



GEOMETRIA WYKREŚLNA

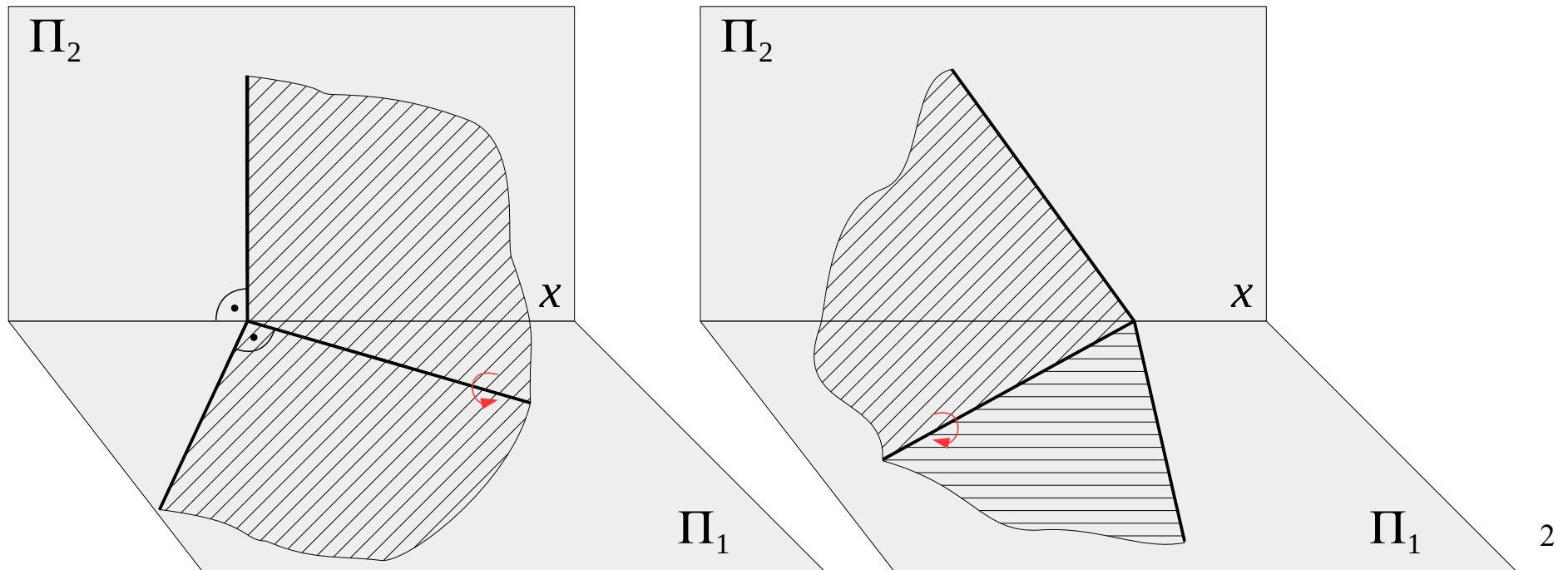
Kłady.

Kład

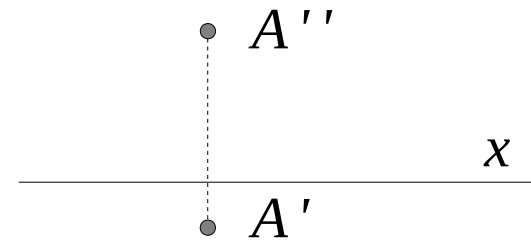
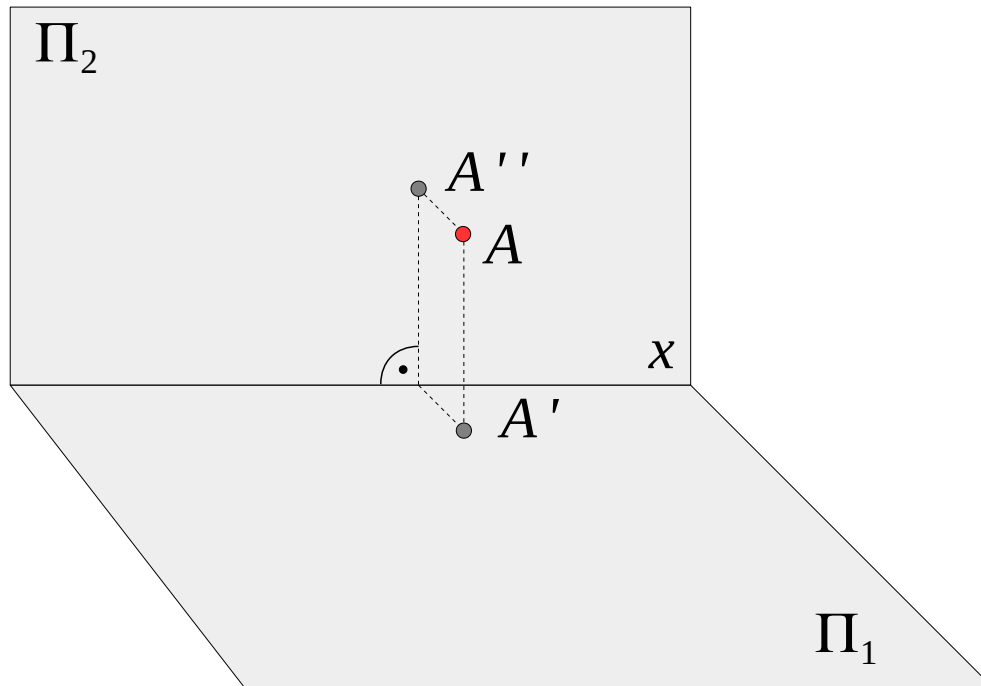
Kład – technika rysunkowa polegająca na obrócenia płaszczyzny wokół jednego ze śladów, tak aby pokryła się ona z którąś z rzutni. W kładach wszystkie kształty, wymiary i kąty są rzeczywiste.

