



GEOMETRIA WYKREŚLNA

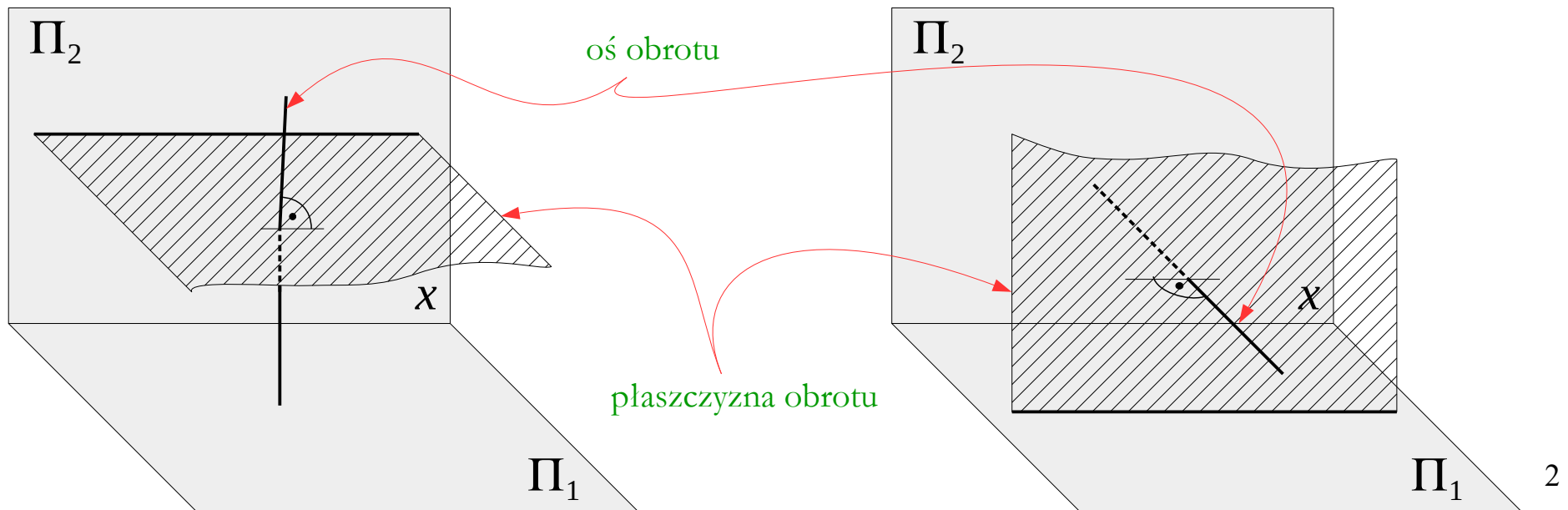
Obroty.

Obrót

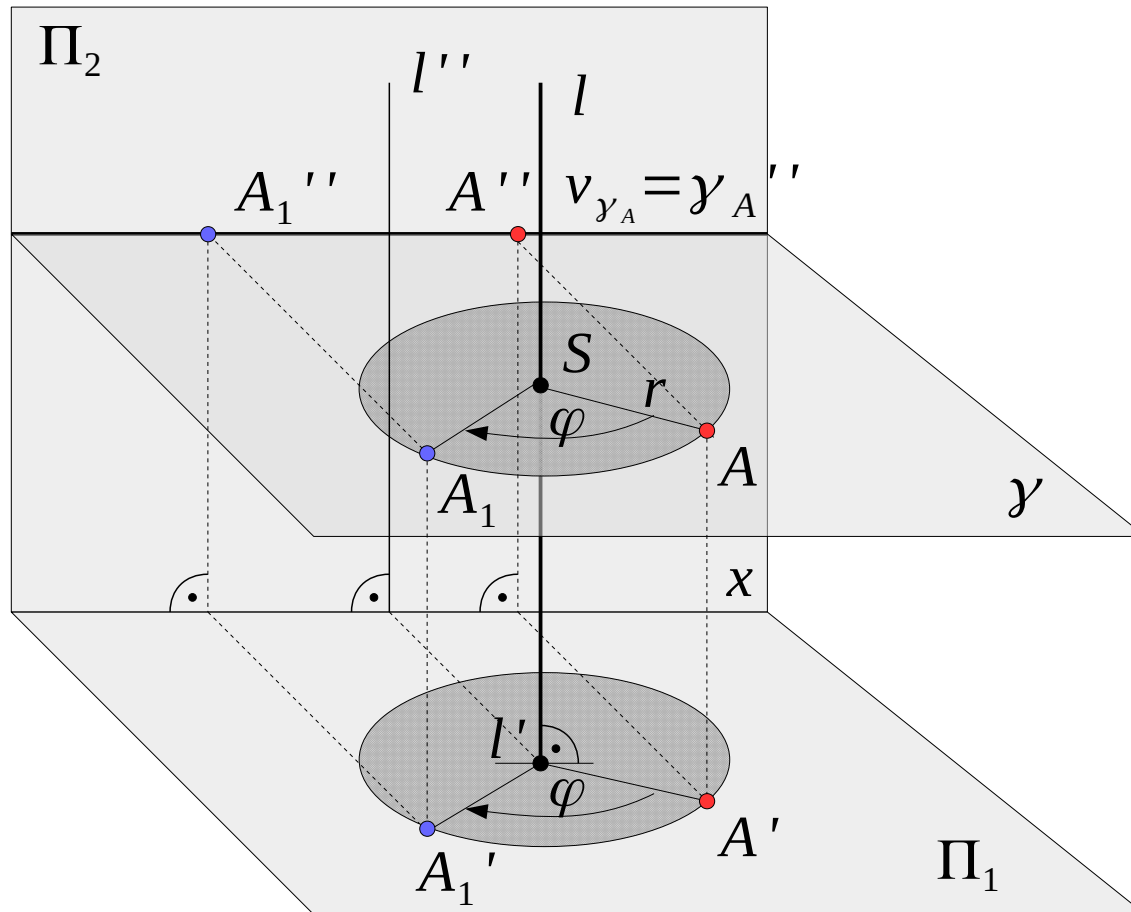
Obrót – technika rysunkowa pozwalająca zmieniać orientację obiektów w przestrzeni. Szczególne znaczenie mają obroty o taki kąt, aby obiekty były równoległe lub prostopadłe do którejś z rzutni, co umożliwia wyznaczanie rzeczywistych kształtów, wymiarów lub kątów.

Generalnie istnieją tylko dwa warianty obrotów:

- gdy oś obrotu jest pionowa – płaszczyzny obrotów są wówczas poziome (po lewej),
- gdy oś obrotu jest celowa – płaszczyzny obrotów są wówczas czołowe (po prawej).



Obrót punktu



- punkt przed obrotem
- punkt po obrocie

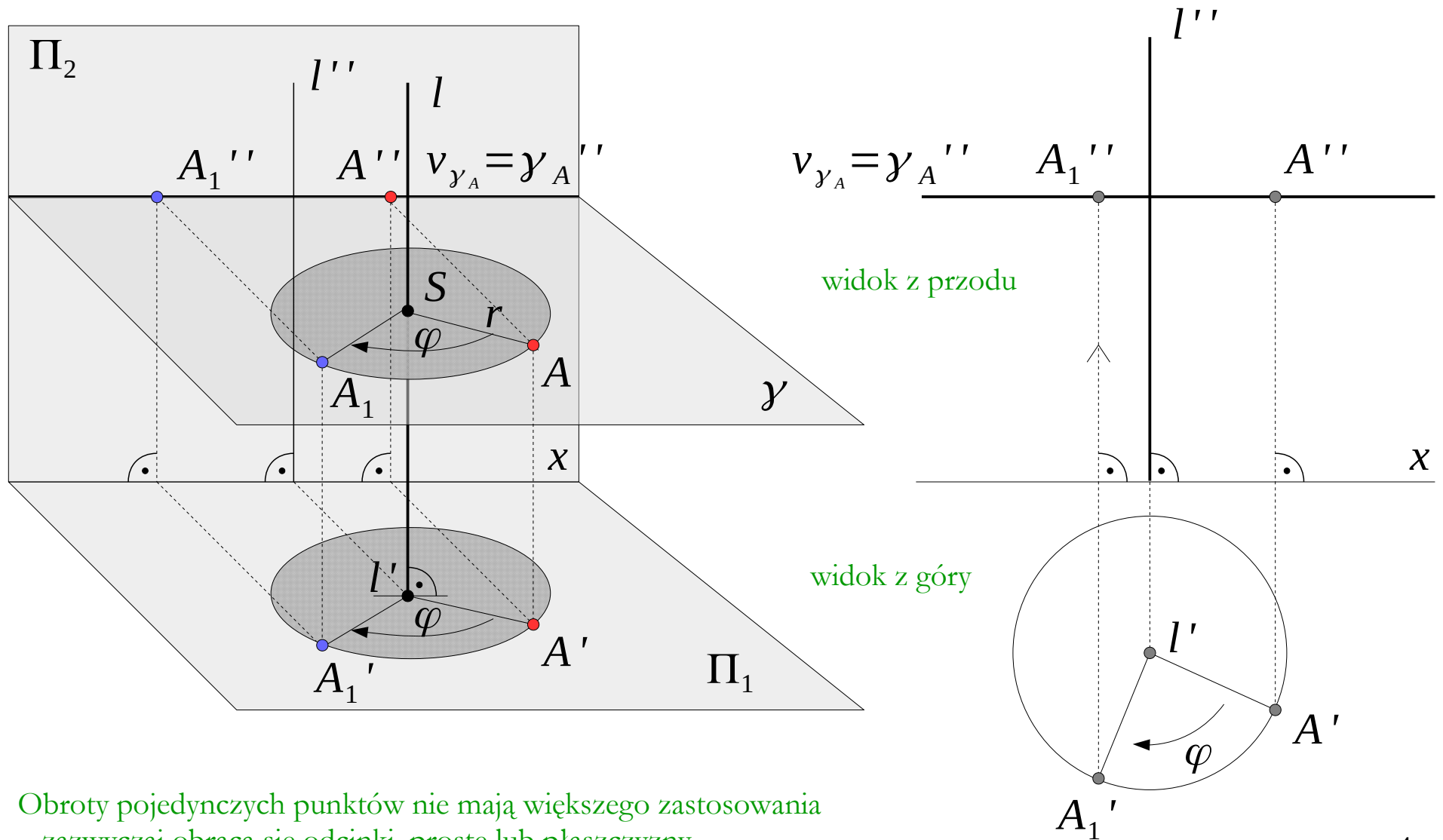


Czuringa.



- l - oś obrotu
- γ - płaszczyzna obrotu
- S - środek obrotu
- r - promień obrotu
- φ - kąt obrotu

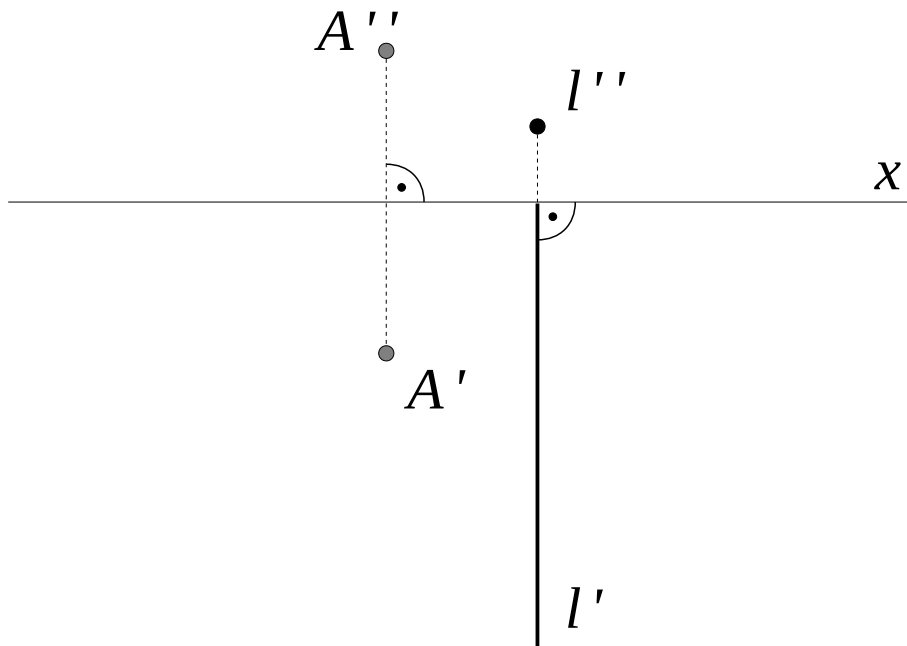
Obrót punktu



Obroty pojedynczych punktów nie mają większego zastosowania
 – zazwyczaj obraca się odcinki, proste lub płaszczyzny.

Obrót punktu

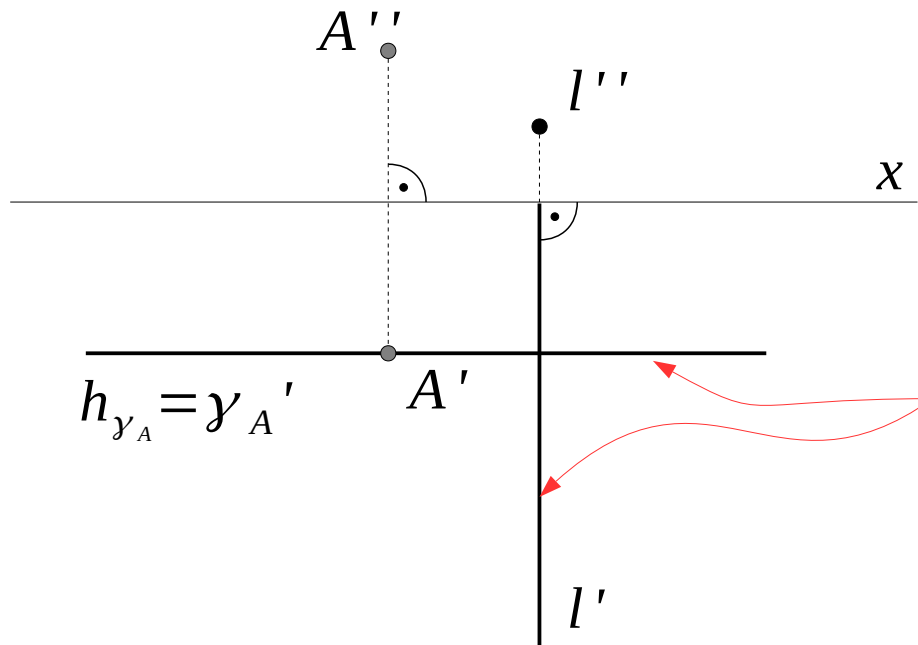
Obrócić punkt A o 180° wokół prostej celowej l .



