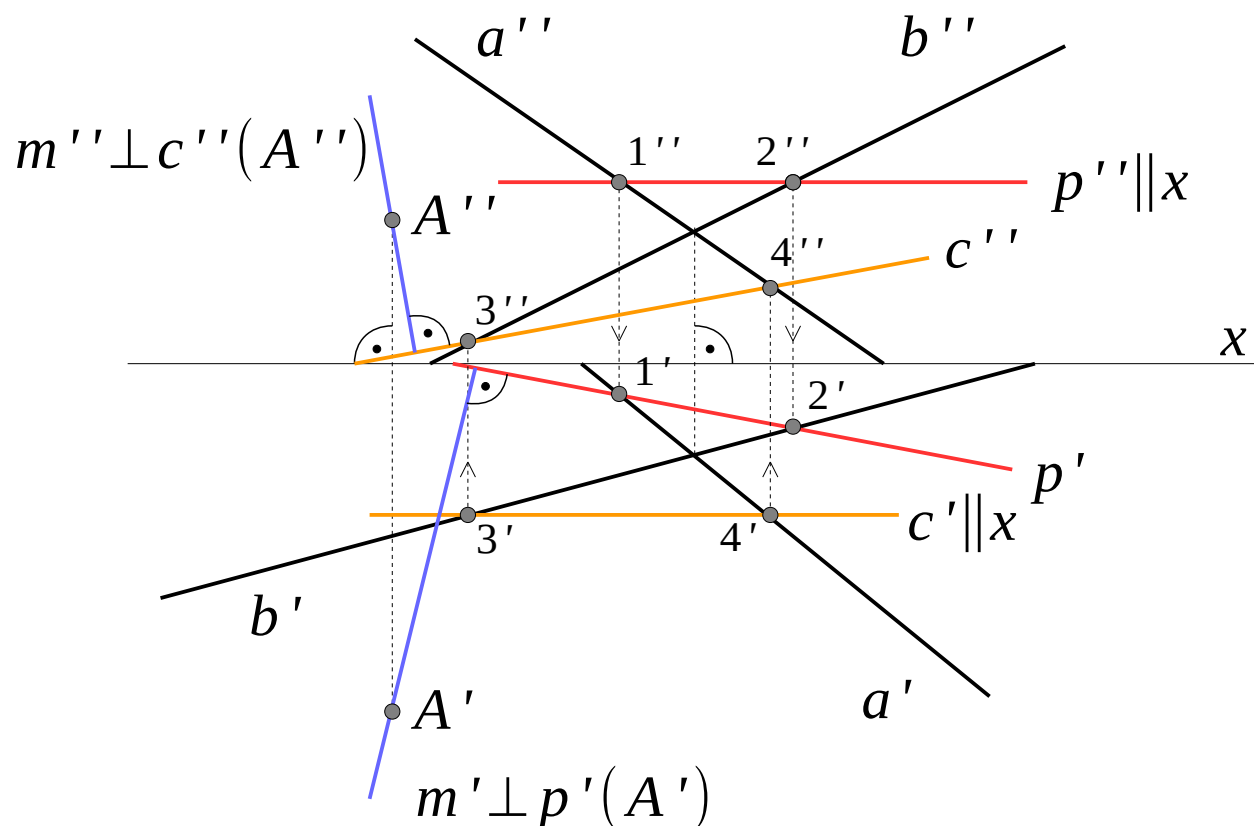
Elementy prostopadłe

Narysować rzuty prostej m ,
prostopadłej do płaszczyzny α
i przechodzącej przez punkt A .

$$\alpha(a \times b)$$

Zadanie zostało rozwiązane,
ale sprawdźmy coś jeszcze.

Generalnie nie ma znaczenia za pomocą
jakich prostych określona została dana
płaszczyzna. Tu płaszczyzna najpierw była
określona prostymi a i b , a następnie
prostymi p i c .

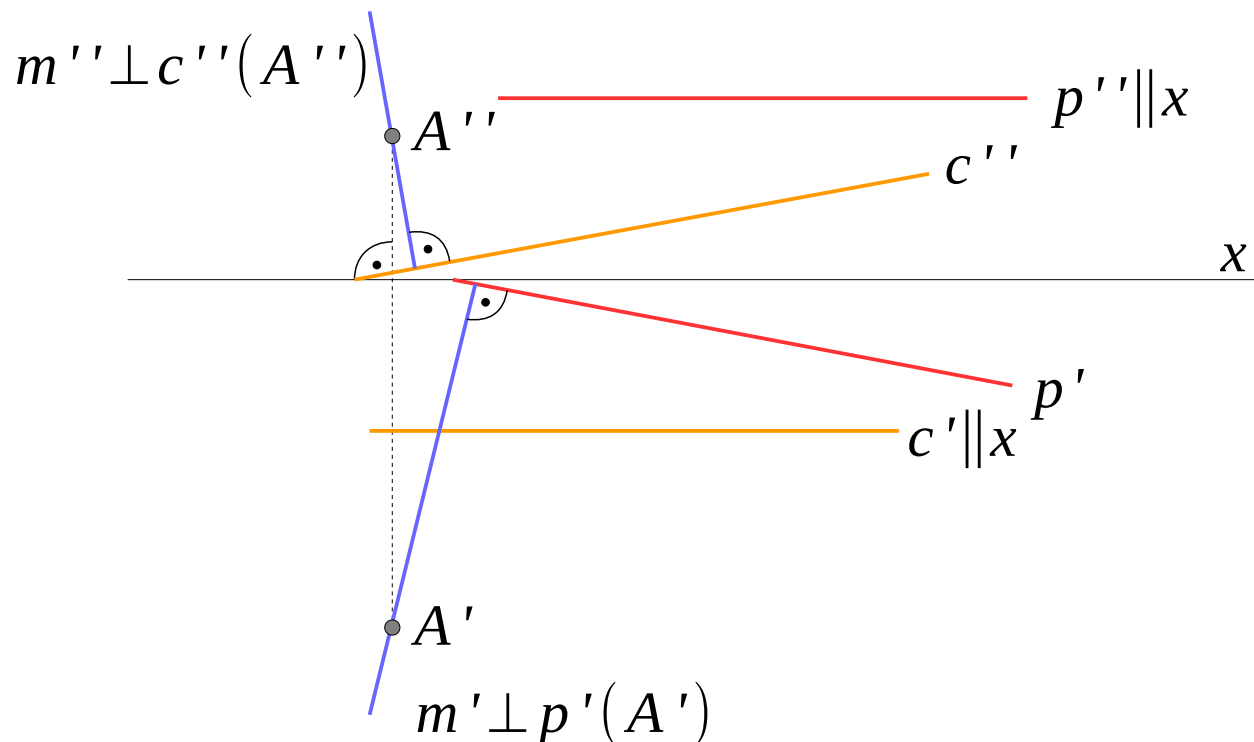


Elementy prostopadłe

Narysować rzuty prostej m ,
prostopadłej do płaszczyzny α
i przechodzącej przez punkt A .

$\alpha(a \times b)$

Usuńmy proste a i b oraz niepotrzebne
teraz punkty pomocnicze.