Rozróżnia się kłady:

- proste – gdy płaszczyzną kładzioną jest płaszczyzna rzutująca (po lewej),
- złożone – gdy płaszczyzną kładzioną jest płaszczyzna dowolna (po prawej).



Kład prosty punktu

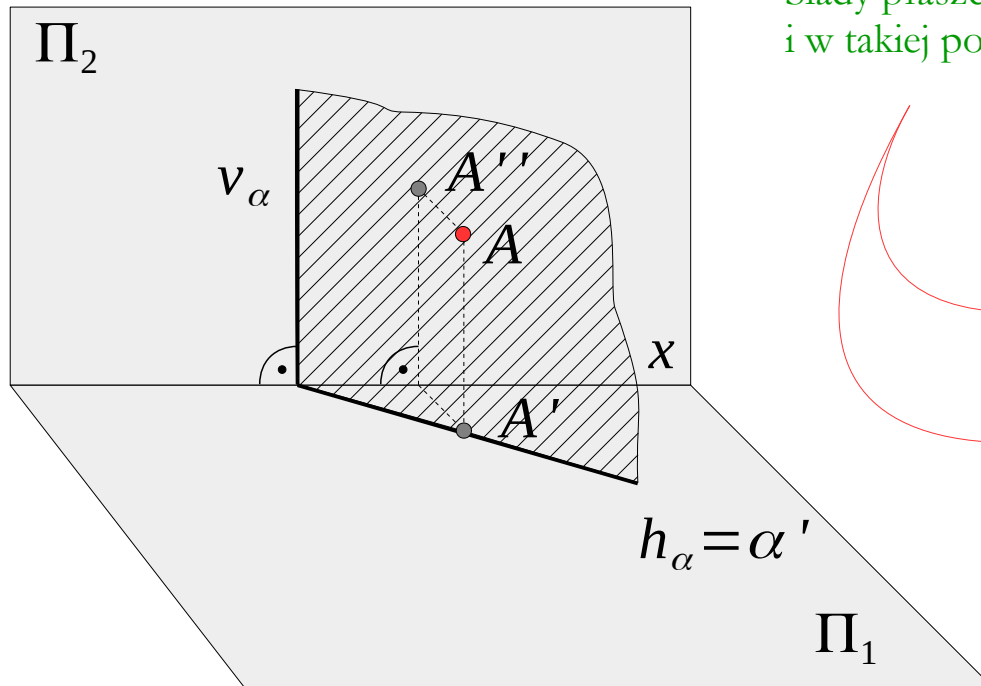


Istota kładów prostych (dotyczy wszelkich obiektów, nie tylko punktów):

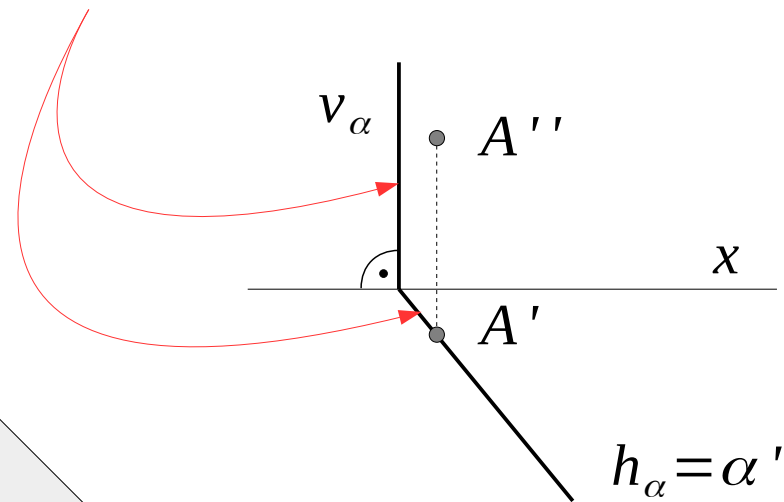
- wstawiamy dodatkową płaszczyznę poziomo-rzutującą lub pionowo-rzutującą, tak aby obiekt (np. punkt) na niej leżał.



Kład prosty punktu



Ślady płaszczyzny traktujemy jak sztywny element i w takiej pozycji je kładziemy.