Obrót punktu

Obrócić punkt A o 180° wokół prostej celowej l.

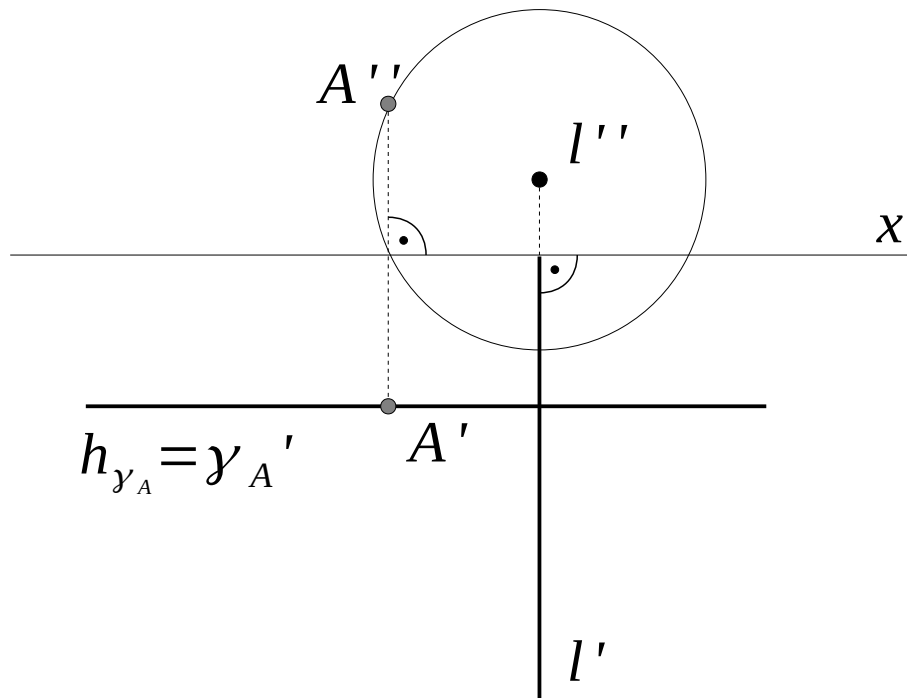
- Zaznaczamy płaszczyznę obrotu.



Oś obrotu i płaszczyzna są (zawsze, zawsze) do siebie prostopadle.

Obrót punktu

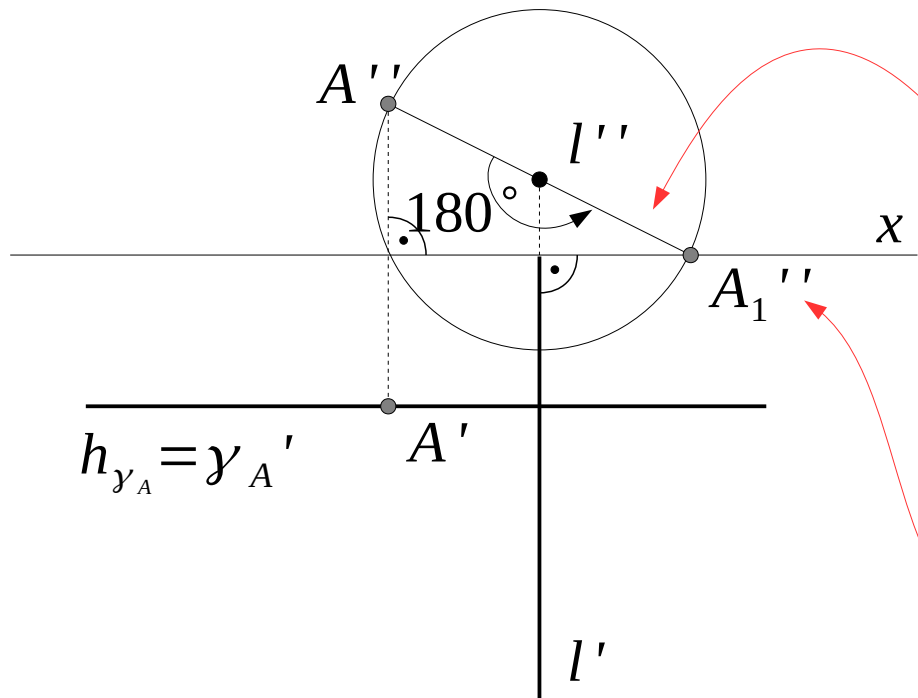
Obrócić punkt A o 180° wokół prostej celowej l.



- Rysujemy okrąg na tym rzucie, na którym rzut osi obrotu jest punktem:
- środek okręgu jest na rzucie osi obrotu,
- promień obrotu równa się odległości między rzutem osi obrotu a odpowiednim rzutem punktu.

Obrót punktu

Obrócić punkt A o 180° wokół prostej celowej l.



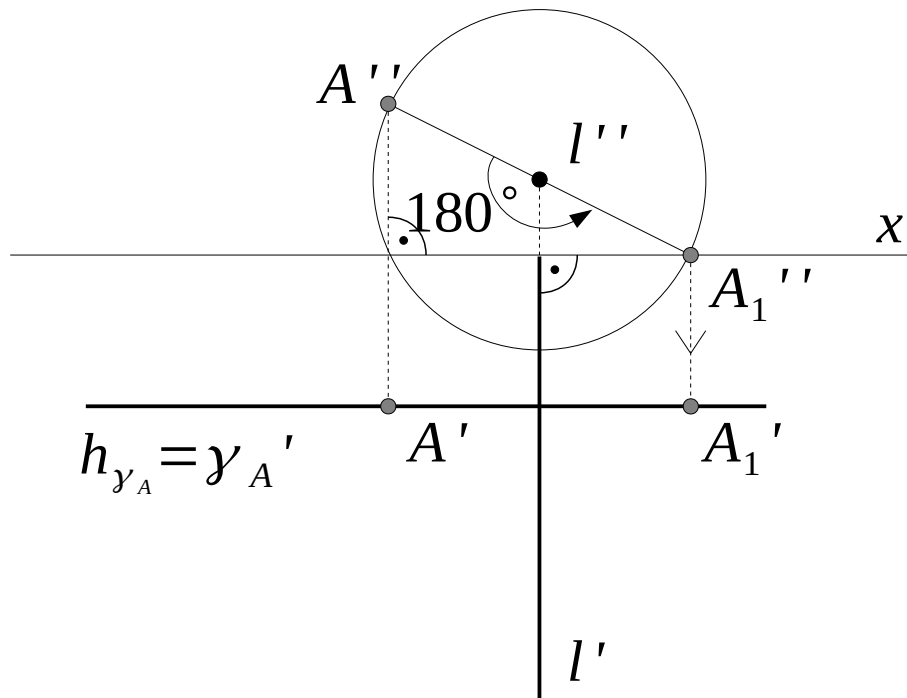
- Odmierzamy kąt obrotu i zaznaczamy położenie rzutu punktu po obrocie.

W tym przypadku nie ma znaczenia, w którą stronę wykonywany jest obrót – dla innych kątów należy jeszcze podać kierunek.

Nie ma znaczenia gdzie znajdzie się rzut punktu po obrocie – może to być np. oś x .

Obrót punktu

Obrócić punkt A o 180° wokół prostej celowej l.

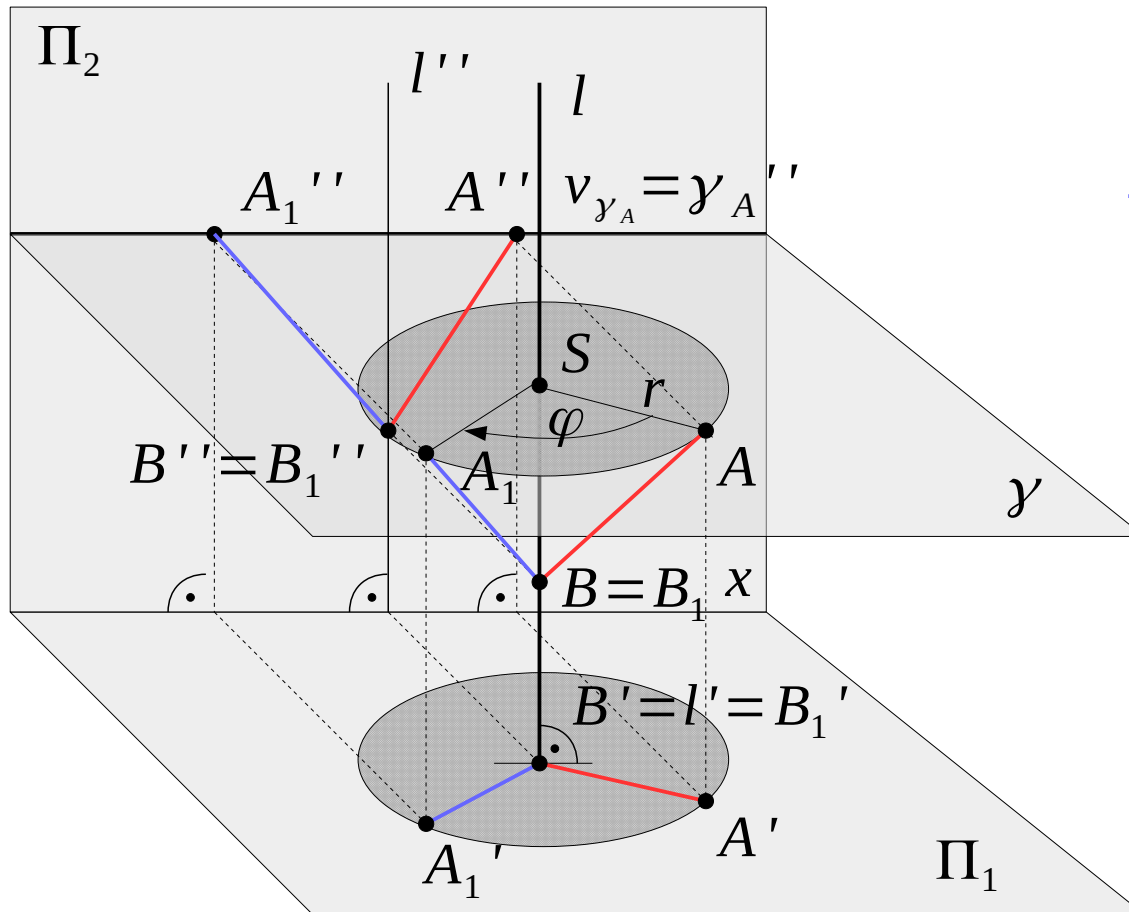


- Wyznaczamy drugi rzut punktu, wiedząc że leży on na płaszczyźnie obrotu.

Uwagi dotyczące oznaczeń:

- elementy po obrocie nie zmieniają nazwy, ale dodaje się indeks dolny – najczęściej 1 – informujący o nowym położeniu tego samego elementu,
- w nazwie płaszczyzny obrotu warto dodać indeks dolny z nazwą punktu, którego ona dotyczy.

Obrót odcinka



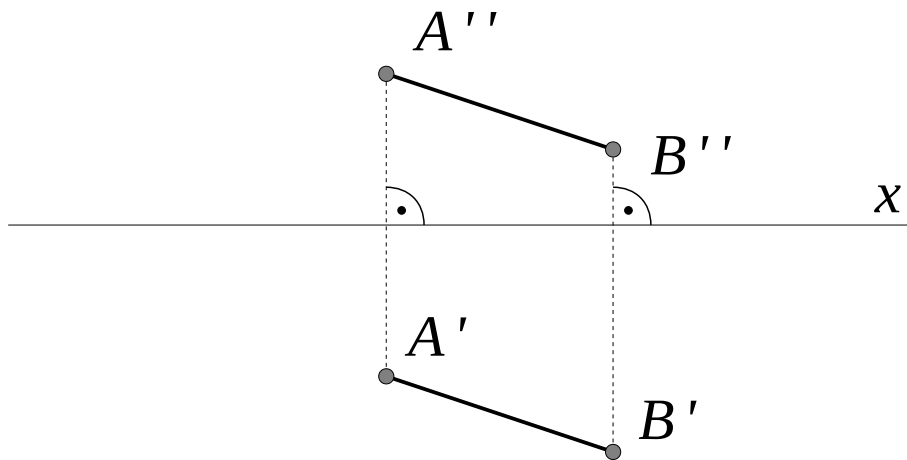
- odcinek przed obrotem
- odcinek po obrocie

Skoro można obracać pojedyncze punkty, to można również obracać pary punktów – czyli odcinki.

Najwygodniej jest, jeżeli oś obrotu przechodzi przez jeden z końców odcinka – wówczas zadanie upraszcza się do obrotu jednego punktu!

Obrót odcinka

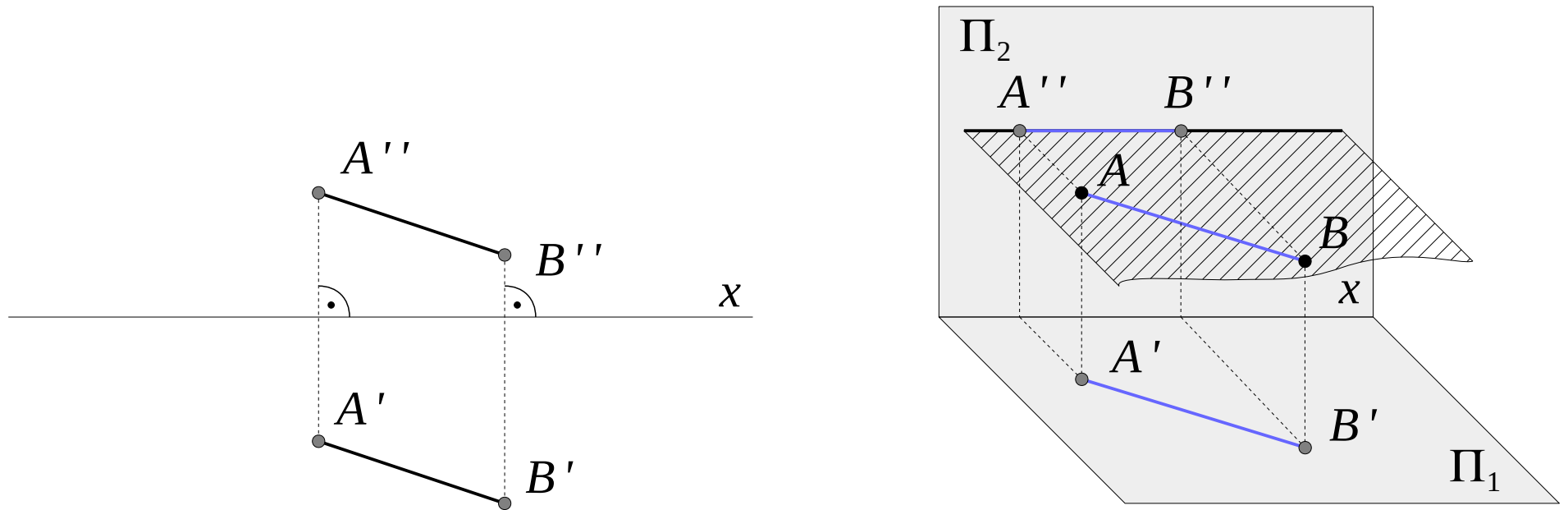
Wyznaczyć rzeczywistą długość odcinka AB .