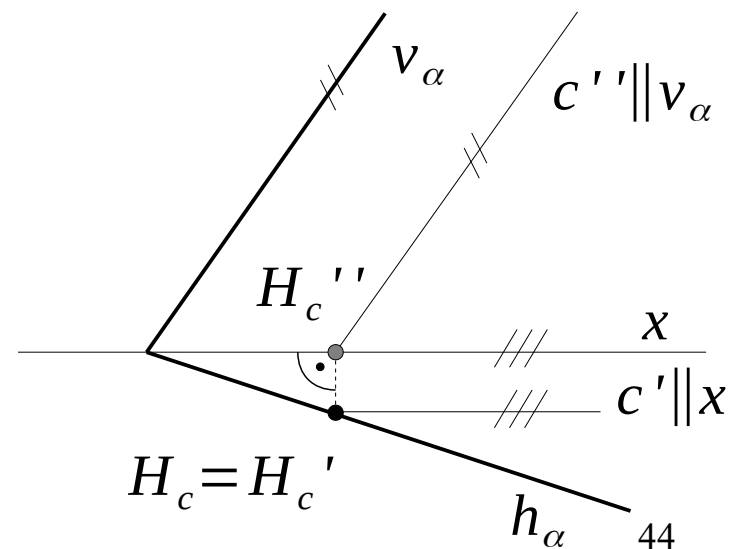
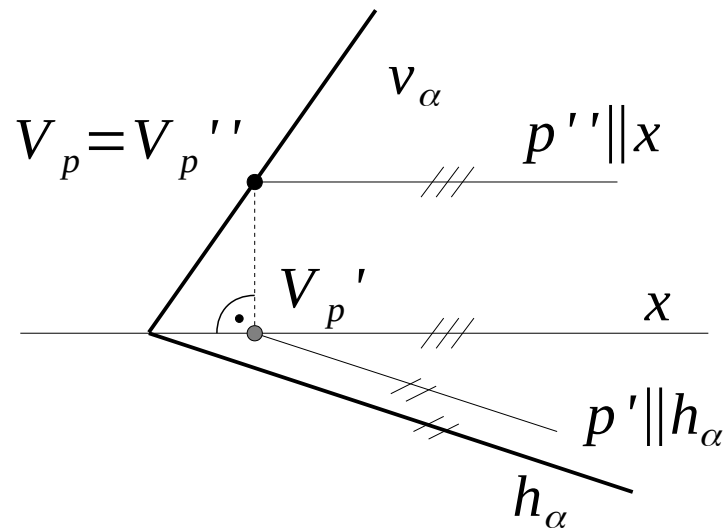
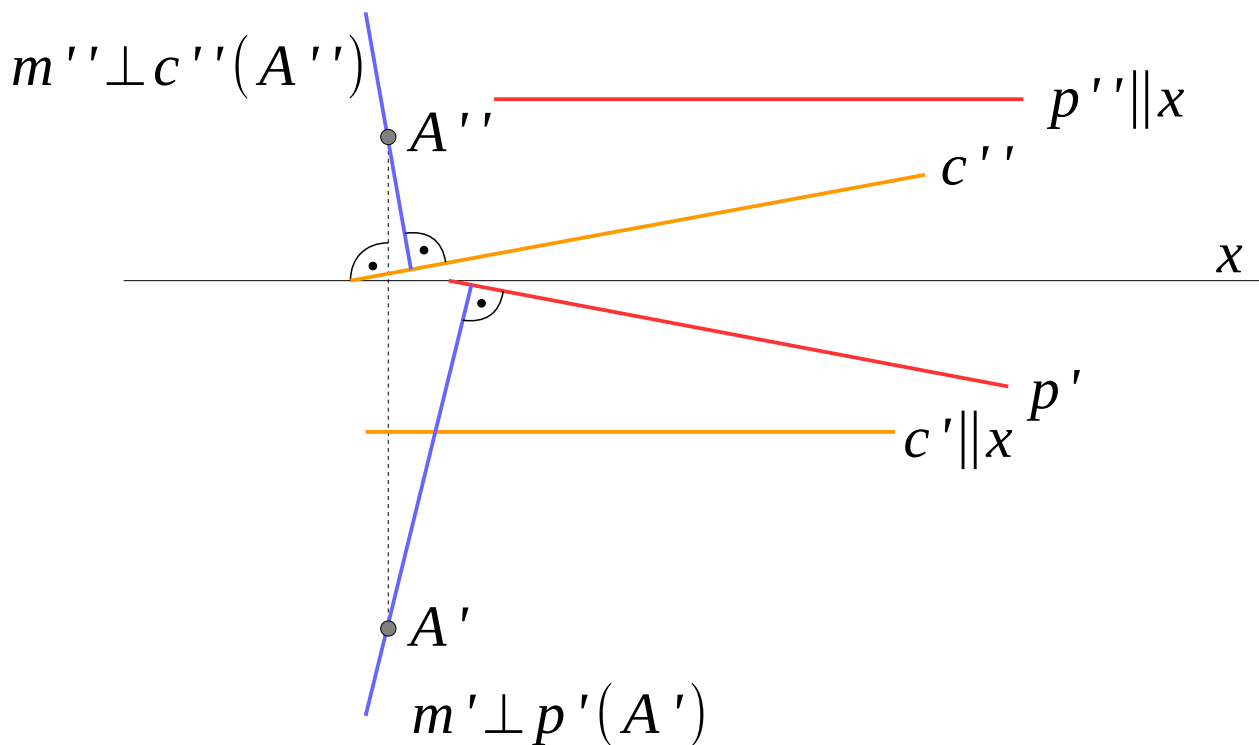


Elementy prostopadłe

Narysować rzuty prostej m ,
 prostopadłej do płaszczyzny α
 i przechodzącej przez punkt A .

$\alpha(a \times b)$

Przypomnijmy sobie, jak się rysuje prostą
 poziomą i prostą czołową na płaszczyźnie.