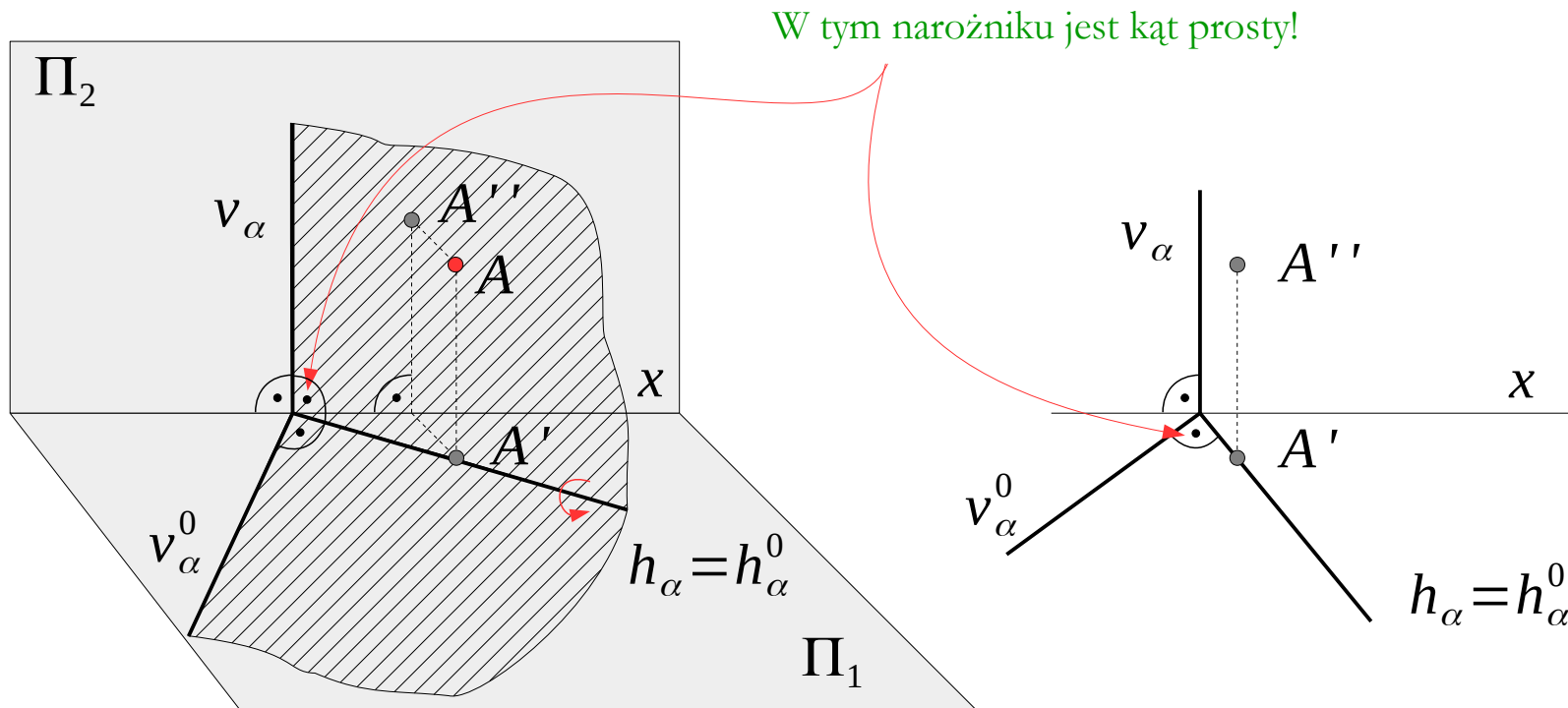


Istota kładów prostych (dotyczy wszelkich obiektów, nie tylko punktów):

- wstawiamy dodatkową płaszczyznę poziomo-rzutującą lub pionowo-rzutującą, tak aby obiekt (np. punkt) na niej leżał.