Czy na rysunku widać rzeczywistą długość odcinka?

Obrót odcinka

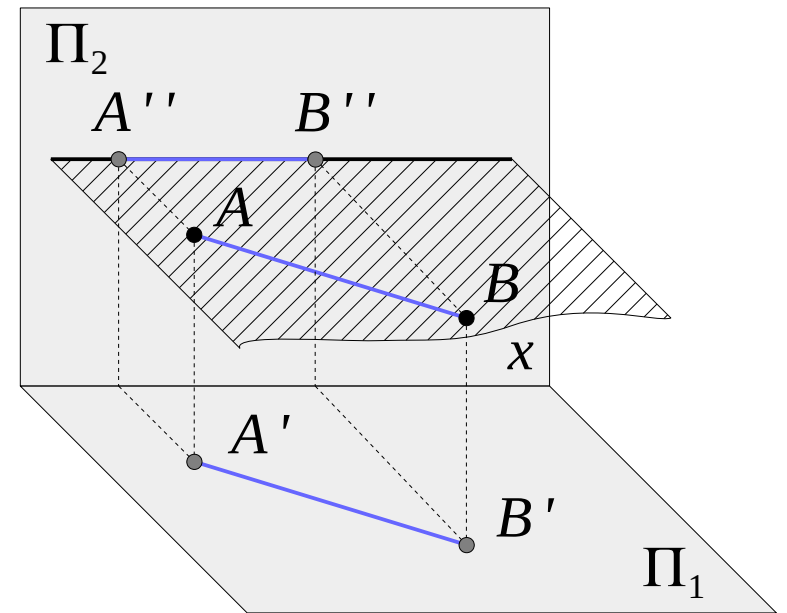
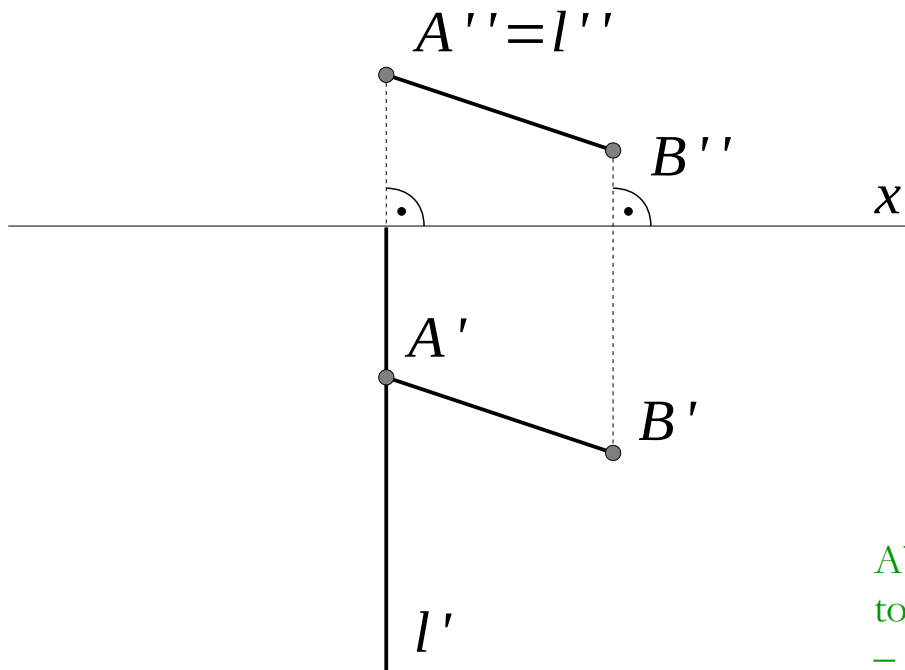
Wyznaczyć rzeczywistą długość odcinka AB .



A gdyby odcinek obrócić tak,
aby był równoległy do którejś z rzutni?

Obrót odcinka

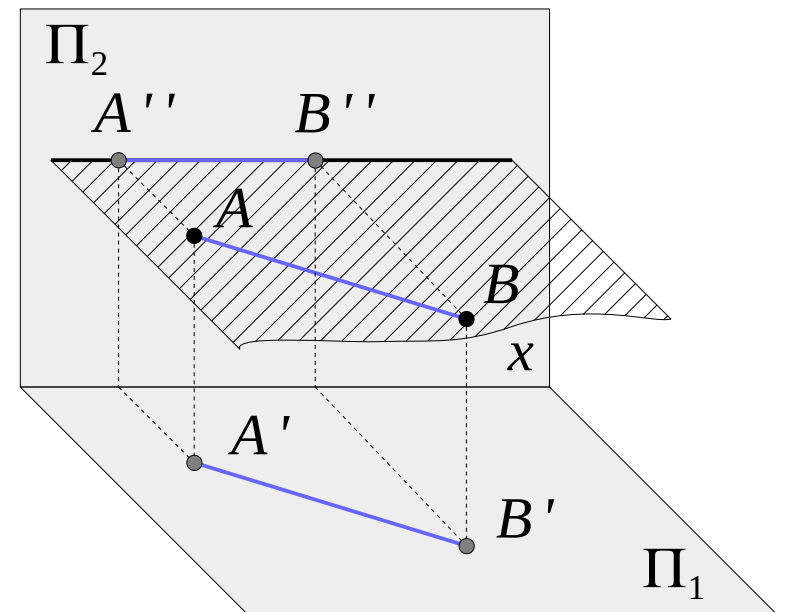
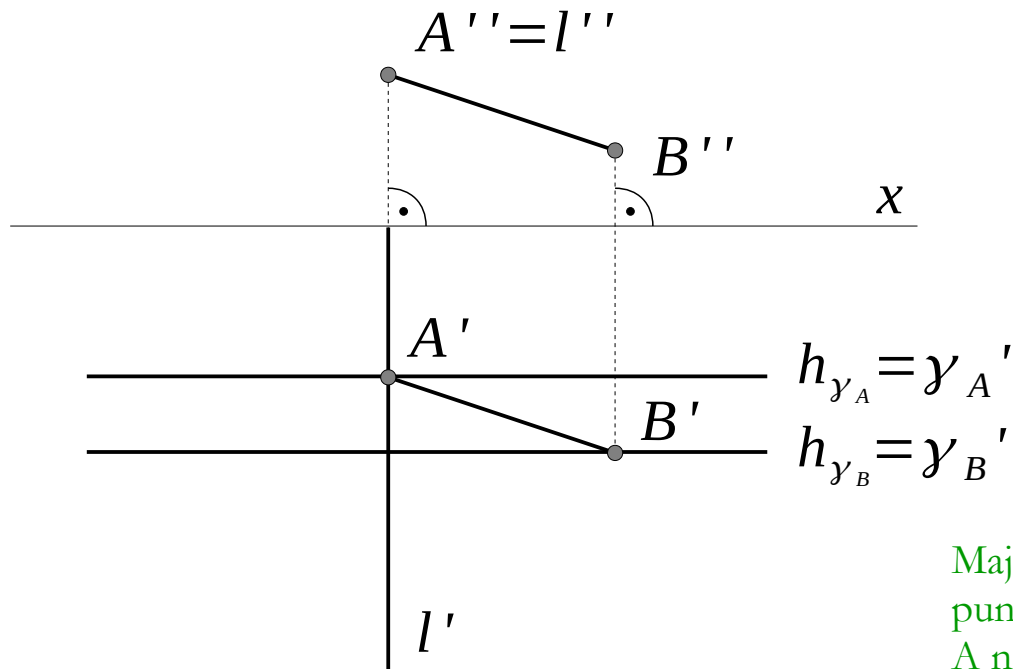
Wyznaczyć rzeczywistą długość odcinka AB .



Aby uzyskać położenie poziome (jak na rysunku po prawej), to trzeba „pokręcić” rzutem pionowym odcinka – oś obrotu musi być zatem prostą celową!

Obrót odcinka

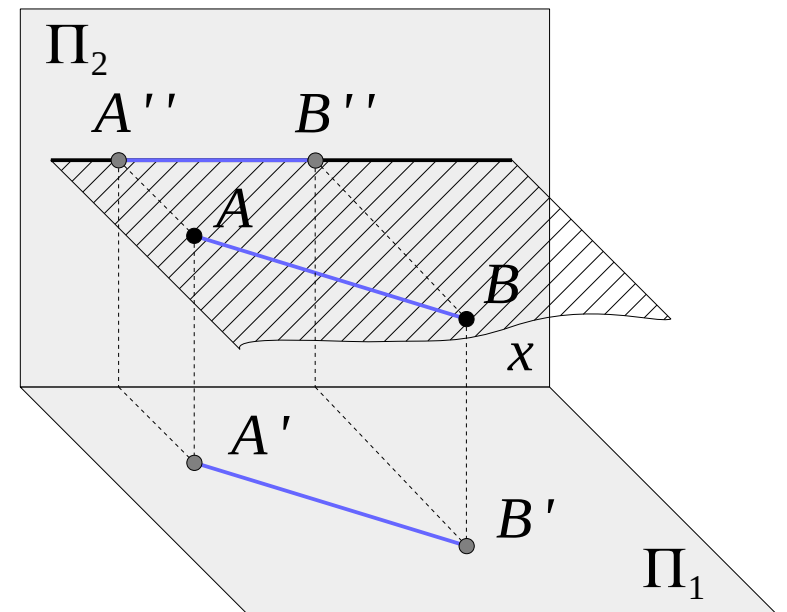
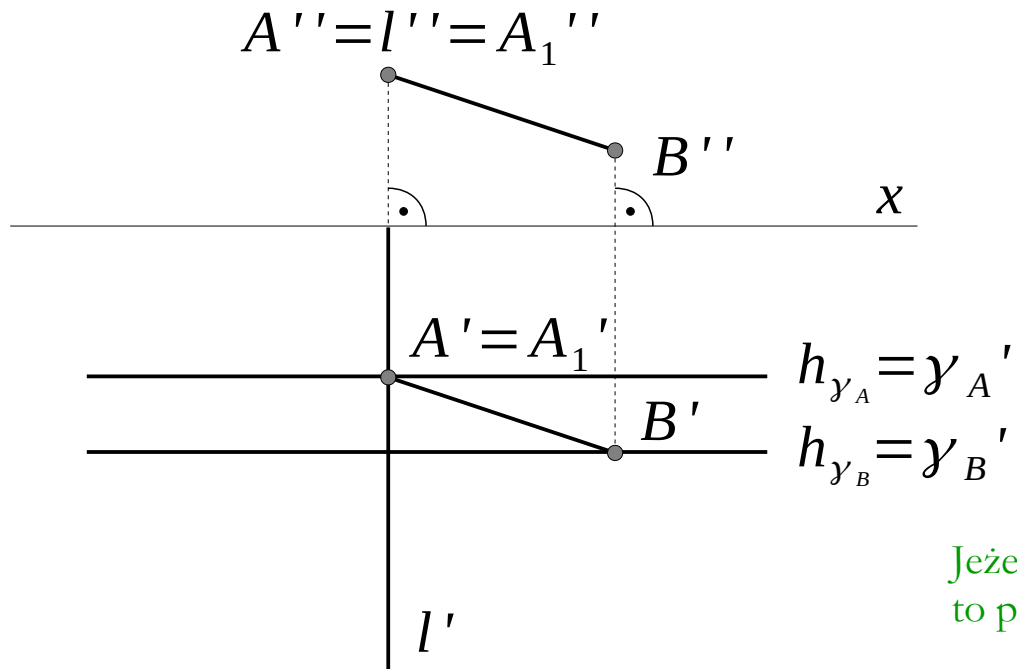
Wyznaczyć rzeczywistą długość odcinka AB.



Mając oś obrotu wstawiamy płaszczyzny obrotów punktów A i B (przy czym płaszczyzna obrotu punktu A nie jest potrzebna – punkt ten zostaje w miejscu).

Obrót odcinka

Wyznaczyć rzeczywistą długość odcinka AB.