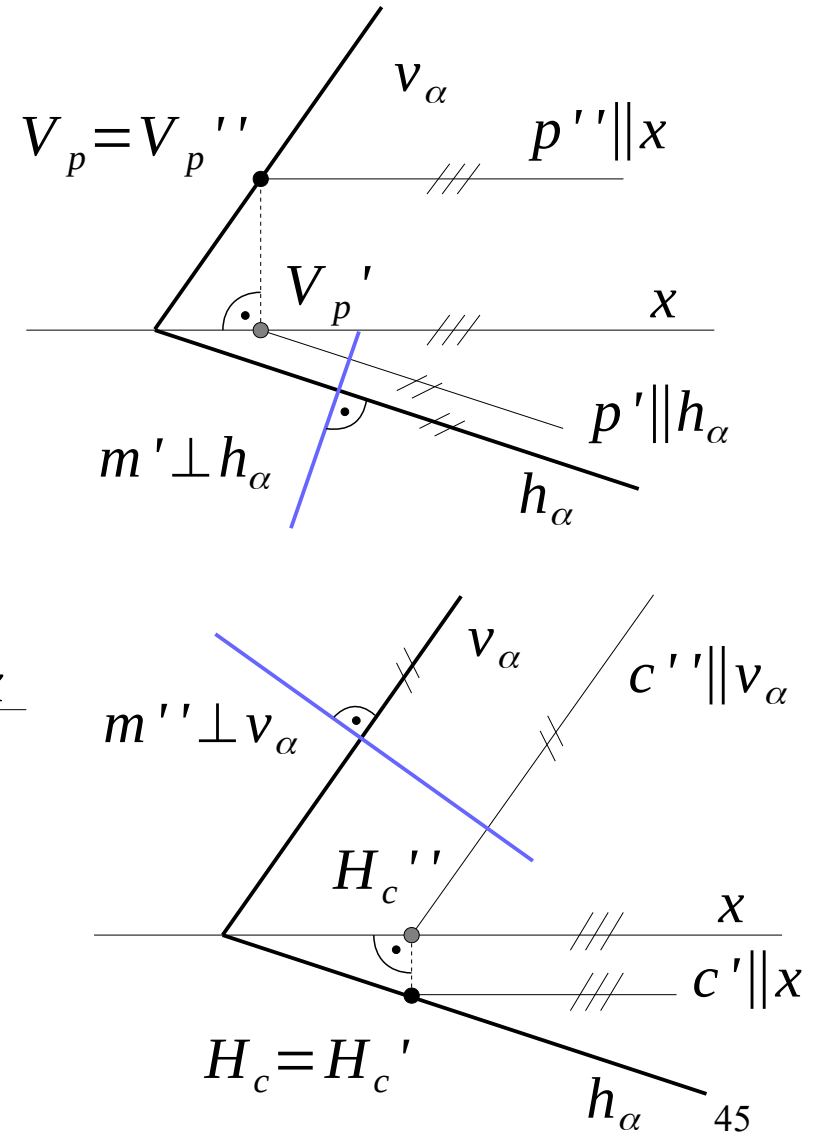
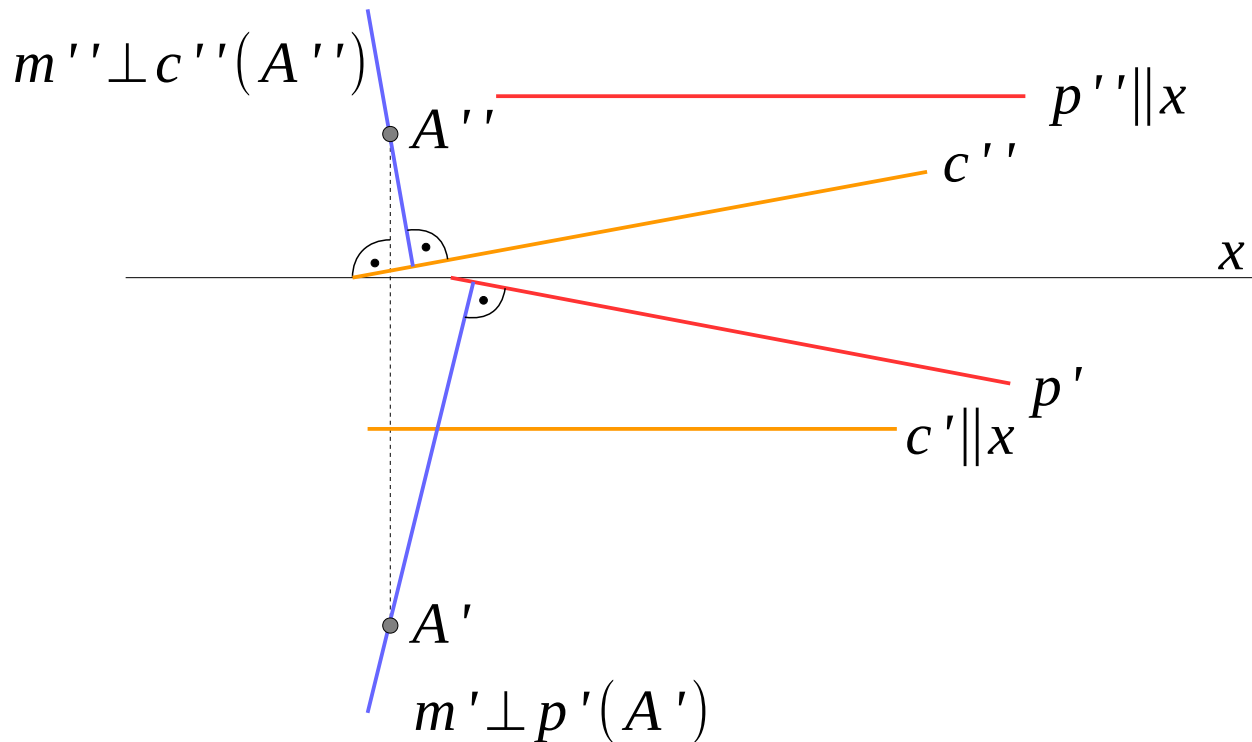


Elementy prostopadłe

Narysować rzuty prostej m ,
prostopadłej do płaszczyzny α
i przechodzącej przez punkt A .

$\alpha(a \times b)$

Gdyby były dane ślady płaszczyzny,
to wystarczyłoby narysować rzuty prostej m
prostopadłe do odpowiednich śladów.

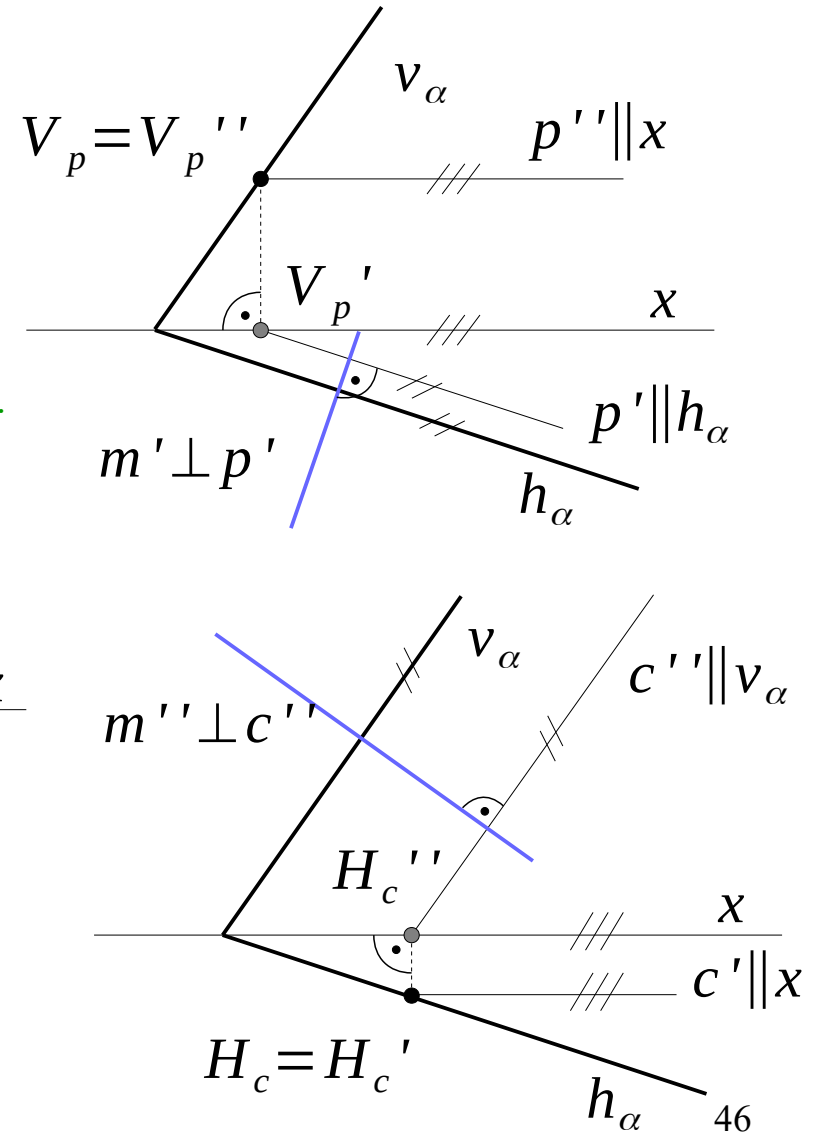
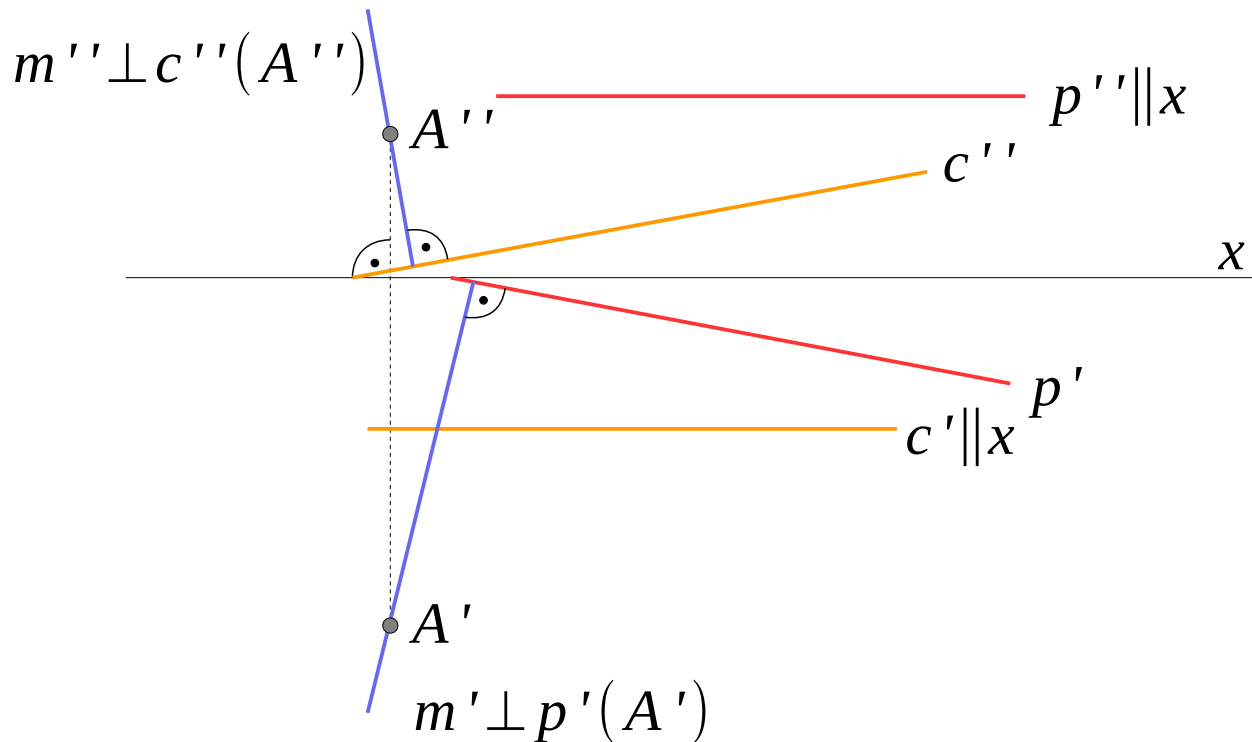