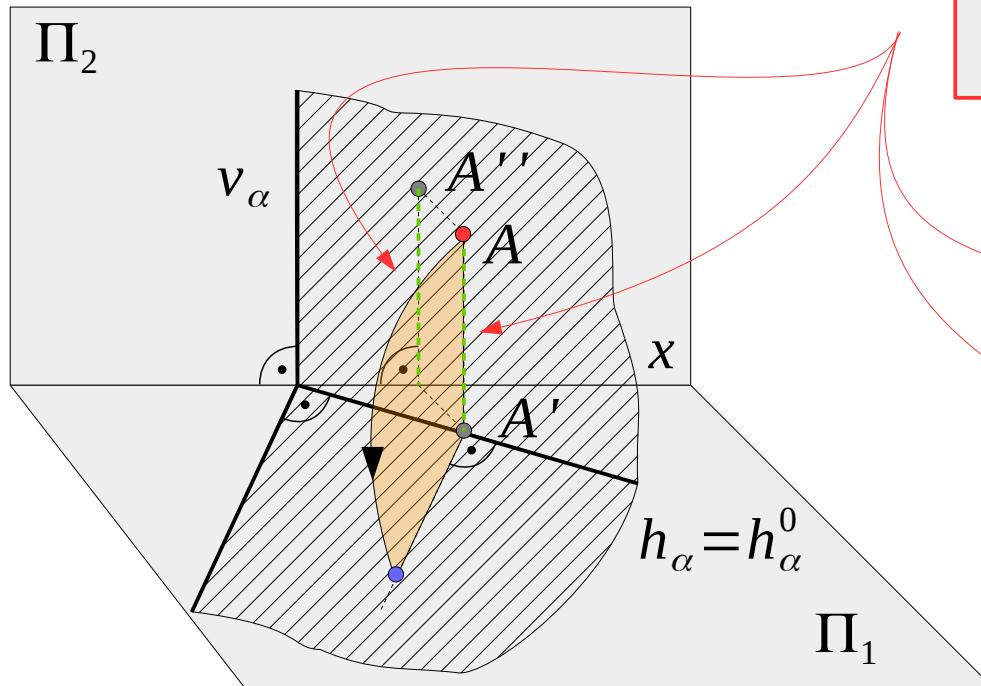
Kład prosty punktu



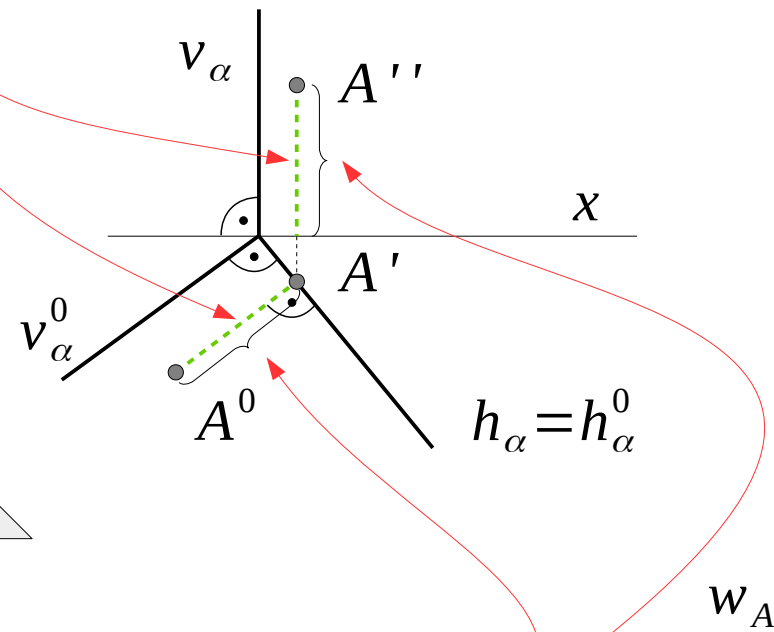
Istota kładów prostych (dotyczy wszelkich obiektów, nie tylko punktów):

- obracamy płaszczyznę wokół śladu, który nie jest prostopadły do osi x tak, aby płaszczyzna pokryła się z rzutnią.

Kład prosty punktu



UWAGA: w kładach prostych promień obrotu równa się wysokości lub głębokości punktu!

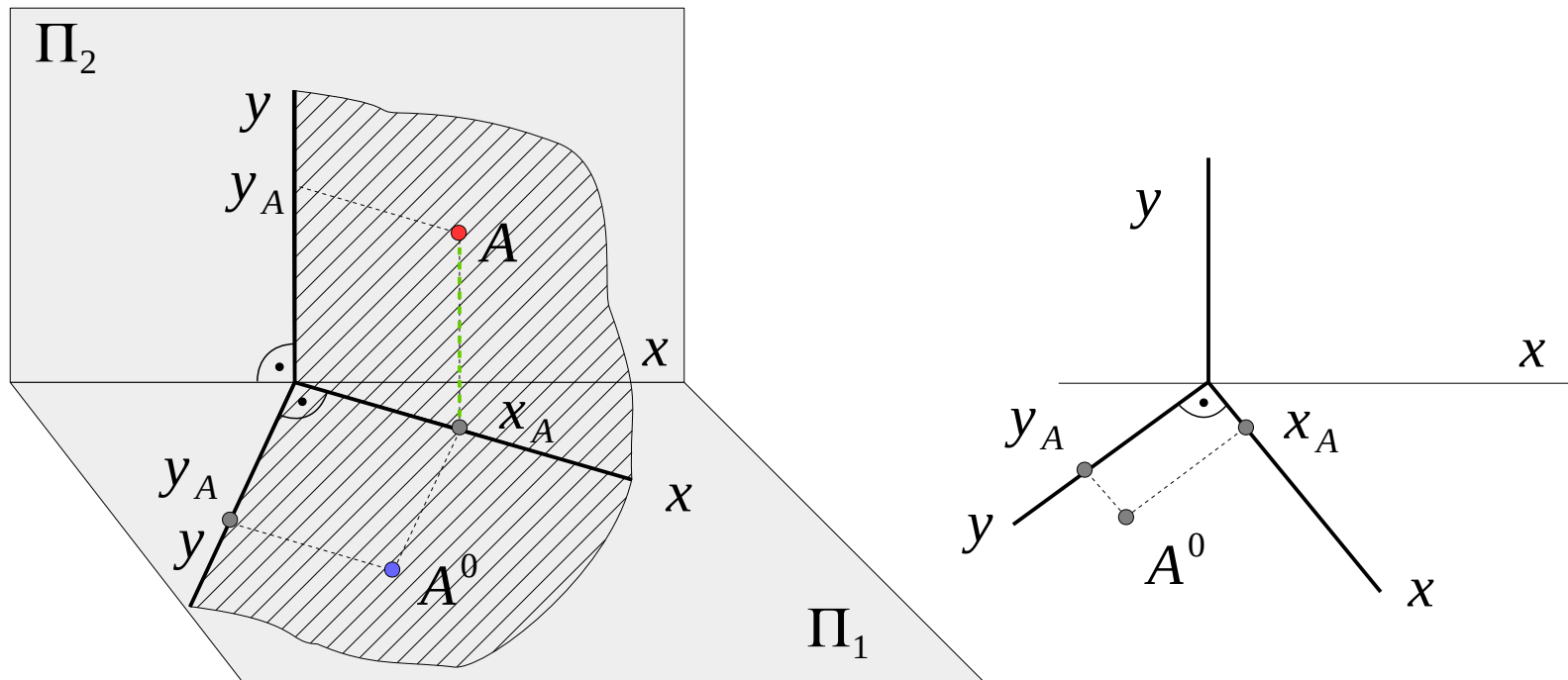


Istota kładów prostych (dotyczy wszelkich obiektów, nie tylko punktów):

- wyznaczany w kładzie położenia elementów, które leżą na płaszczyźnie (będą się one obracały razem z płaszczyzną).