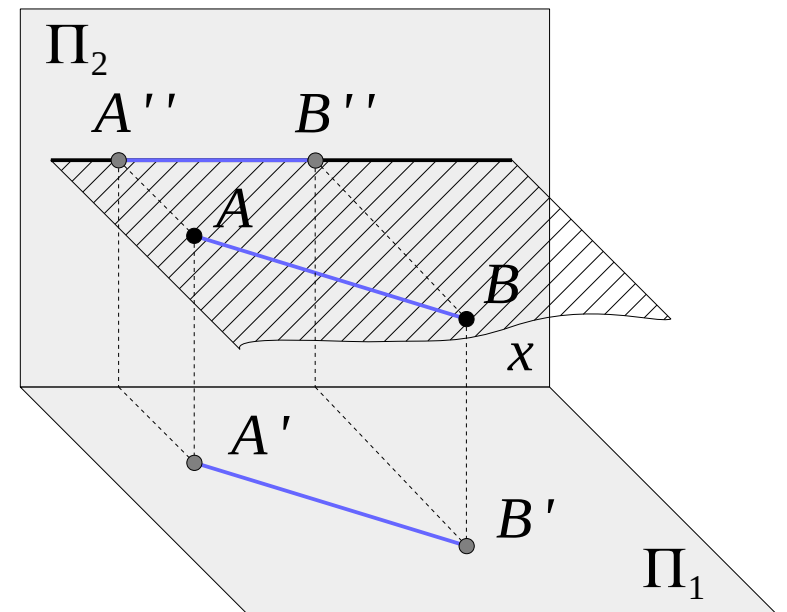
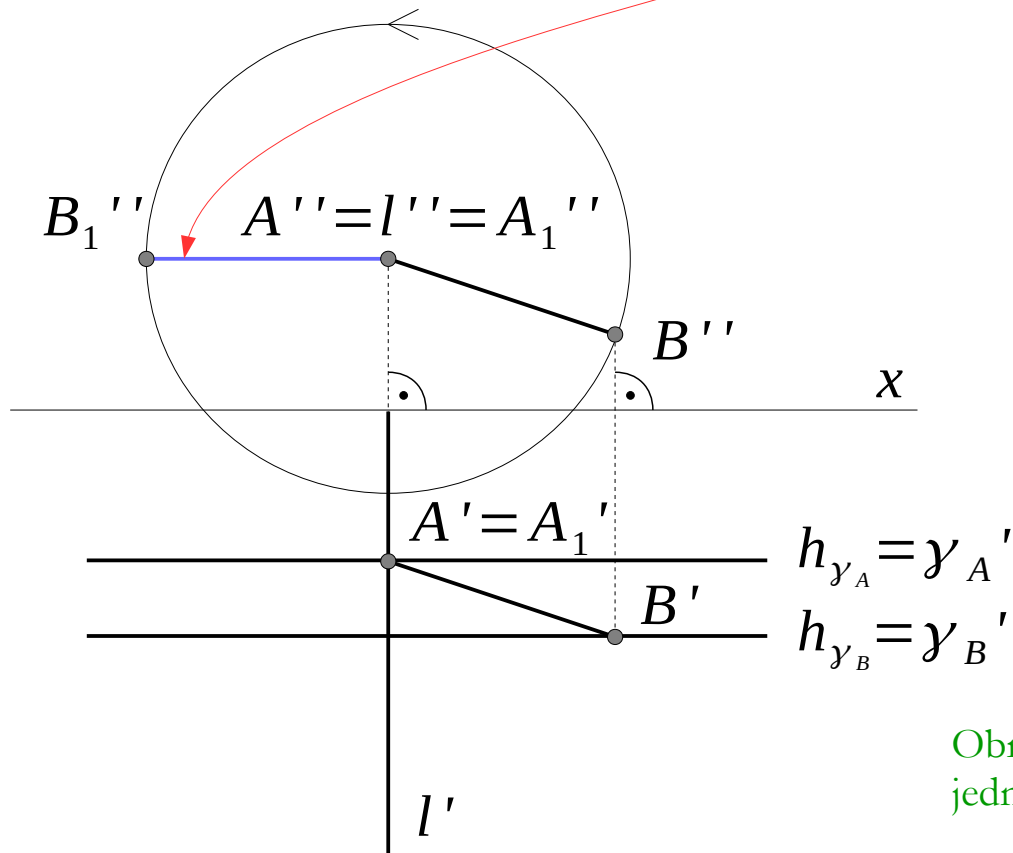


Jeżeli punkt znajduje się na osi obrotu,
to podczas obrotu nie zmienia swojego położenia.

Obrót odcinka

Wyznaczyć rzeczywistą długość odcinka AB .

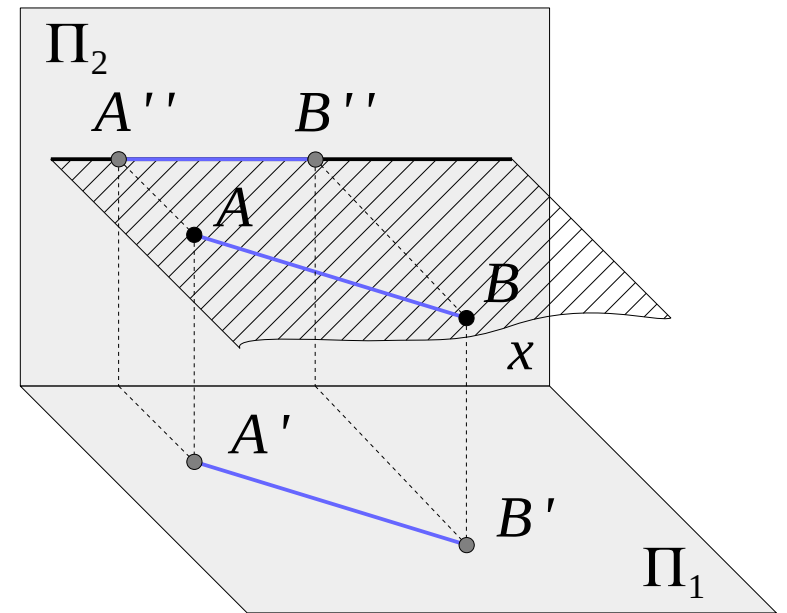
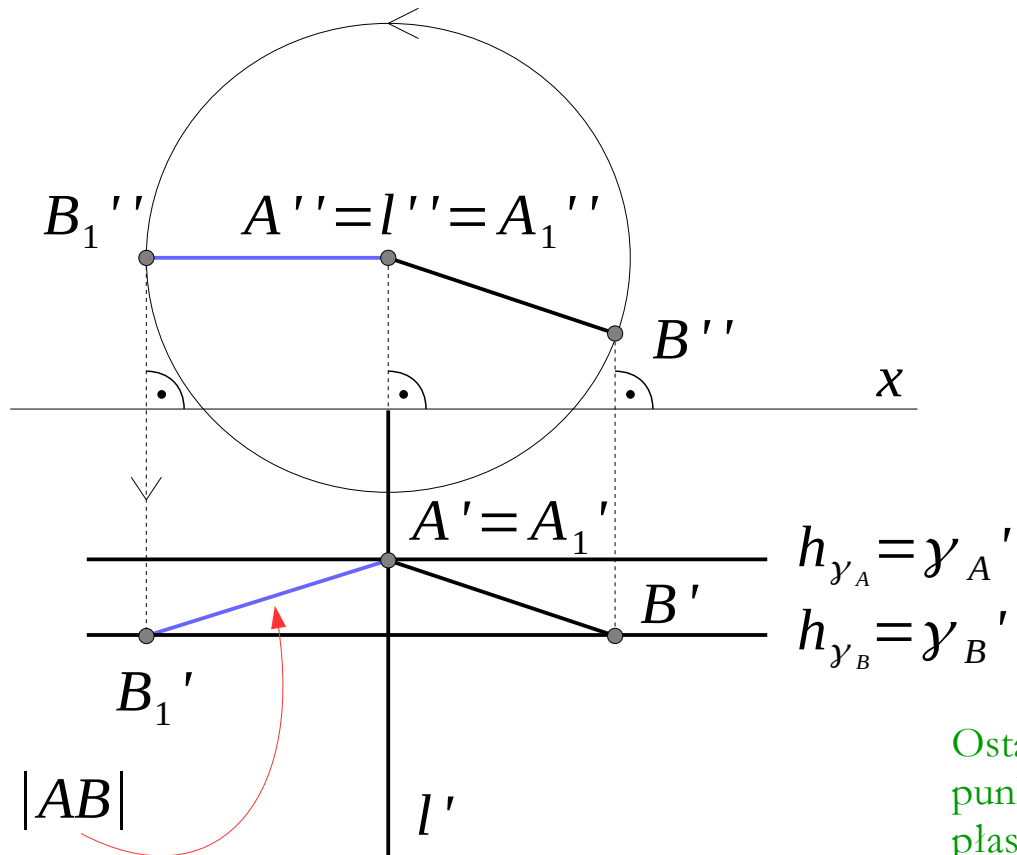
Teraz nie obracamy odcinka o zadany kąt, ale obrót robimy tak długo, aż osiągnięte zostanie jakieś konkretne położenie – tu równoległe do osi x .



Obrót odcinka sprowadza się w praktyce do obrotu jednego punktu (jeśli dobrze wstawimy oś obrotu).

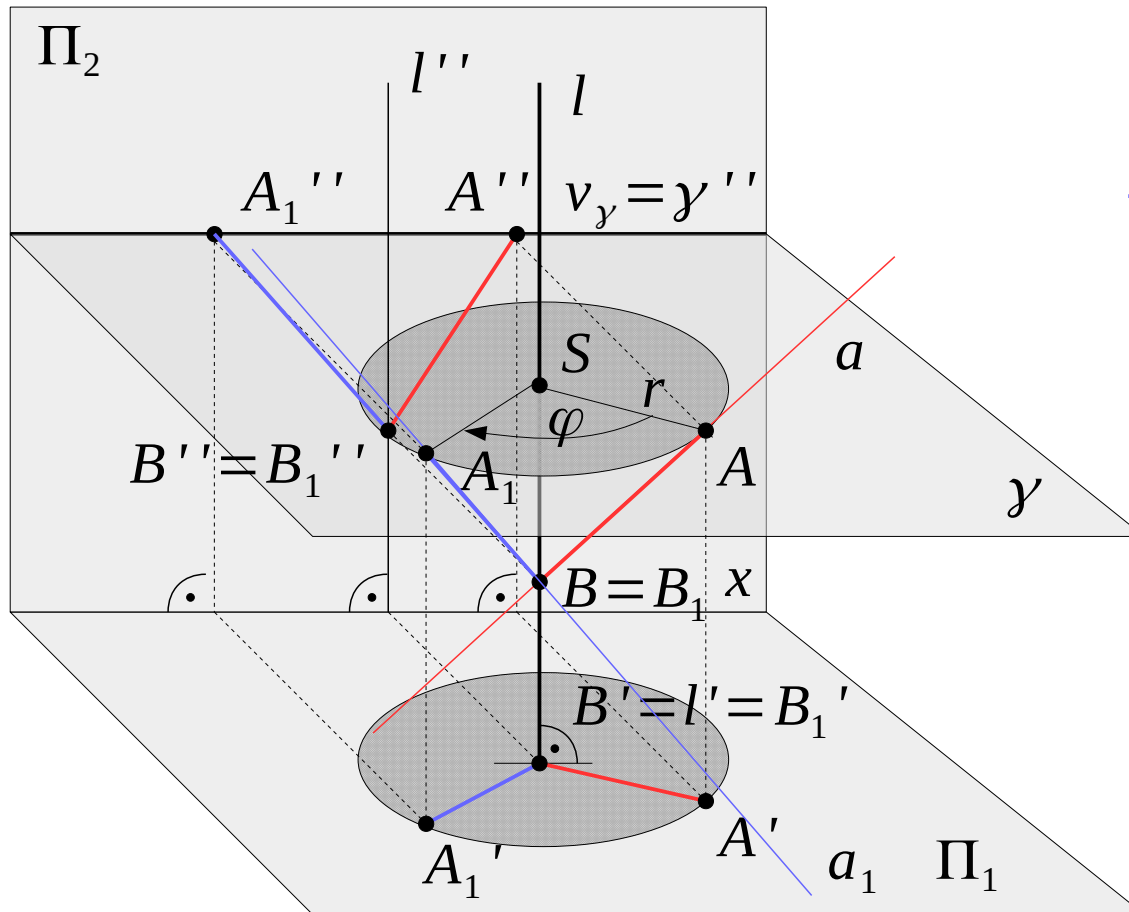
Obrót odcinka

Wyznaczyć rzeczywistą długość odcinka AB.



Ostatnim etapem jest wyznaczenie rzutu poziomego punktu B_1 , wiedząc że leży on na odpowiadającej mu płaszczyźnie obrotu.

Obrót prostej



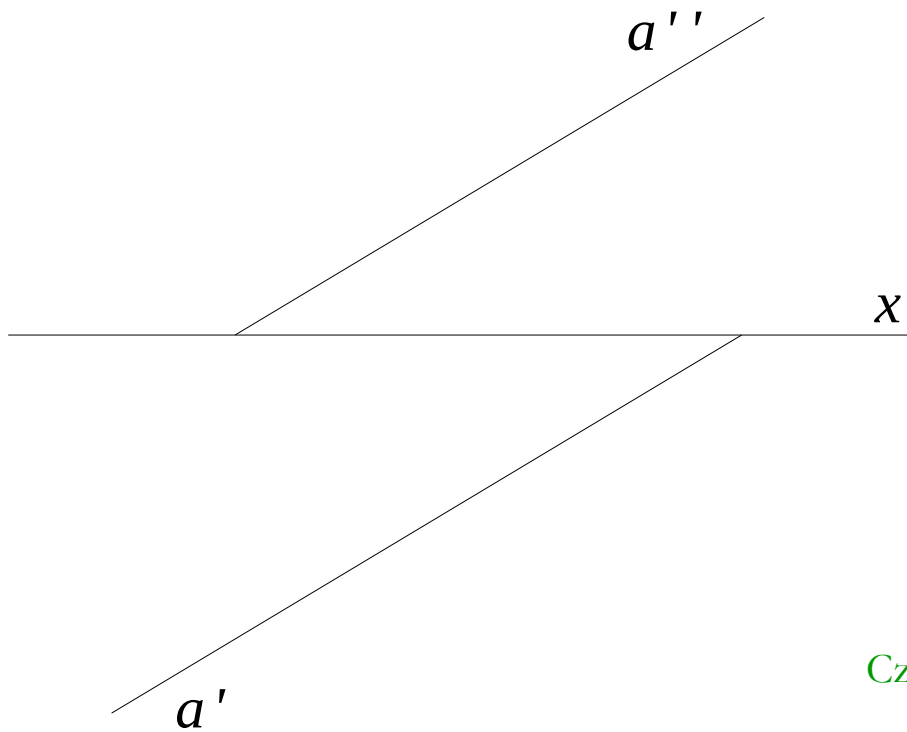
- prosta przed obrotem
- prosta po obrocie

Aby obrócić prostą należy obrócić na niej dwa punkty (odcinek).

Dalej postępujemy jak podczas obracania odcinka.