Elementy prostopadłe

Narysować rzuty prostej m ,
prostopadłej do płaszczyzny α
i przechodzącej przez punkt A .

$\alpha(a \times b)$

Zauważmy, że ślady płaszczyzn nie są potrzebne – te same związki można odnieść do wybranych rzutów prostych szczególnych.

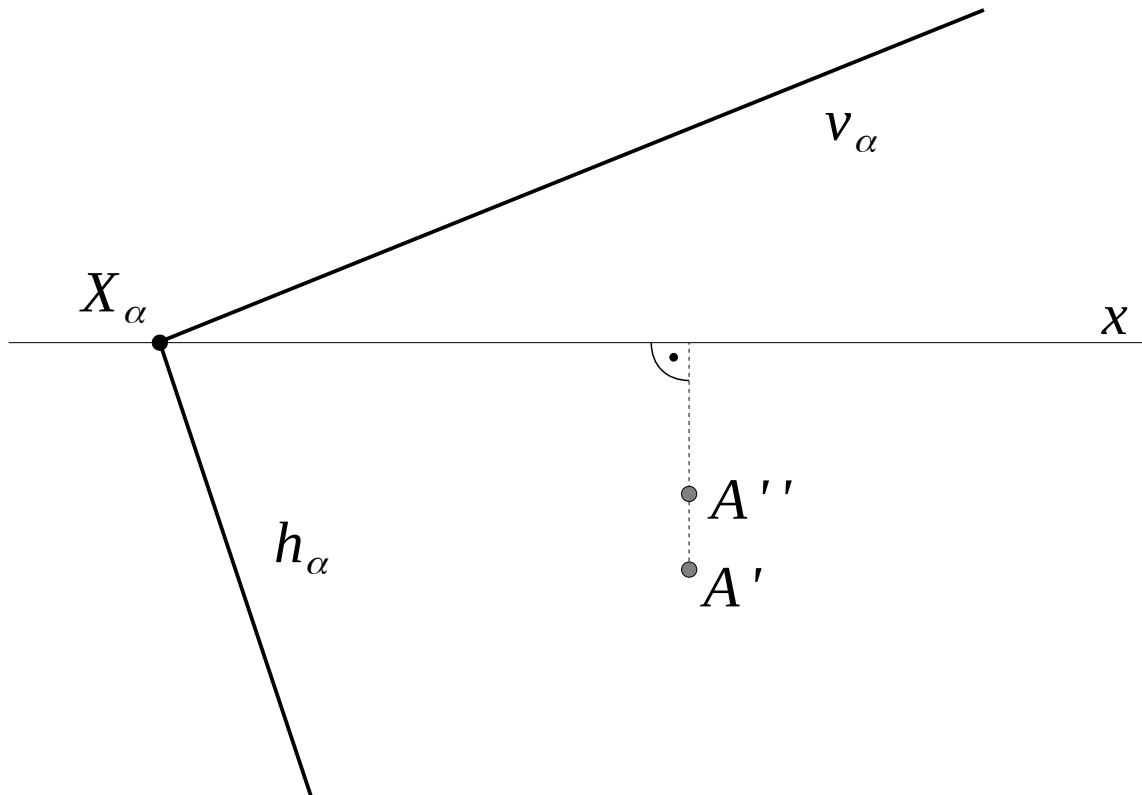


Elementy prostopadłe

Narysować rzuty prostej m ,
prostopadłej do płaszczyzny α
i przechodzącej przez punkt A .

$$\alpha(h_\alpha, v_\alpha)$$

Rozwiążmy inny przykład korzystając z ostatnich rozważań.

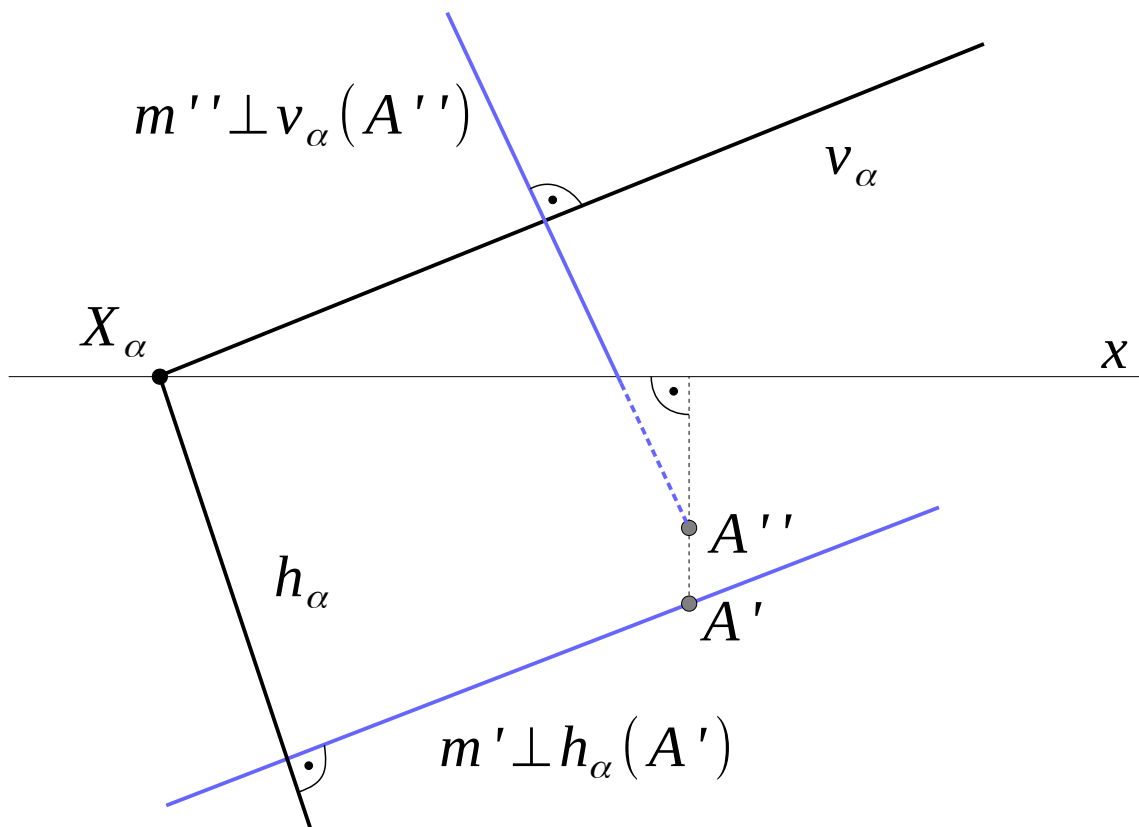


Elementy prostopadłe

Narysować rzuty prostej m ,
prostopadłej do płaszczyzny α
i przechodzącej przez punkt A .