Na rysunkach odległości zaznaczamy klamerkami.

Kład prosty punktu

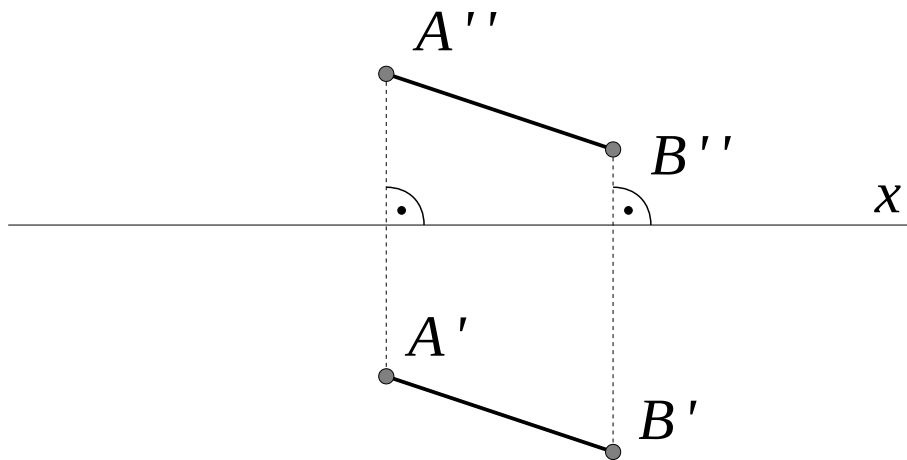


Wyobraźmy sobie na chwilę, że ślady płaszczyzny to osie prostokątnego układu współrzędnych (albo odległości liczone od narożnika kartki papieru): niech położenie punktu A określają współrzędne x_A i y_A .

Zwróćmy uwagę, że położenie punktu w układzie jest takie samo niezależnie od tego, czy układ umieszczony jest pionowo (kartka ustawiona pionowo), czy też poziomo (kartka położona na biurku).

Kład prosty odcinka

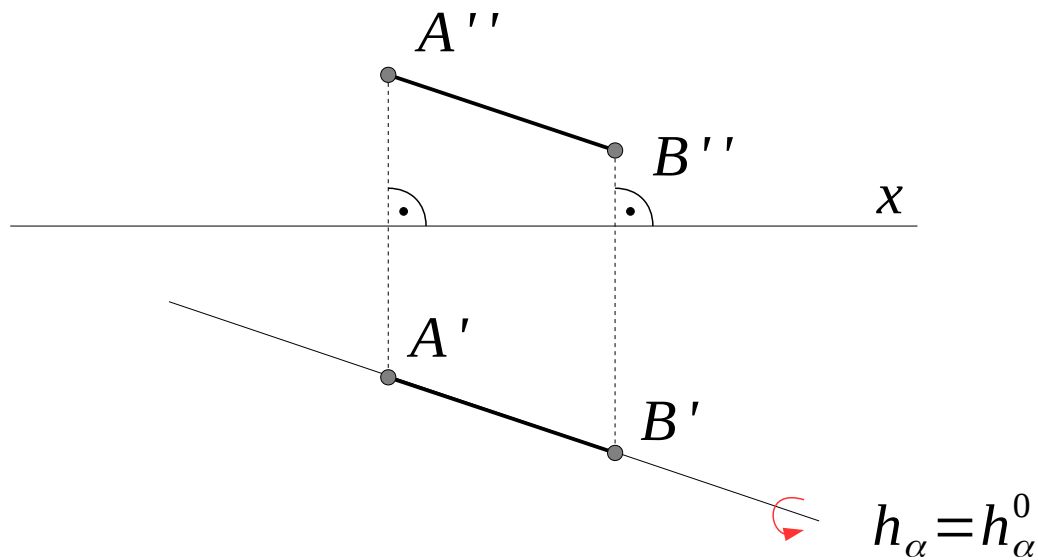
Wykonać kład odcinka na rzutnię poziomą i wyznaczyć jego rzeczywistą długość.



Kład prosty odcinka

Wykonać kład odcinka na rzutnię poziomą i wyznaczyć jego rzeczywistą długość.