Obrót prostej

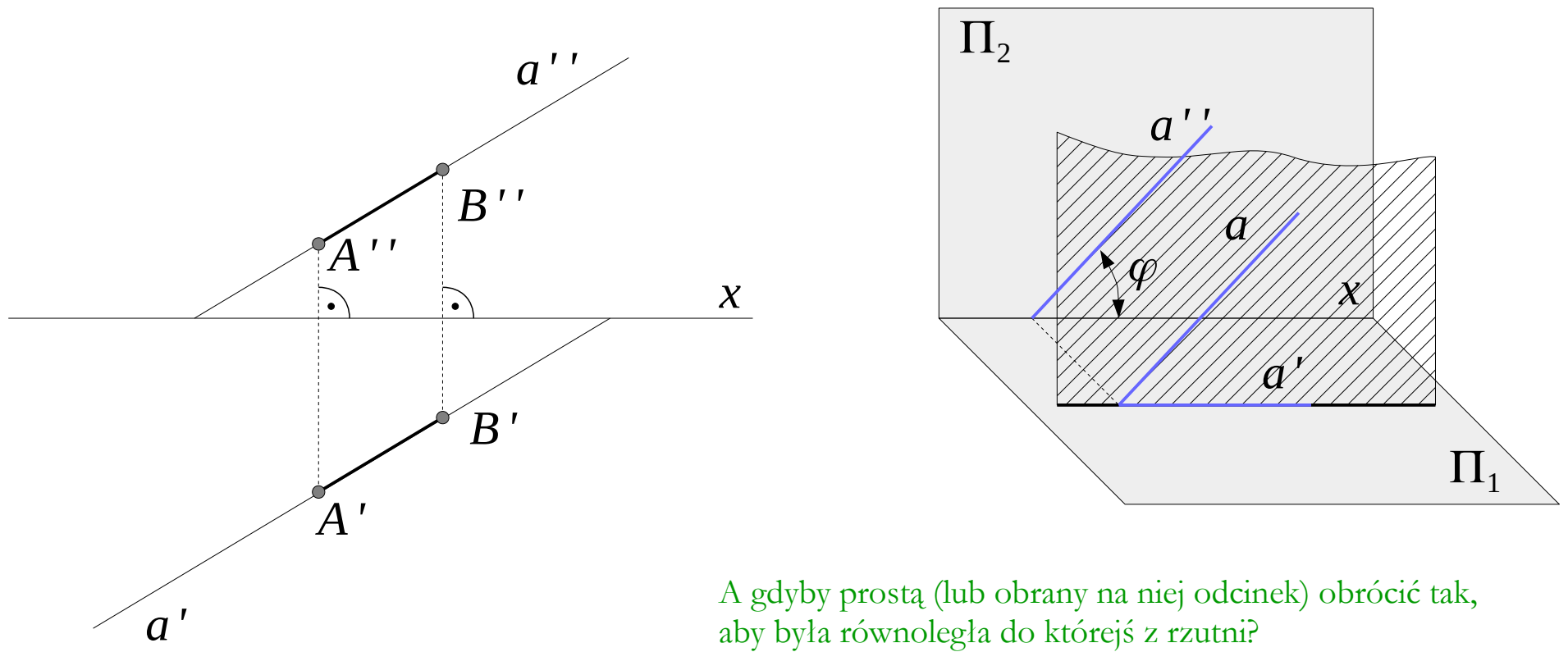
Wyznaczyć kąt nachylenia prostej a do rzutni Π_1 .



Czy na rysunku widać rzeczywiste kąty?

Obrót prostej

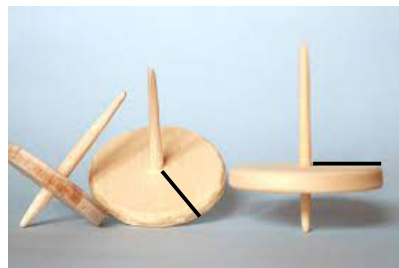
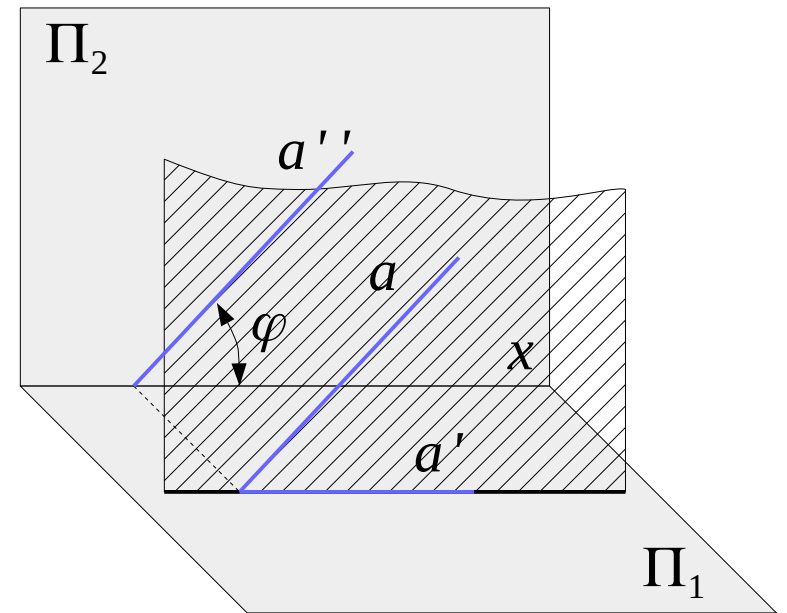
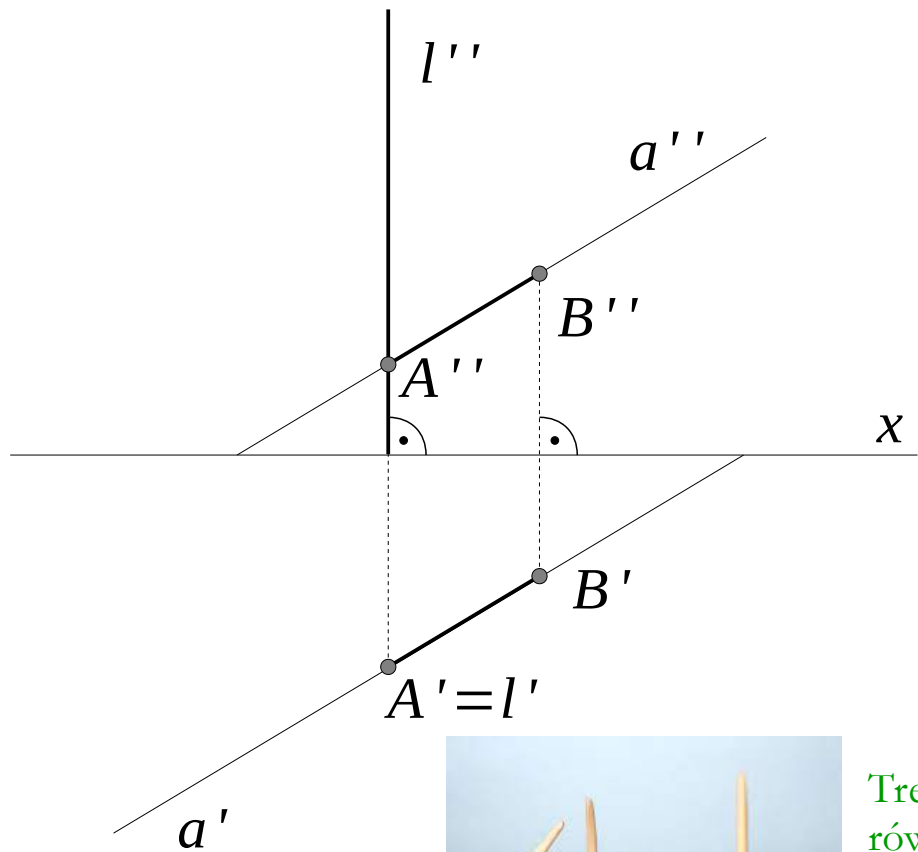
Wyznaczyć kąt nachylenia prostej a do rzutni Π_1 .



A gdyby prostą (lub obrany na niej odcinek) obrócić tak, aby była równoległa do którejś z rzutni?

Obrót prostej

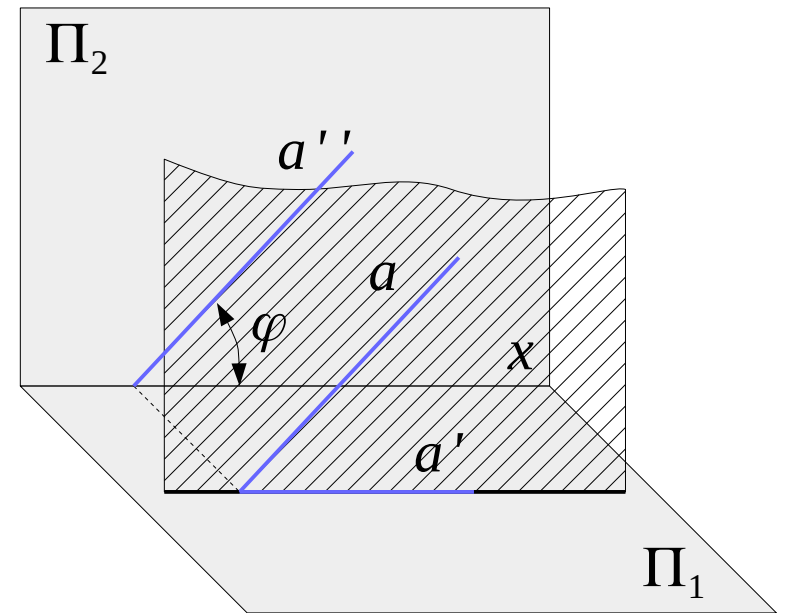
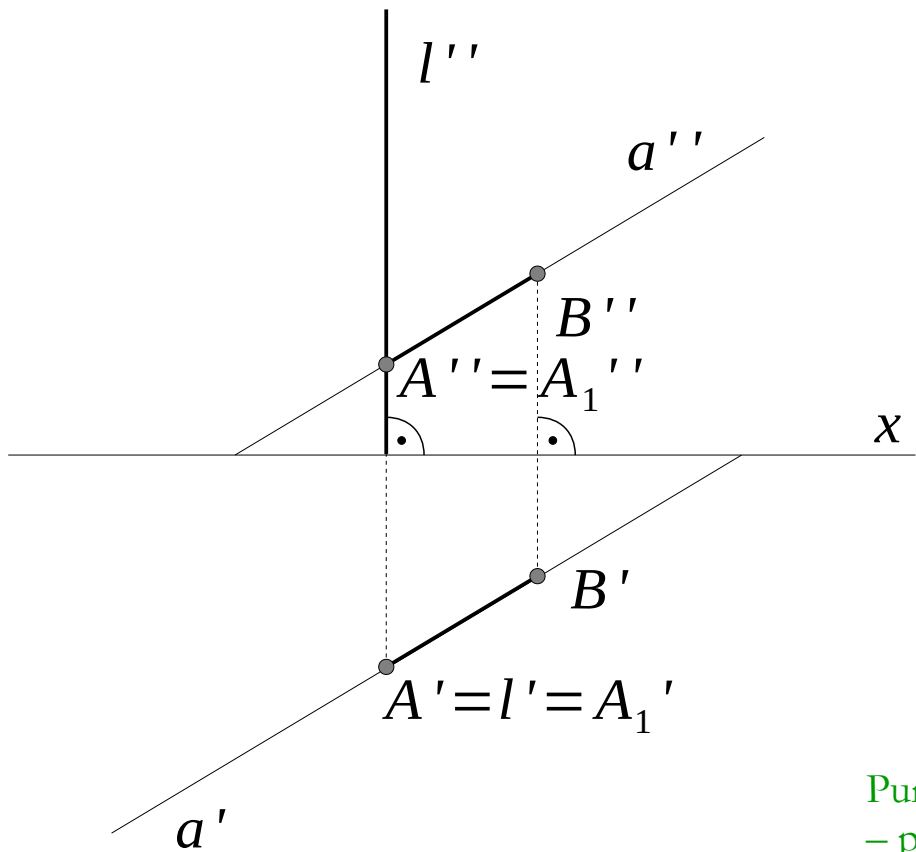
Wyznaczyć kąt nachylenia prostej a do rzutni Π_1 .



Treść zadania narzuca, że prosta po obrocie musi być równoległa do płaszczyzny pionowej, a zatem trzeba „pokręcić” rzutem poziomym prostej – oś obrotu musi być zatem prostą pionową.

Obrót prostej

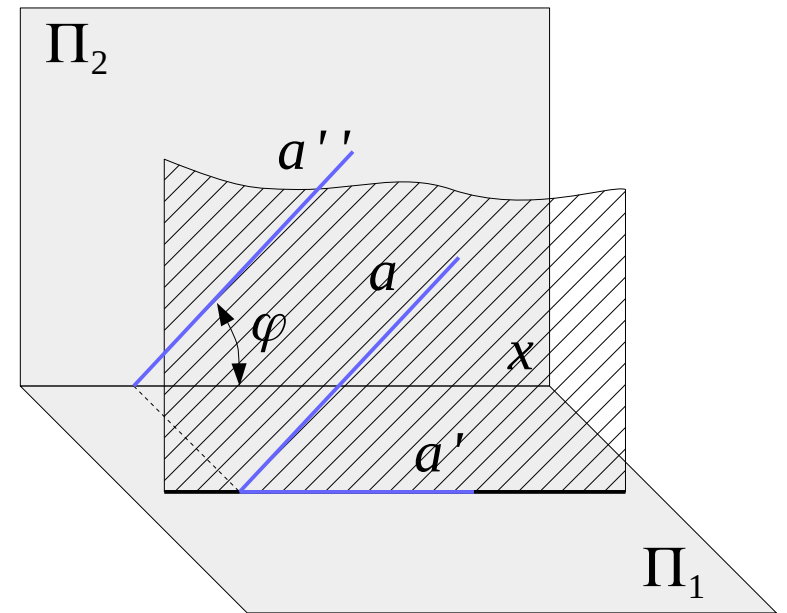
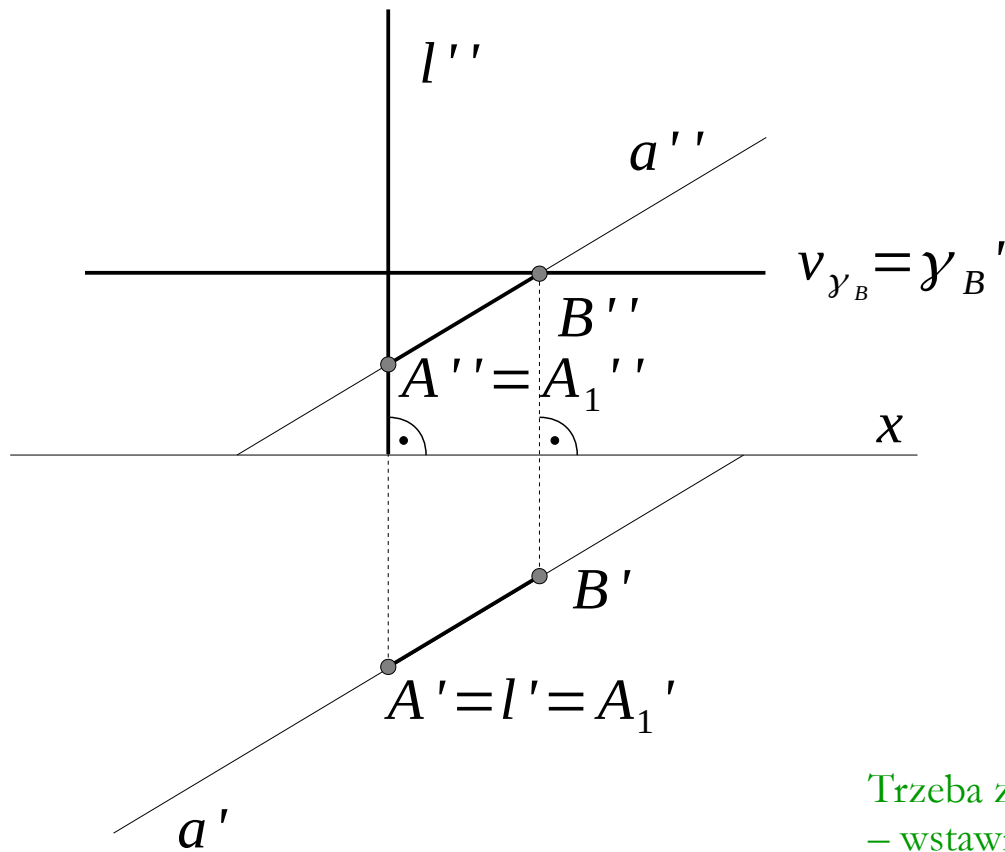
Wyznaczyć kąt nachylenia prostej a do rzutni Π_1 .