$$\alpha(h_\alpha, v_\alpha)$$

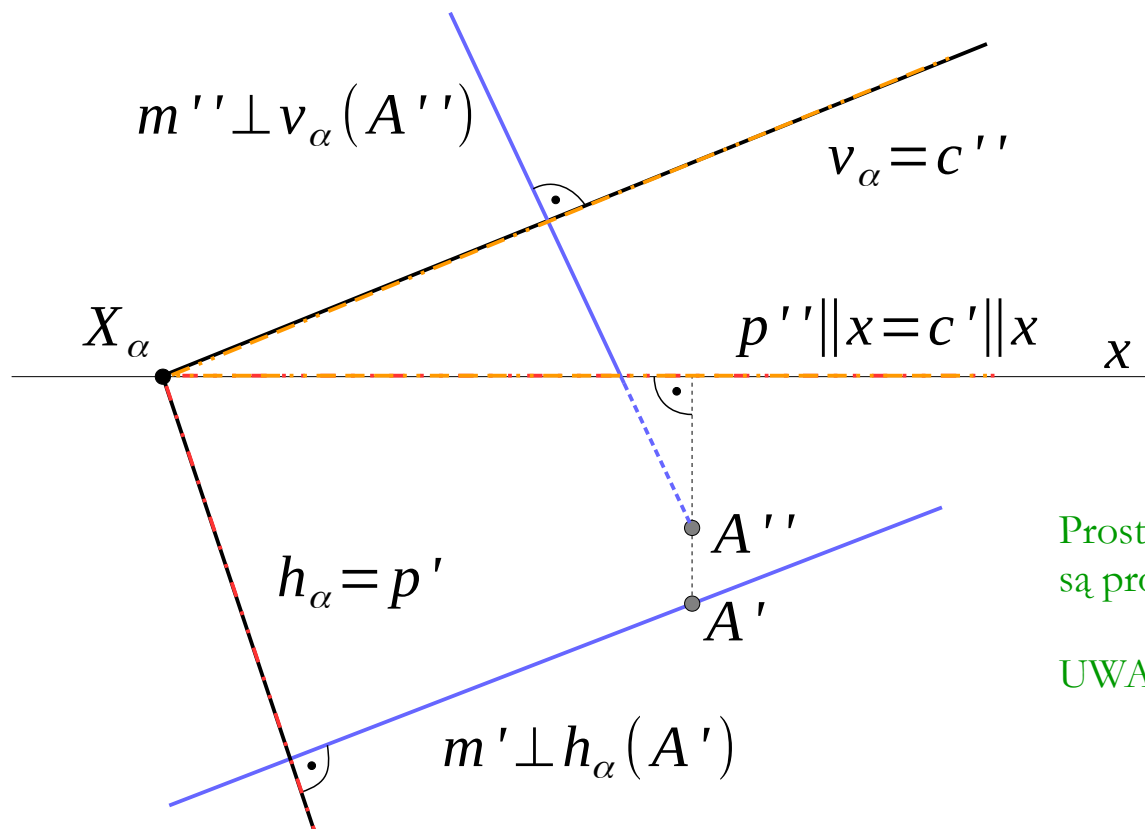
Rozwiążmy inny przykład korzystając z ostatnich rozważań.



Elementy prostopadłe

Narysować rzuty prostej m ,
prostopadłej do płaszczyzny α
i przechodzącej przez punkt A .

$$\alpha(h_\alpha, v_\alpha)$$



Zauważmy, że pierwotne warunki
zostały spełnione:

- można narysować prostą poziomą i prostą czołową leżące na płaszczyźnie i jednocześnie na rzutniach, a następnie rzuty prostej m .

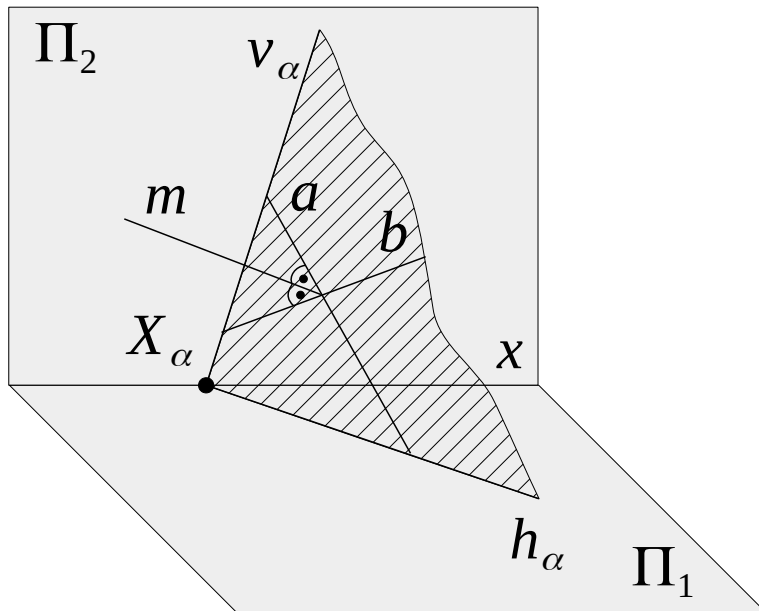
Prosta jest prostopadła do płaszczyzny, jeśli jej rzuty są prostopadłe do odpowiednich śladów płaszczyzny.

UWAGA: zasada ta nie dotyczy równoległości!

Elementy prostopadłe

Elementy prostopadłe:

- prosta prostopadła do innej prostej
- prosta prostopadła do płaszczyzny
- płaszczyzna prostopadła do prostej
- płaszczyzna prostopadła do płaszczyzny



Patrz tematy:

- położenie dwóch prostych w przestrzeni – proste prostopadłe.
- elementy wspólne – prosta na płaszczyźnie,
- elementy wspólne – punkt na prostej.

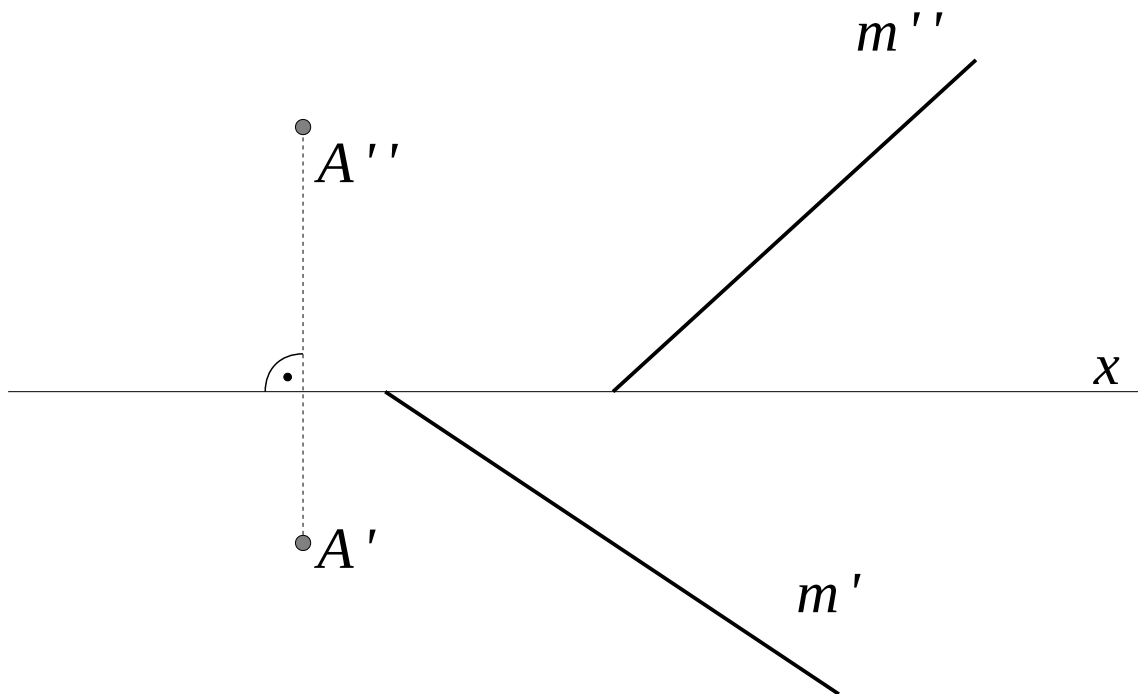
Płaszczyzna jest prostopadła do prostej, gdy zawiera w sobie dwie nierównoległe proste, prostopadłe do danej prostej.