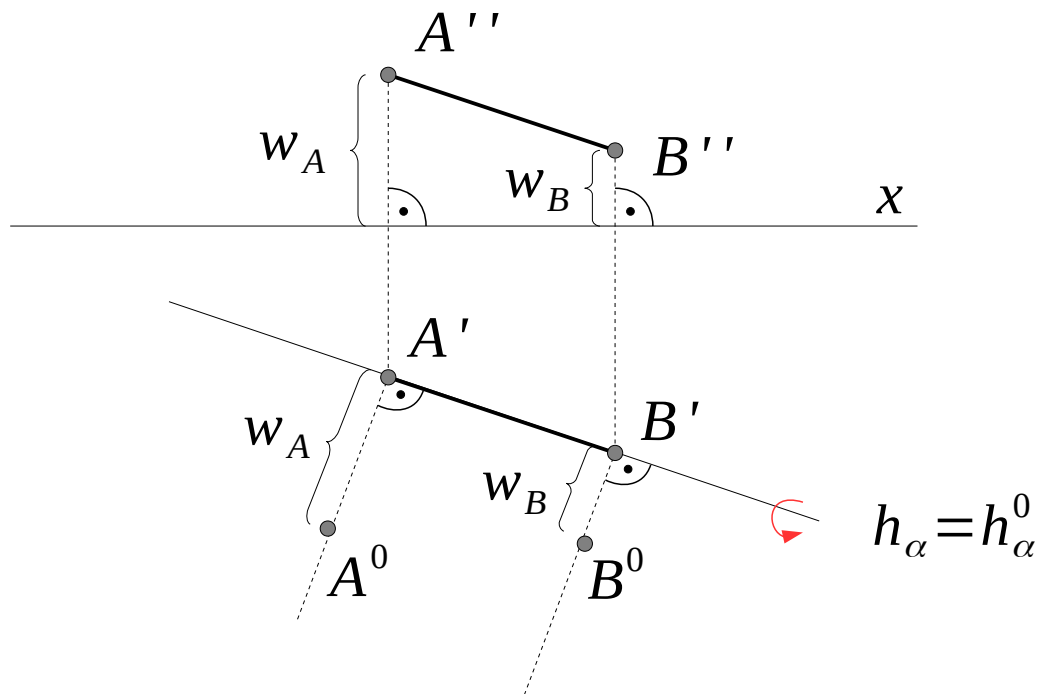
- Wstawiamy płaszczyznę poziomo-rzutuującą (co wynika z treści zadania).



Zwróćmy uwagę, że w omówionej poprzednio konstrukcji kład śladu pionowego do niczego się nie przydał – dlatego czasami można go nie rysować.

Kład prosty odcinka

Wykonać kład odcinka na rzutnię poziomą i wyznaczyć jego rzeczywistą długość.



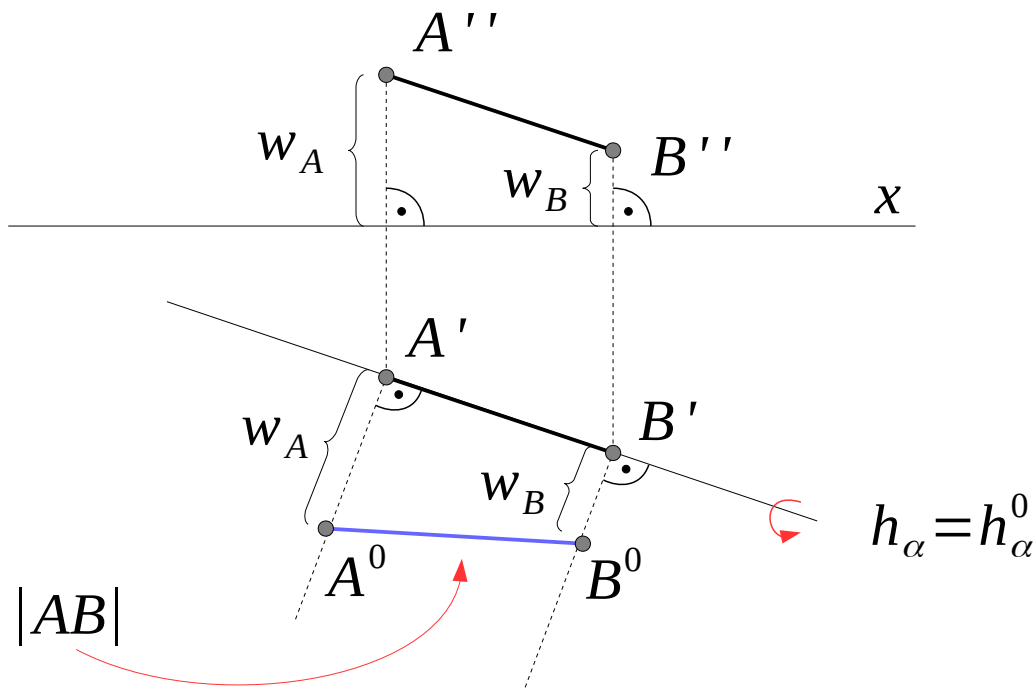
- Na „odnoszących” odmierzamy odpowiednie wymiary (w tym przypadku są to wysokości punktów A i B).

„Odnoszące” to w rzeczywistości ślady płaszczyzn obrotu obracanych punktów.

Kład prosty odcinka

Wykonać kład odcinka na rzutnię poziomą i wyznaczyć jego rzeczywistą długość.