Punkt A nie zmieni położenia
– płaszczyznę obrotu punktu A można pominąć.

Obrót prostej

Wyznaczyć kąt nachylenia prostej a do rzutni Π_1 .

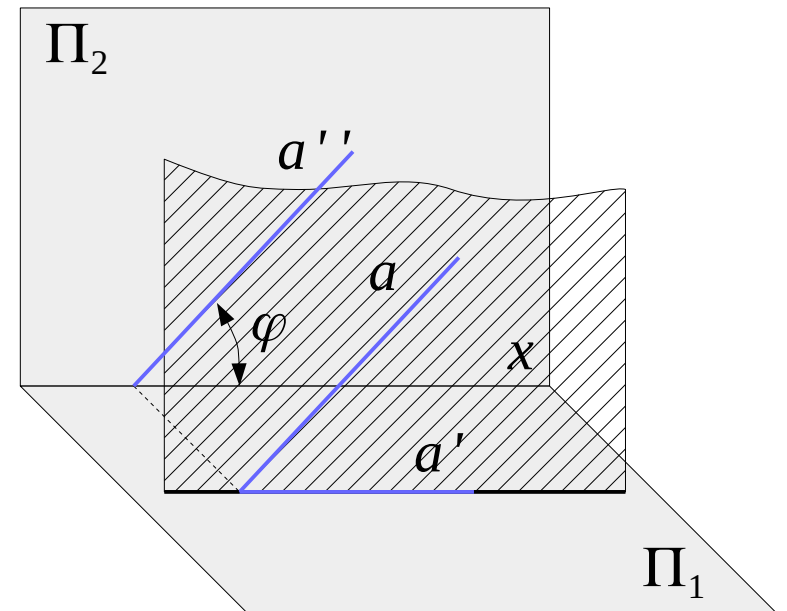
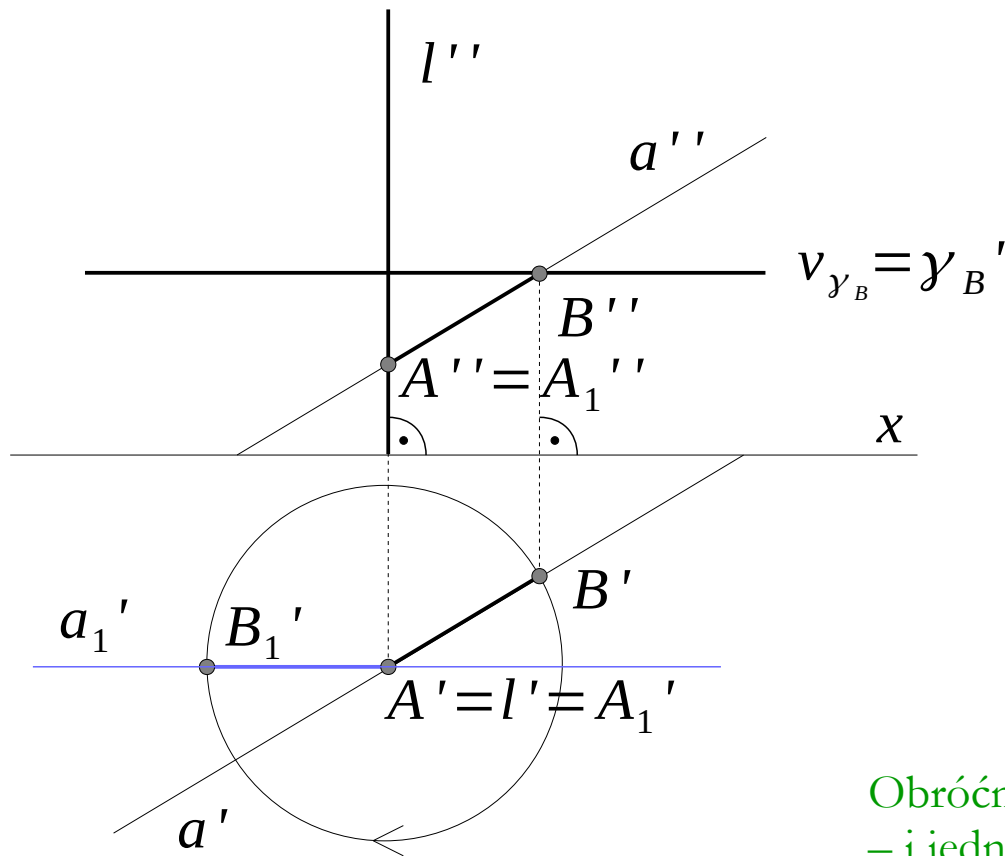


Trzeba zatem obrócić tylko punkt B
– wstawmy płaszczyznę obrotu punktu B .

Obrót prostej

Wyznaczyć kąt nachylenia prostej a do rzutni Π_1 .

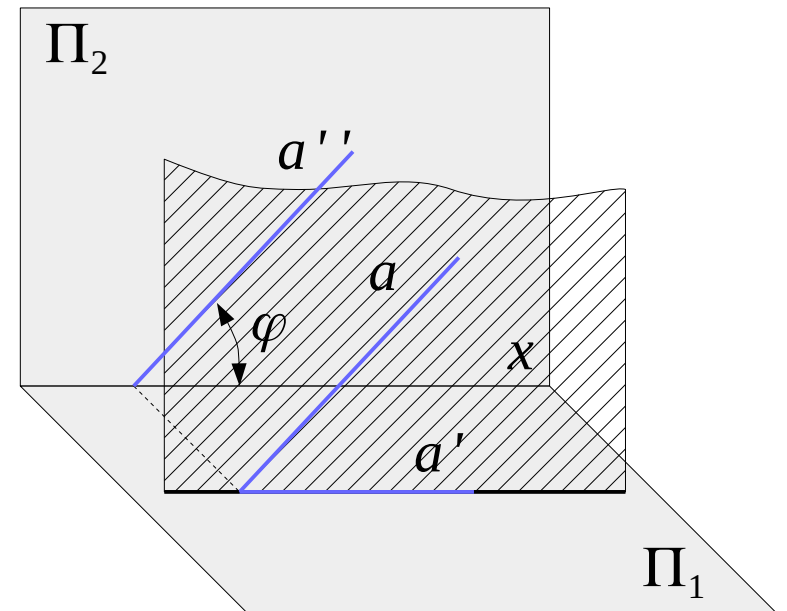
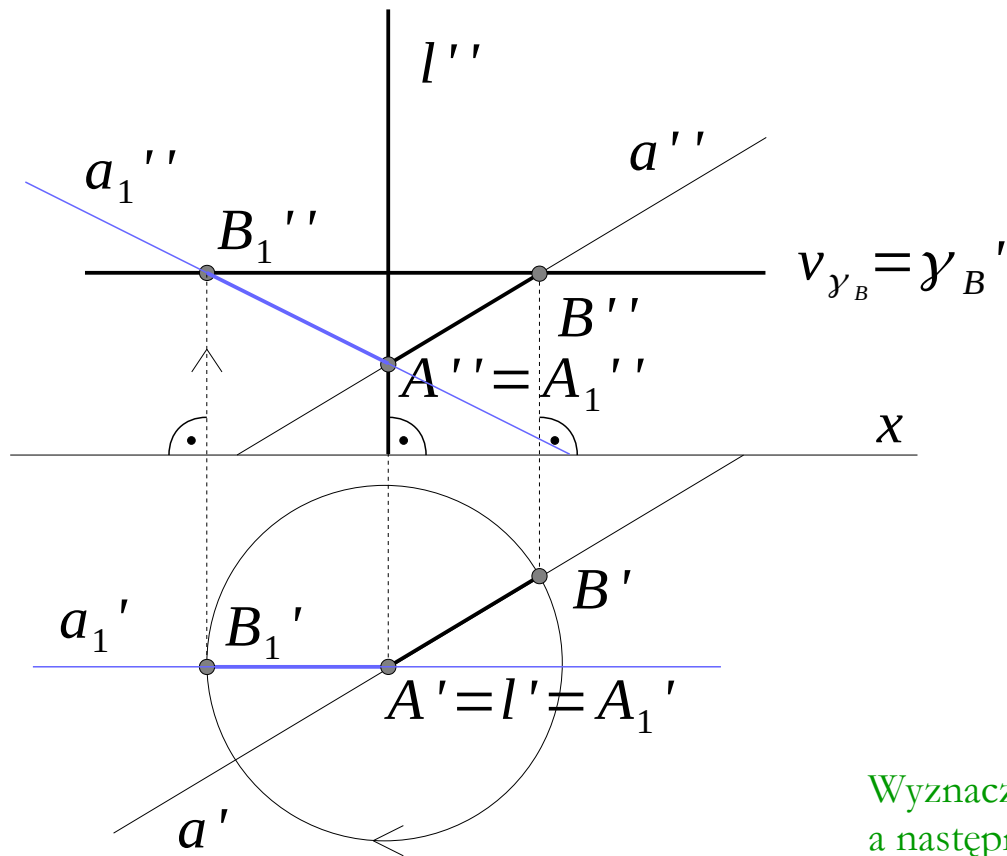
Istnieją dwa możliwe położenia punktu po obrocie – o wyborze decyduje dostępność miejsca.



Obróćmy punkt B tak, aby odcinek po obrocie – i jednocześnie rzut poziomy prostej a_1 – był równoległy do osi x .

Obrót prostej

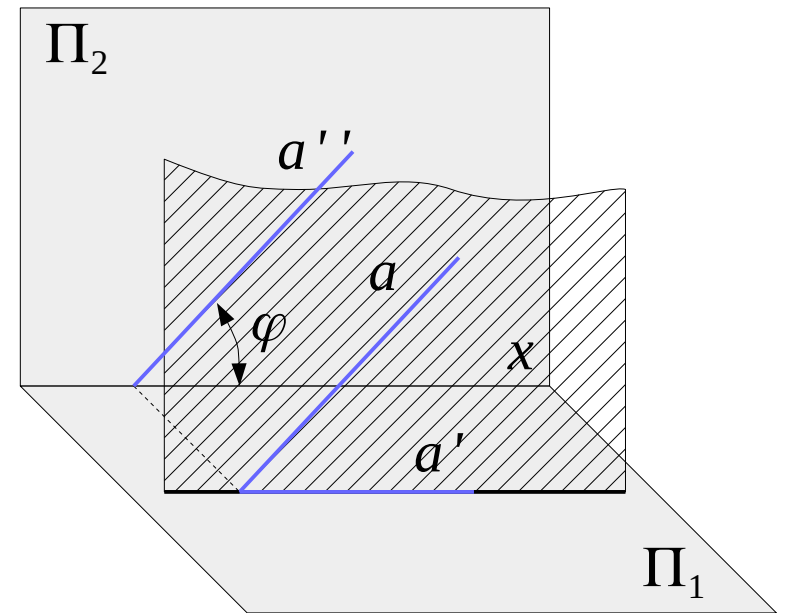
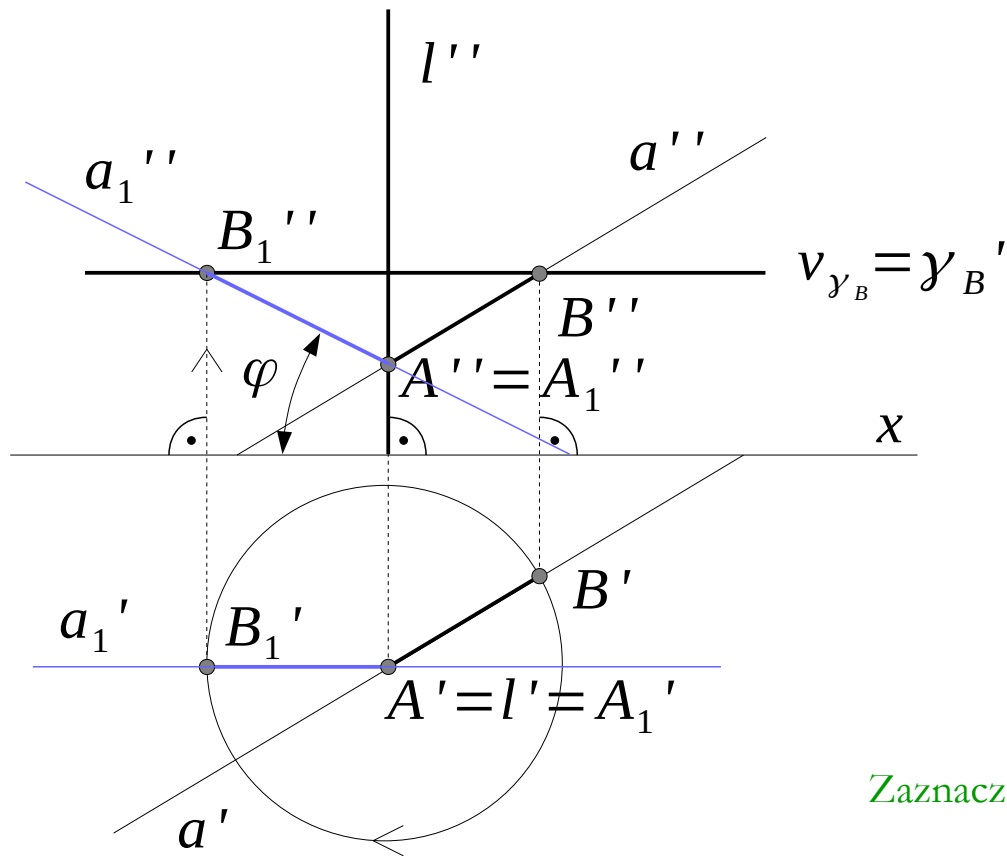
Wyznaczyć kąt nachylenia prostej a do rzutni Π_1 .



Wyznaczmy rzut pionowy punktu B_1 ,
a następnie rzut pionowy prostej a_1 .