Z poprzednich rozważań wiemy również, że płaszczyzna i prosta są do siebie prostopadłe jeżeli:

$$\begin{aligned} m' &\perp h_\alpha \\ m'' &\perp v_\alpha \end{aligned}$$

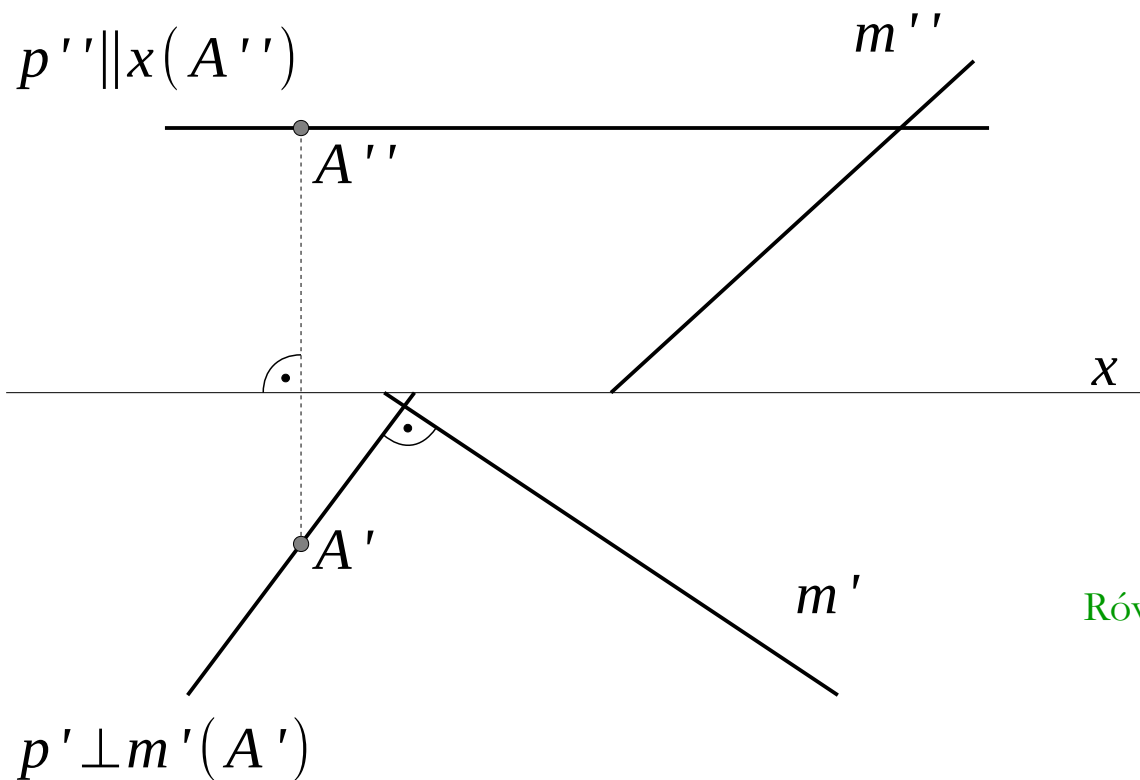
Elementy prostopadłe

Narysować ślady płaszczyzny α
prostopadłej do prostej m
i przechodzącej przez punkt A .



Elementy prostopadłe

Narysować ślady płaszczyzny α
prostopadłej do prostej m
i przechodzącej przez punkt A .



Rozwiązanie obejmuje trzy etapy:

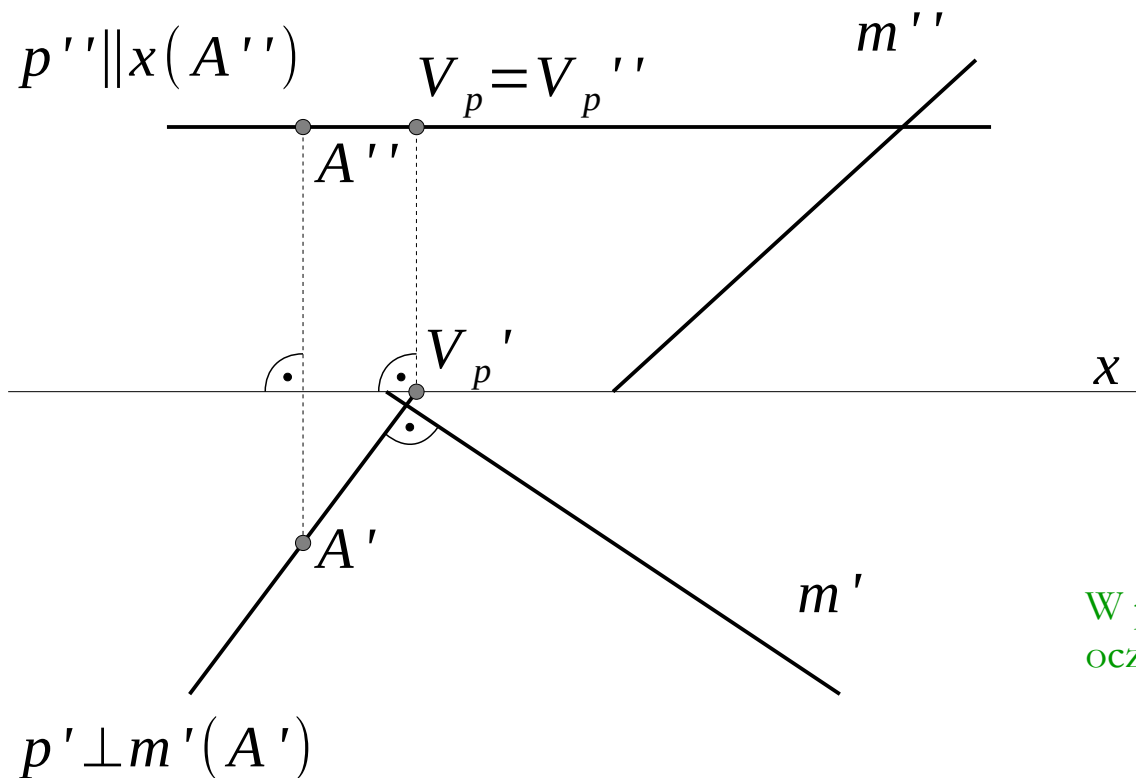
- narysowanie prostej poziomej (p),
prostopadłej do prostej m
i przechodzącej przez punkt A .



Równie dobrze można by użyć prostej czołowej.

Elementy prostopadłe

Narysować ślady płaszczyzny α
prostopadłej do prostej m
i przechodzącej przez punkt A .