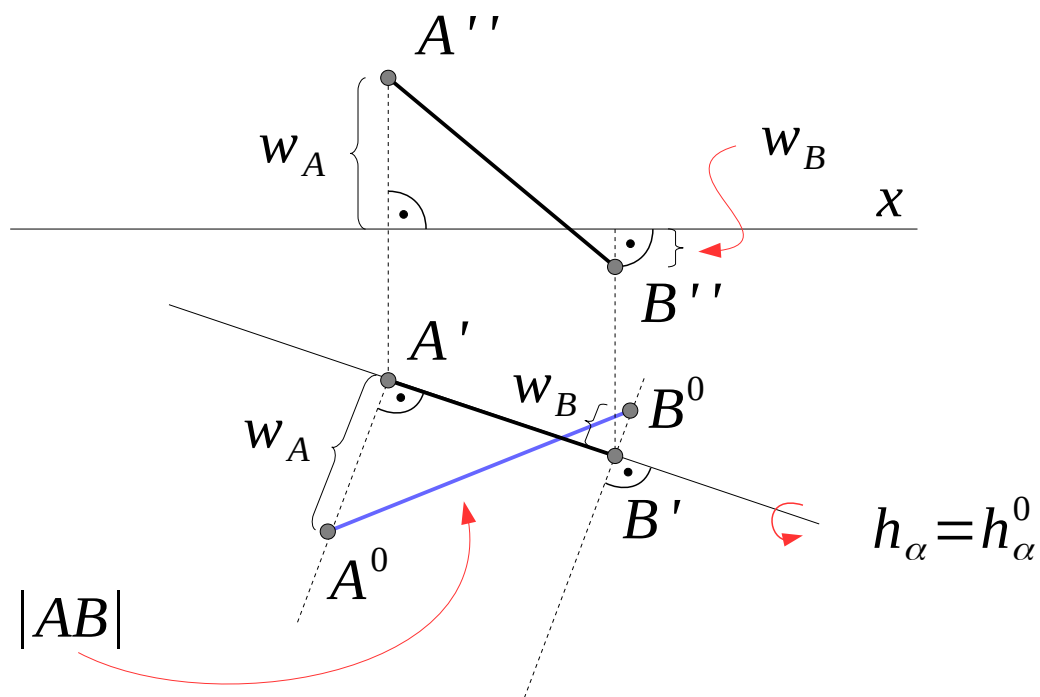
- Zaznaczamy klady punktów A i B oraz kład odcinka.



W kładzie wszystkie wymiary i kąty są rzeczywiste, np. długość odcinka.

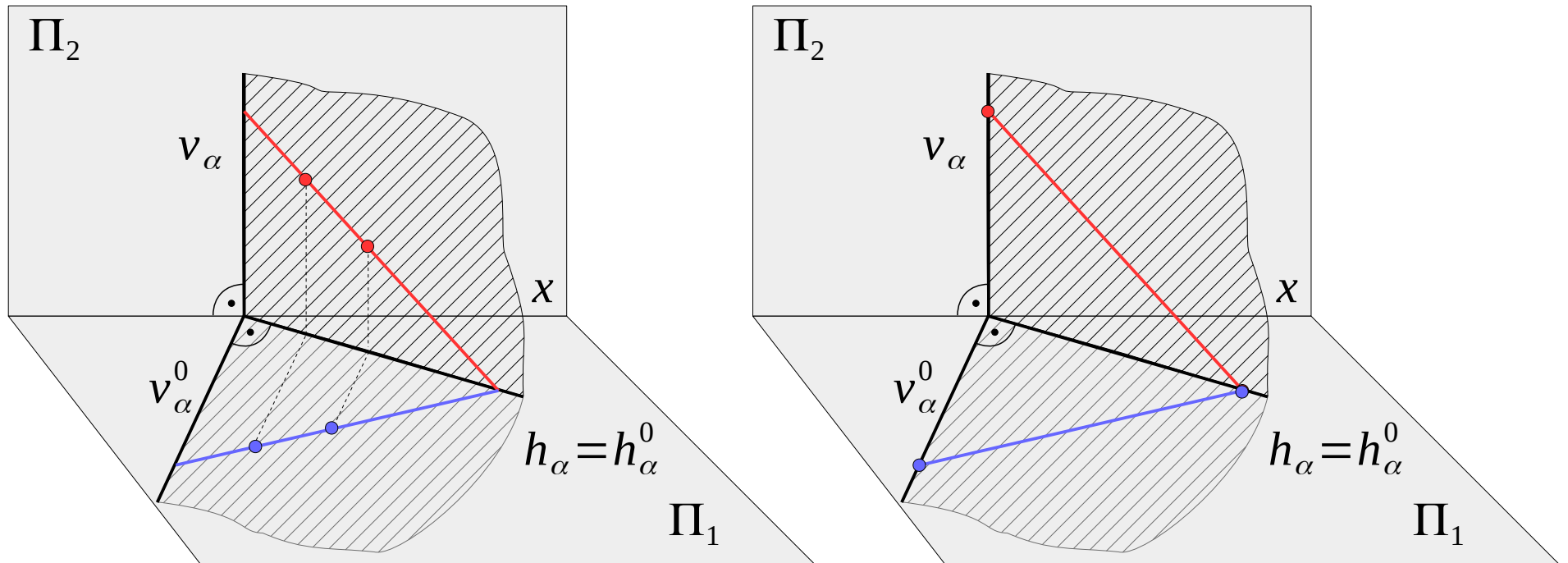
Kład prosty odcinka

Wykonać kład odcinka na rzutnię poziomą i wyznaczyć jego rzeczywistą długość.



UWAGA: może się zdarzyć, że wysokość jednego punktu będzie dodatnia, a innego ujemna – trzeba to wówczas uwzględnić!