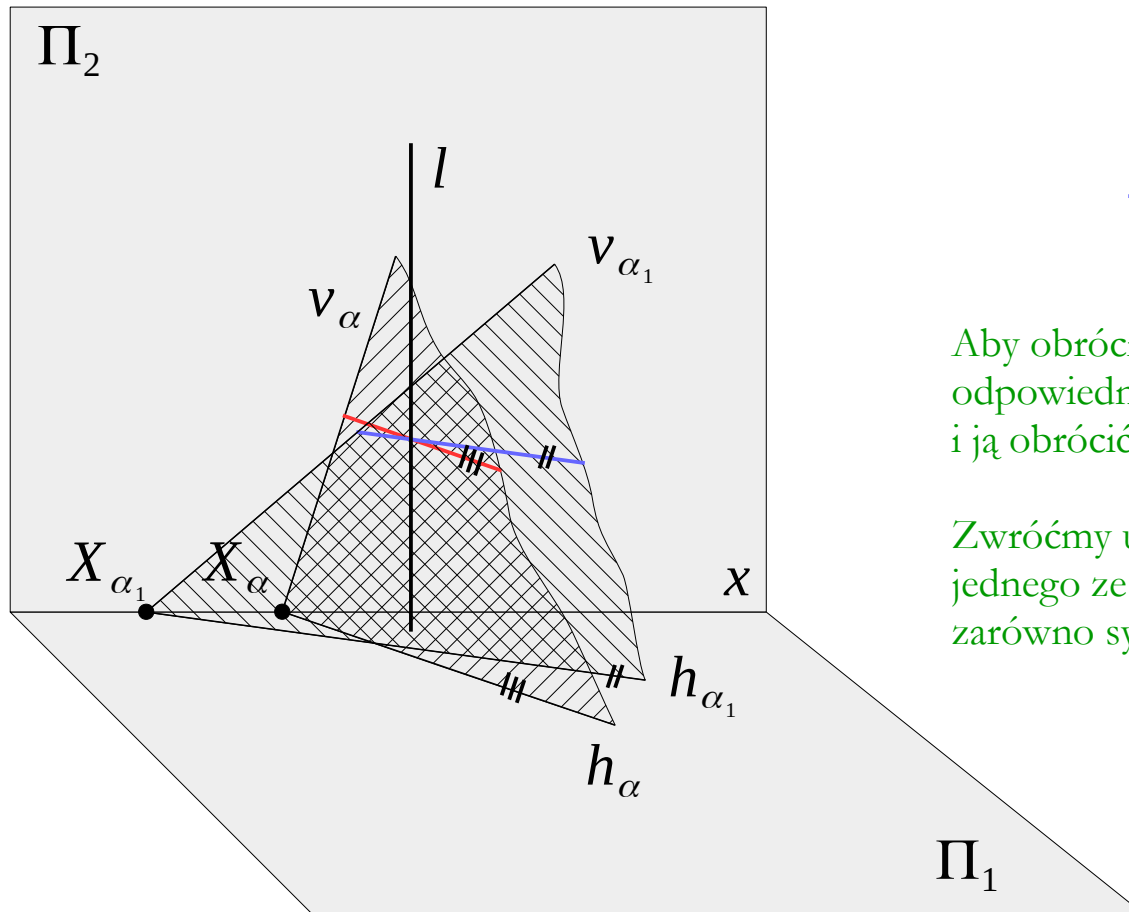
Obrót prostej

Wyznaczyć kąt nachylenia prostej a do rzutni Π_1 .



Zaznaczmy na rysunku szukany kąt.

Obrót płaszczyzny



- prosta przed obrotem
- prosta po obrocie

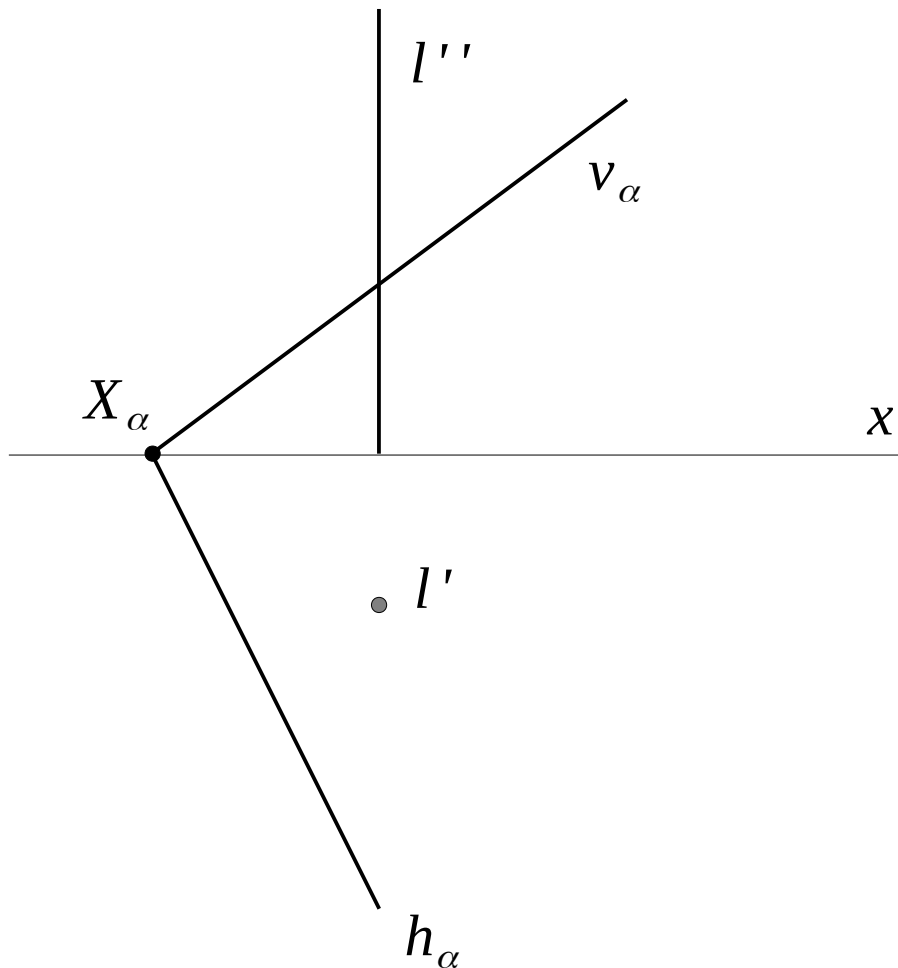
Aby obrócić płaszczyznę należy obrać na niej odpowiednią prostą szczególną: poziomą lub czołową i ją obrócić.

Zwróćmy uwagę, że prosta jest zawsze równoległa do jednego ze śladów płaszczyzny – uwaga ta dotyczy zarówno sytuacji przed obrotem jak i po obrocie.

Obrót płaszczyzny

Obrócić płaszczyznę α o kąt φ , w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara.

$\alpha(h_\alpha, v_\alpha)$

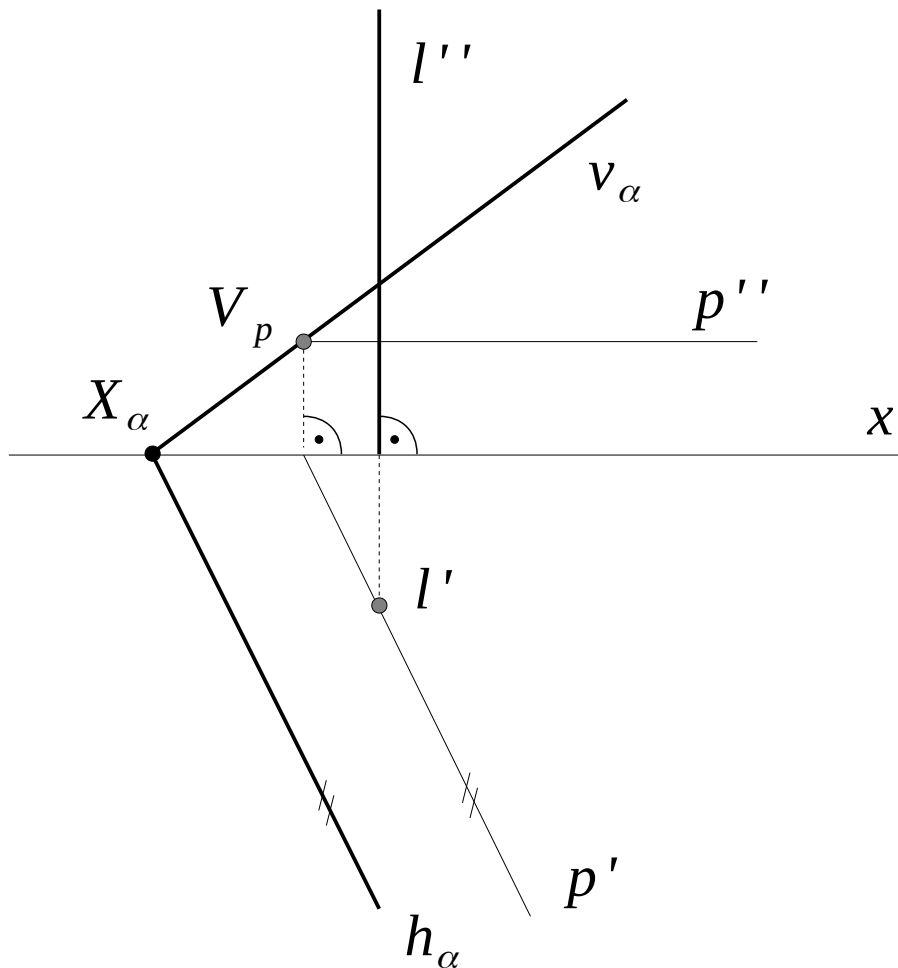


W tym przypadku oś obrotu jest podana
– nie trzeba więc w treści zadania dodawać,
wokół jakiej prostej ma być wykonany obrót.

Obrót płaszczyzny

Obrócić płaszczyznę α o kąt φ , w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara.

$\alpha(h_\alpha, v_\alpha)$

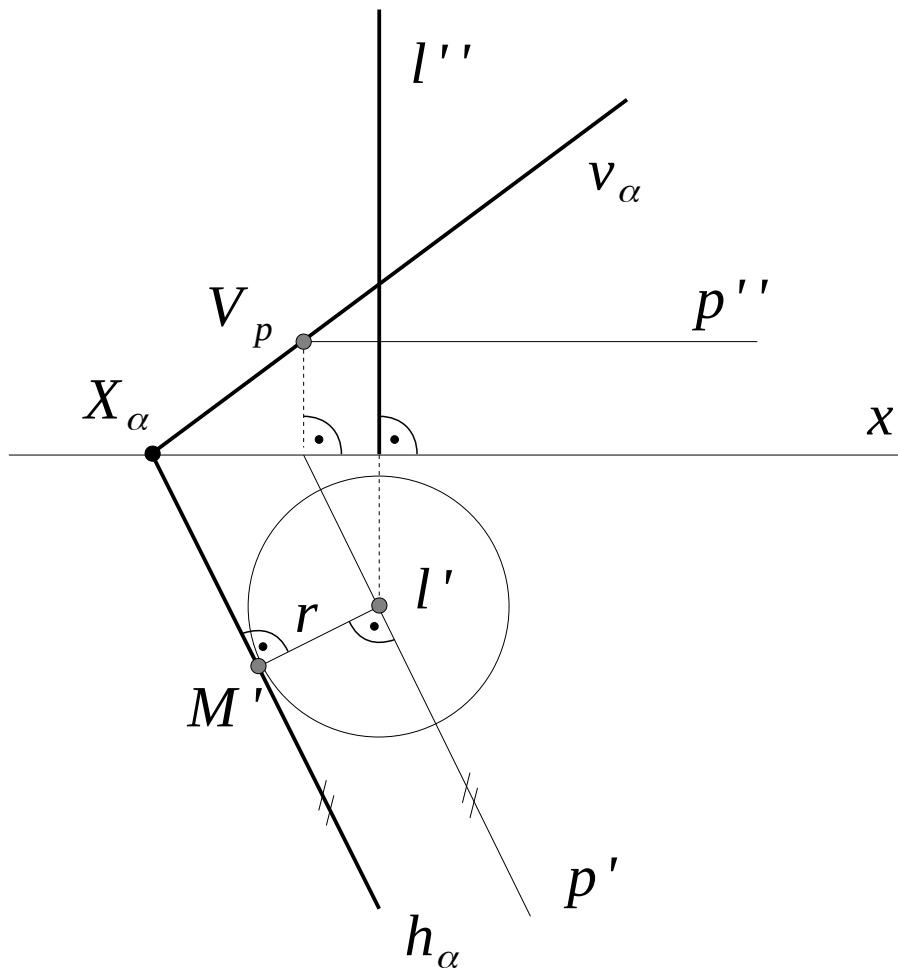


- Wstawiamy odpowiednią prostą szczególną (prostopadłą do osi obrotu) – tu musi to być prosta pozioma (istotne, aby przecinała się ona z osią obrotu).

Obrót płaszczyzny

Obrócić płaszczyznę α o kąt φ , w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara.

$\alpha(h_\alpha, v_\alpha)$

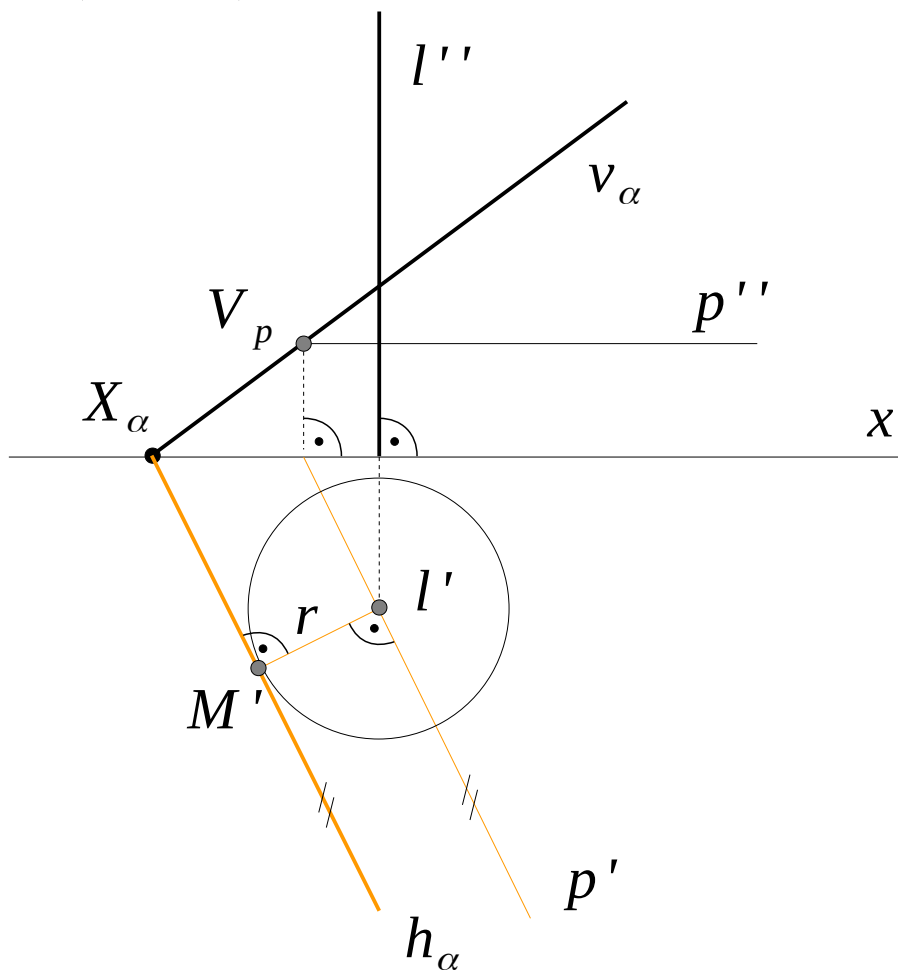


- Obieramy na śladzie poziomym punkt pomocniczy – tu jest to punkt M – tak, aby promień obrotu był prostopadły do śladu poziomego płaszczyzny.