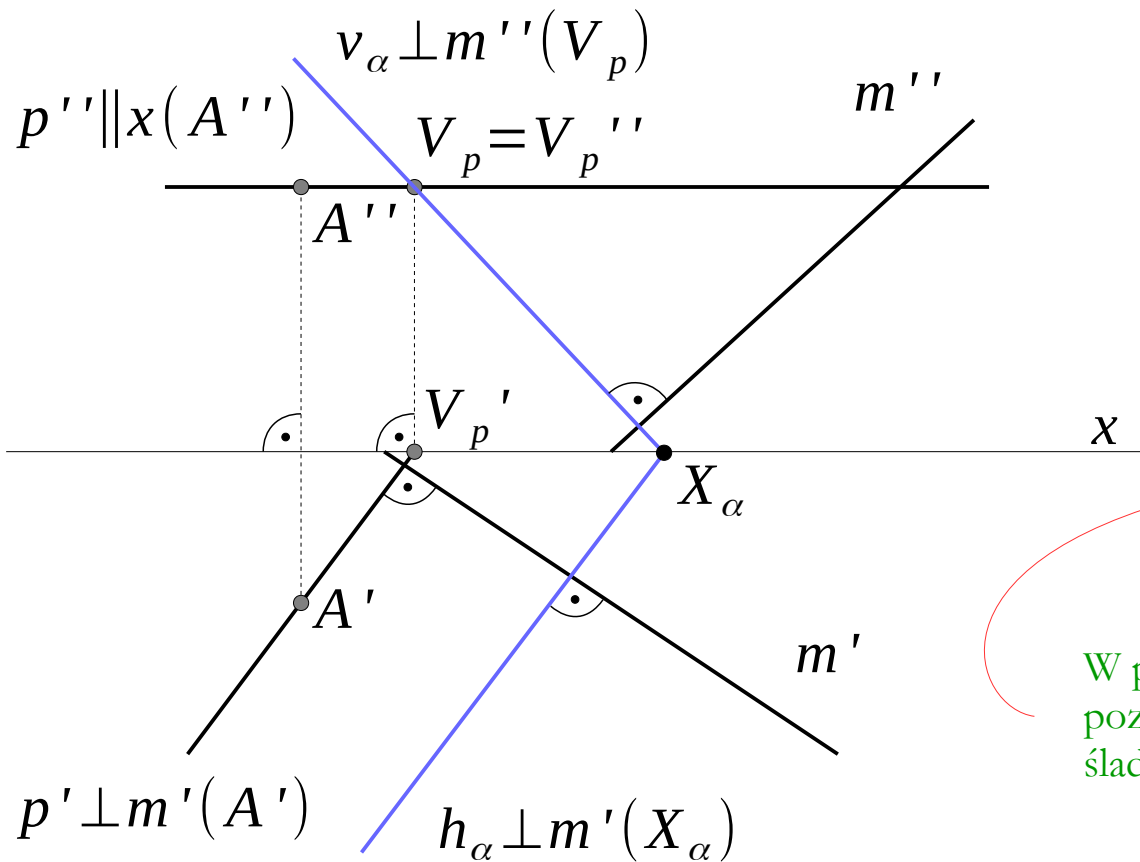
Rozwiązanie obejmuje trzy etapy:

- wyznaczenie śladu pionowego prostej poziomej.

W przypadku użycia prostej czołowej byłby to oczywiście ślad poziomy.

Elementy prostopadłe

Narysować ślady płaszczyzny α prostopadłej do prostej m i przechodzącej przez punkt A .



Rozwiązanie obejmuje trzy etapy:

- narysowanie śladów płaszczyzny tak, aby były prostopadłe do prostej m – czyli spełniały warunek:

$$\begin{aligned} m' &\perp h_\alpha \\ m'' &\perp v_\alpha \end{aligned}$$

i jednocześnie tak, aby ślad pionowy prostej poziomej leżał na pionowym śladzie płaszczyzny.

W przypadku użycia prostej czołowej: aby ślad poziomy prostej czołowej leżał na poziomym śladzie płaszczyzny.

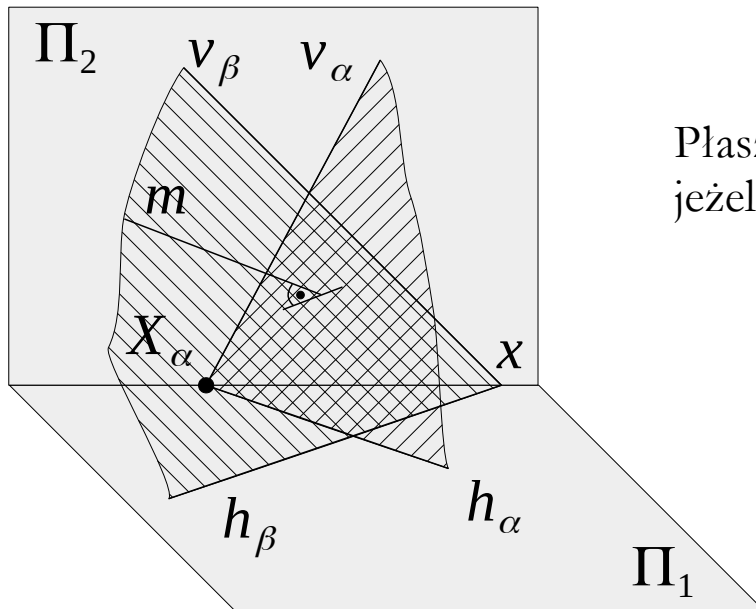
Elementy prostopadłe

Elementy prostopadłe:

- prosta prostopadła do innej prostej
- prosta prostopadła do płaszczyzny
- płaszczyzna prostopadła do prostej
- płaszczyzna prostopadła do płaszczyzny

Patrz tematy:

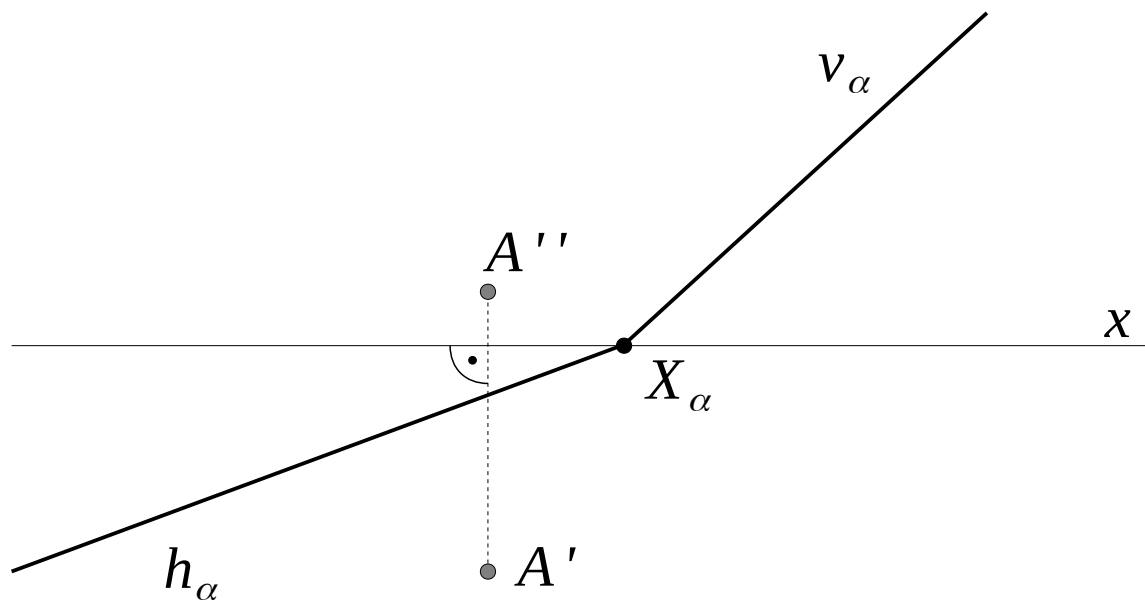
- położenie dwóch prostych w przestrzeni – proste prostopadłe.
- elementy wspólne – prosta na płaszczyźnie,
- elementy wspólne – punkt na prostej.



Płaszczyzna jest prostopadła do innej płaszczyzny, jeżeli zawiera w sobie prostą prostopadłą do tej płaszczyzny.

Elementy prostopadłe

Narysować ślady płaszczyzny β prostopadłej do płaszczyzny α i przechodzącej przez punkt A.

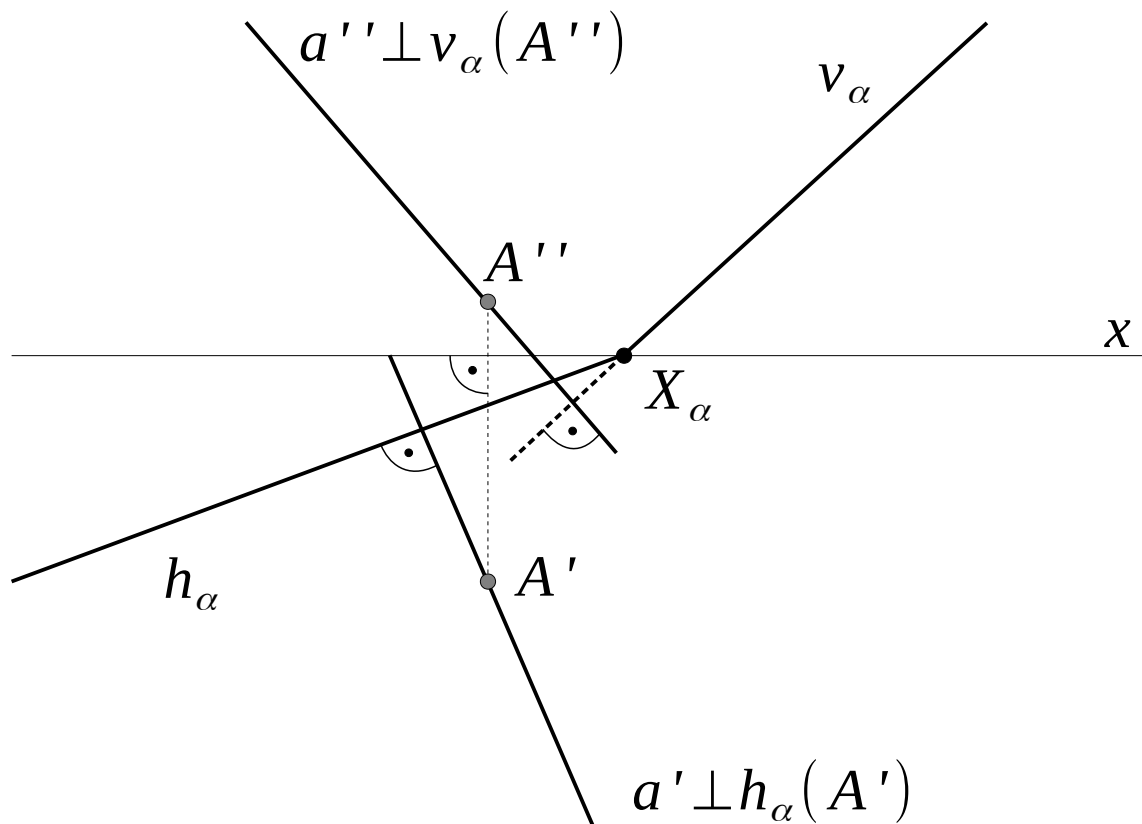


Elementy prostopadłe

Narysować ślady płaszczyzny β prostopadłej do płaszczyzny α i przechodzącej przez punkt A.

Rozwiązanie obejmuje trzy etapy:

- narysowanie prostej pomocniczej (tu a), prostopadłej do płaszczyzny α i przechodzącej przez punkt A.

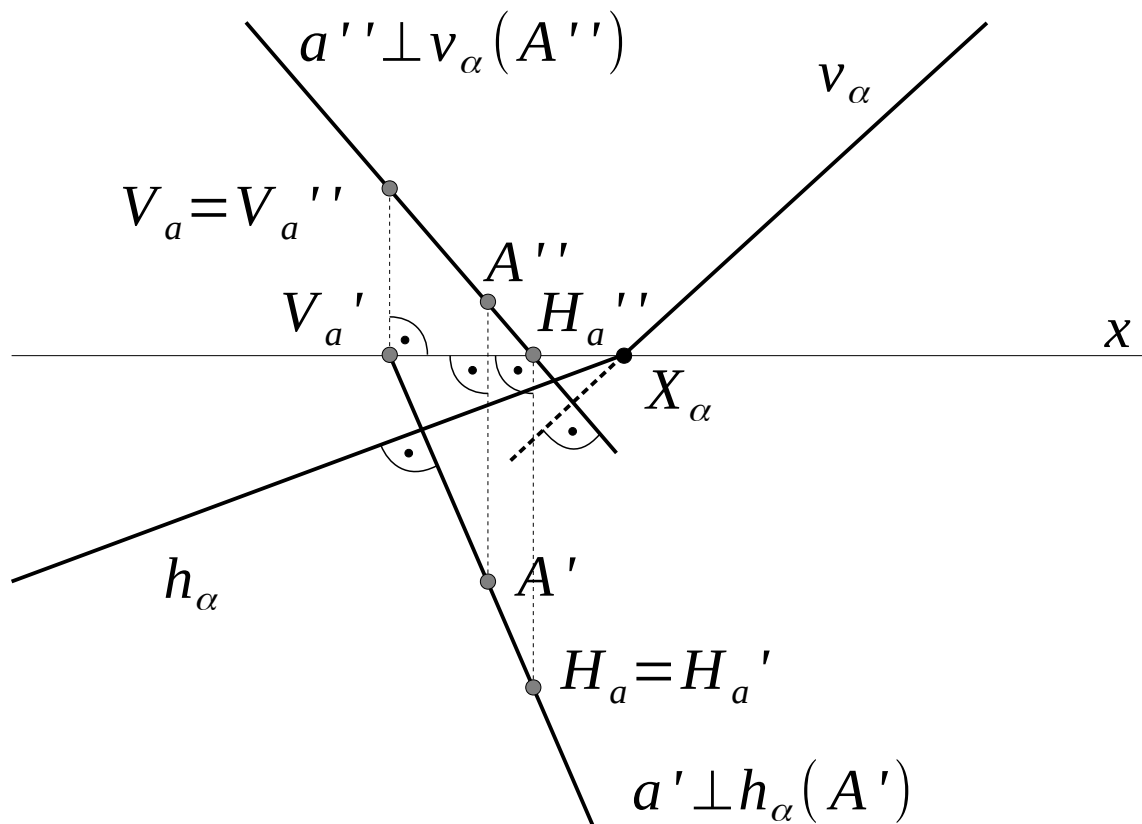


Elementy prostopadłe

Narysować ślady płaszczyzny β prostopadłej do płaszczyzny α i przechodzącej przez punkt A.

Rozwiązanie obejmuje trzy etapy:

- wyznaczenie śladów prostej pomocniczej.



Podsumowanie

Zagadnienia:

Elementy równoległe: prosta równoległa do innej prostej, prosta równoległa do płaszczyzny, płaszczyzna równoległa do prostej, płaszczyzna równoległa do płaszczyzny; elementy prostopadłe: prosta prostopadła do innej prostej, prosta prostopadła do płaszczyzny, płaszczyzna prostopadła do prostej, płaszczyzna prostopadła do płaszczyzny.

UNIVERSITY OF WARMIA AND MAZURY IN OLSZTYN
The Faculty of Technical Sciences
POLAND, 10-957 Olsztyn, M. Oczapowskiego 11
tel.: (48)(89) 5-23-32-40, fax: (48)(89) 5-23-32-55
URL: <http://www.uwm.edu.pl/edu/sobieski/> (in Polish)



Dziękuję za uwagę

Wojciech Sobieski

Olsztyn, 2021