Obrót płaszczyzny

Obrócić płaszczyznę α o kąt φ , w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara.

$\alpha(h_\alpha, v_\alpha)$

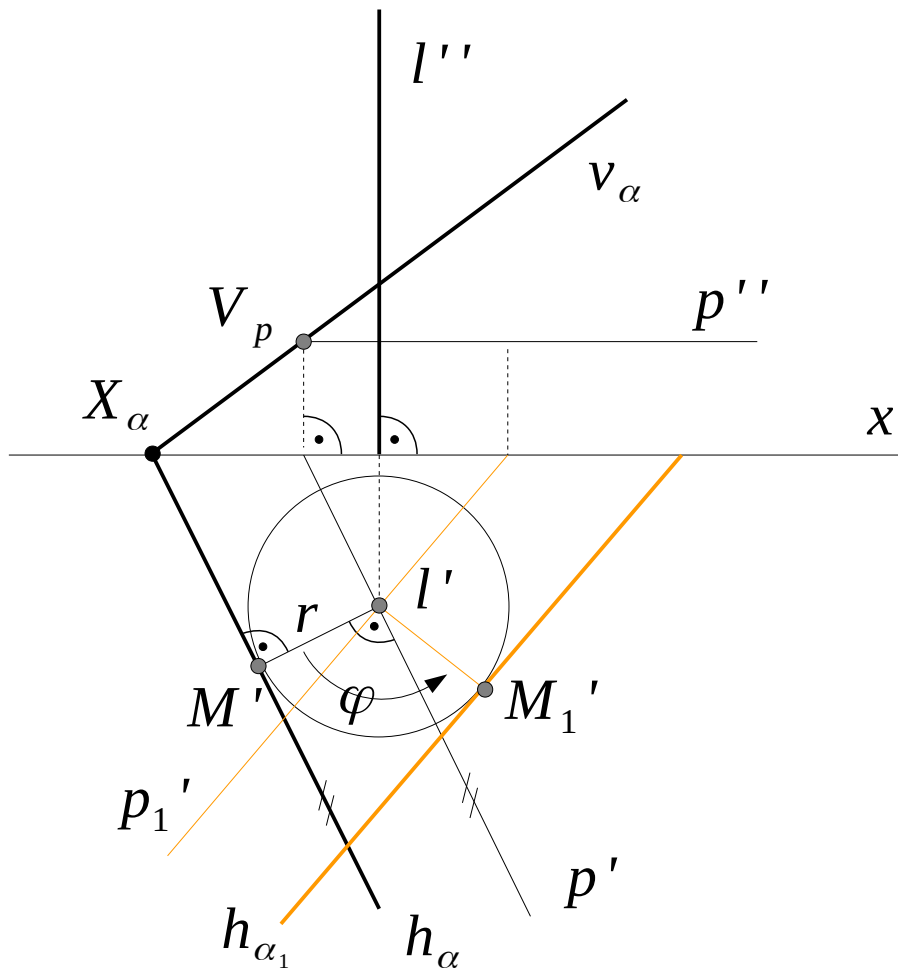


Zwróćmy uwagę na wyróżnione elementy – tworzą one kształt litery H.

Obrót płaszczyzny

Obrócić płaszczyznę α o kąt φ , w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara.

$\alpha(h_\alpha, v_\alpha)$

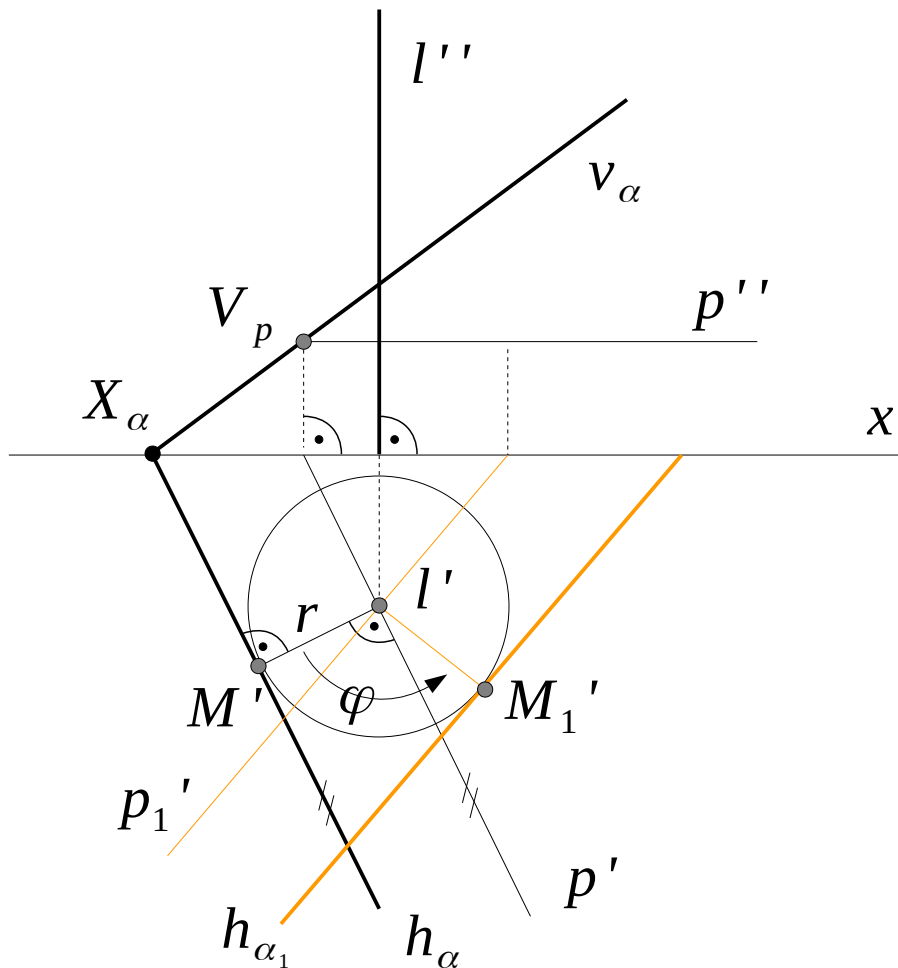


- Obracamy punkt M o zadany kąt – a razem z nim ślad poziomy płaszczyzny oraz rzut poziomy prostej poziomej.

Obrót płaszczyzny

Obrócić płaszczyznę α o kąt φ , w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara.

$\alpha(h_\alpha, v_\alpha)$



Zwróćmy uwagę na wyróżnione elementy – wszystkie związki pozostały niezmiennie (równoległości i prostopadłości).

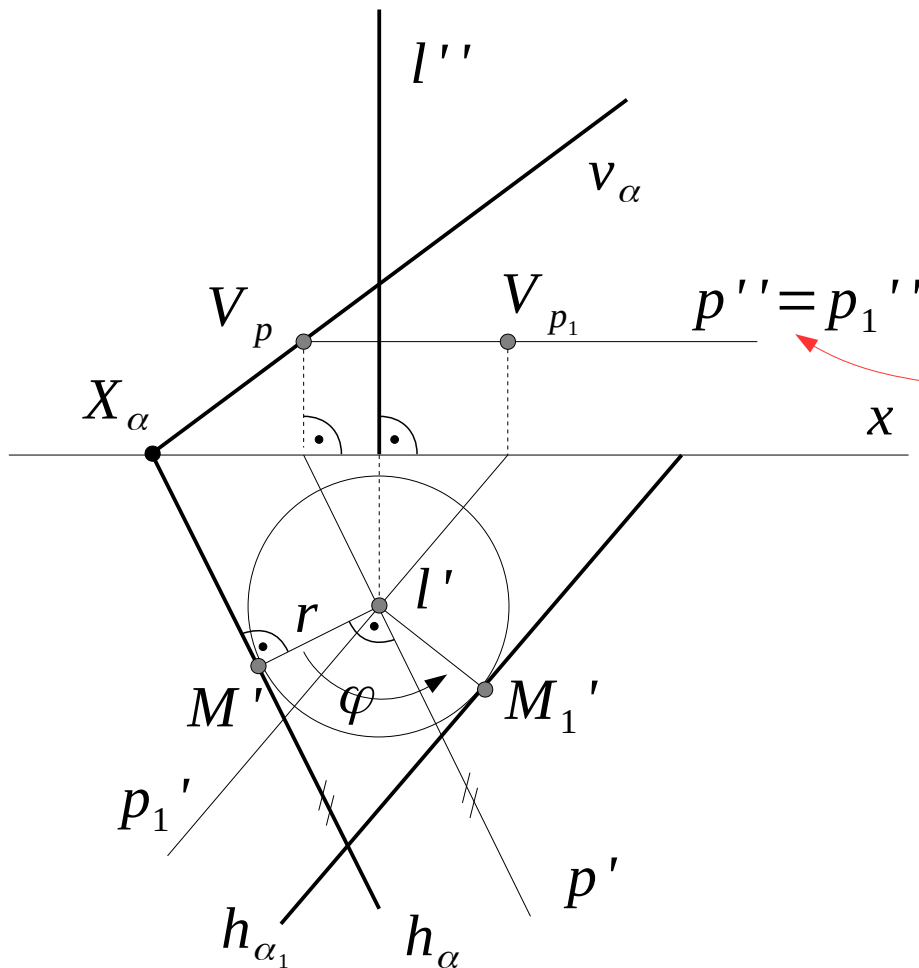
W efekcie obrotu uzyskujemy:

- nowe położenie śladu poziomego płaszczyzny,
- nowe położenie rzutu poziomego prostej p .

Obrót płaszczyzny

Obrócić płaszczyznę α o kąt φ , w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara.

$\alpha(h_\alpha, v_\alpha)$



- Wyznaczamy rzut pionowy prostej p_1 .
- Wyznaczamy ślad pionowy prostej p_1 .

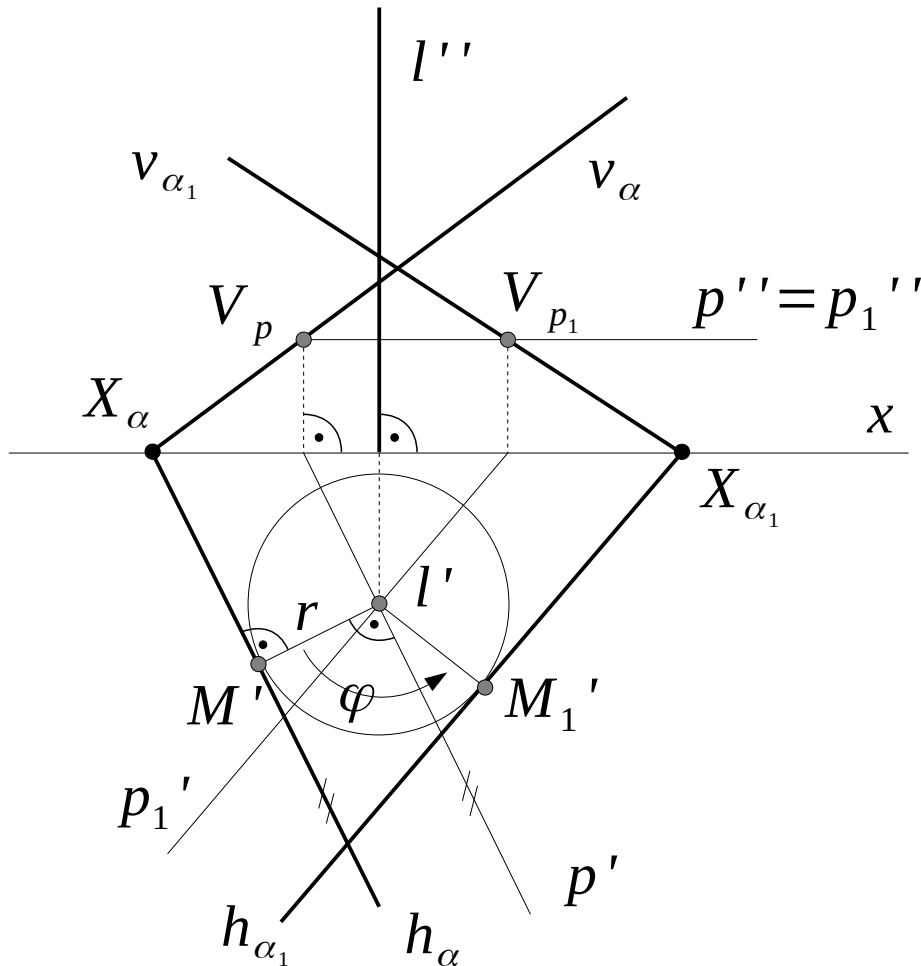
Prosta pozioma obracana wokół osi pionowej cały czas jest prostą poziomą.



Obrót płaszczyzny

Obrócić płaszczyznę o kąt φ , w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara.

$\alpha(h_\alpha, v_\alpha)$



- Wyznaczamy drugi ślad płaszczyzny po obrocie – wiadomo, że przechodzi on przez nowy węzeł oraz ślad pionowy prostej p_1 .

Podsumowanie

Zagadnienia:

Obrót punktu, odcinka, prostej i płaszczyzny.

UNIVERSITY OF WARMIA AND MAZURY IN OLSZTYN
The Faculty of Technical Sciences
POLAND, 10-957 Olsztyn, M. Oczapowskiego 11
tel.: (48)(89) 5-23-32-40, fax: (48)(89) 5-23-32-55
URL: <http://www.uwm.edu.pl/edu/sobieski/> (in Polish)



Dziękuję za uwagę

Wojciech Sobieski

Olsztyn, 2021