Kład prosty prostej

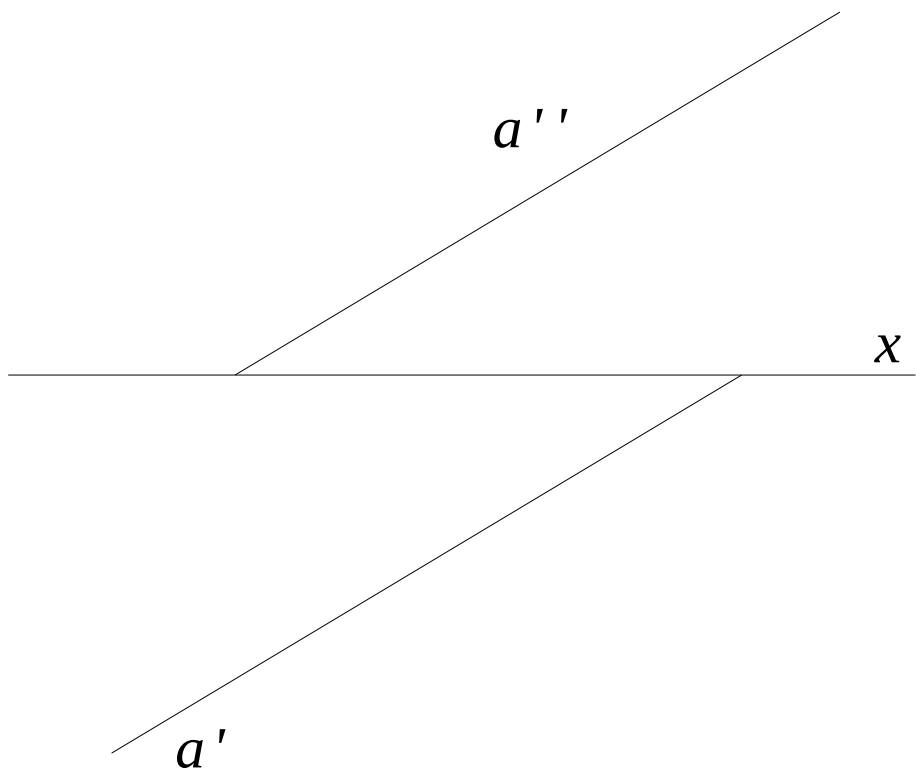


Aby narysować kład prostej, należy mieć klady dwóch punktów do niej należących:

- mogą to być dowolne punkty (jak po lewej),
- mogą to być ślady tej prostej (jak po prawej).

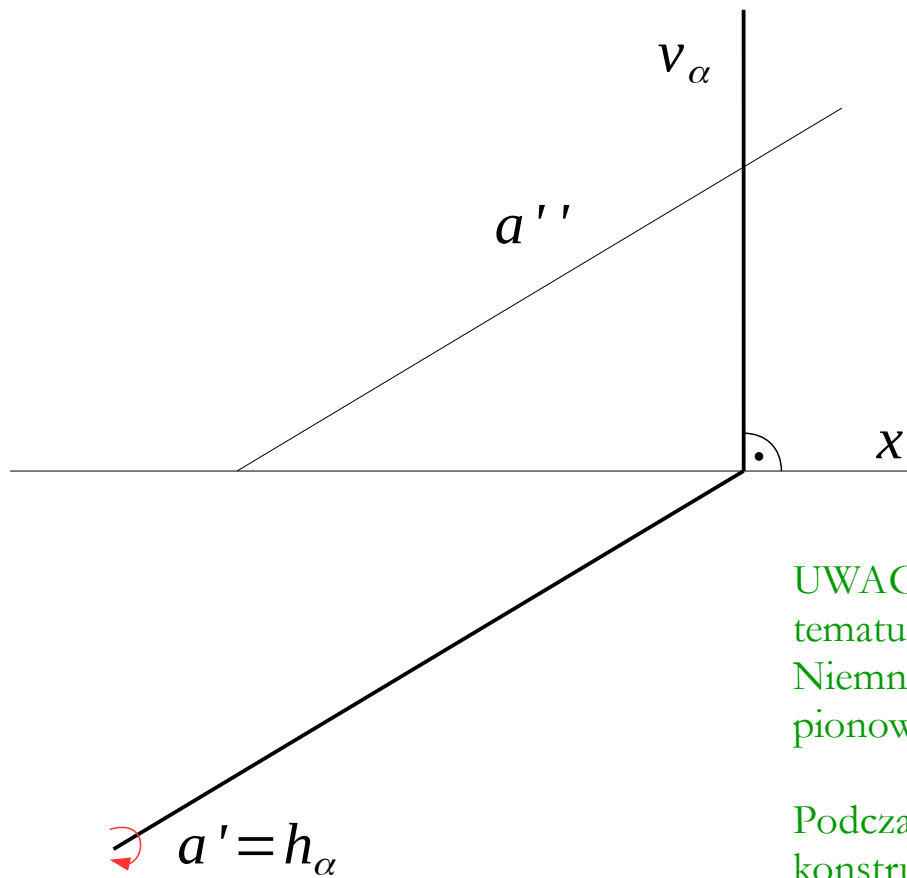
Kład prosty prostej

Wyznaczyć kąt nachylenia prostej do rzutni poziomej.



Kład prosty prostej

Wyznaczyć kąt nachylenia prostej do rzutni poziomej.



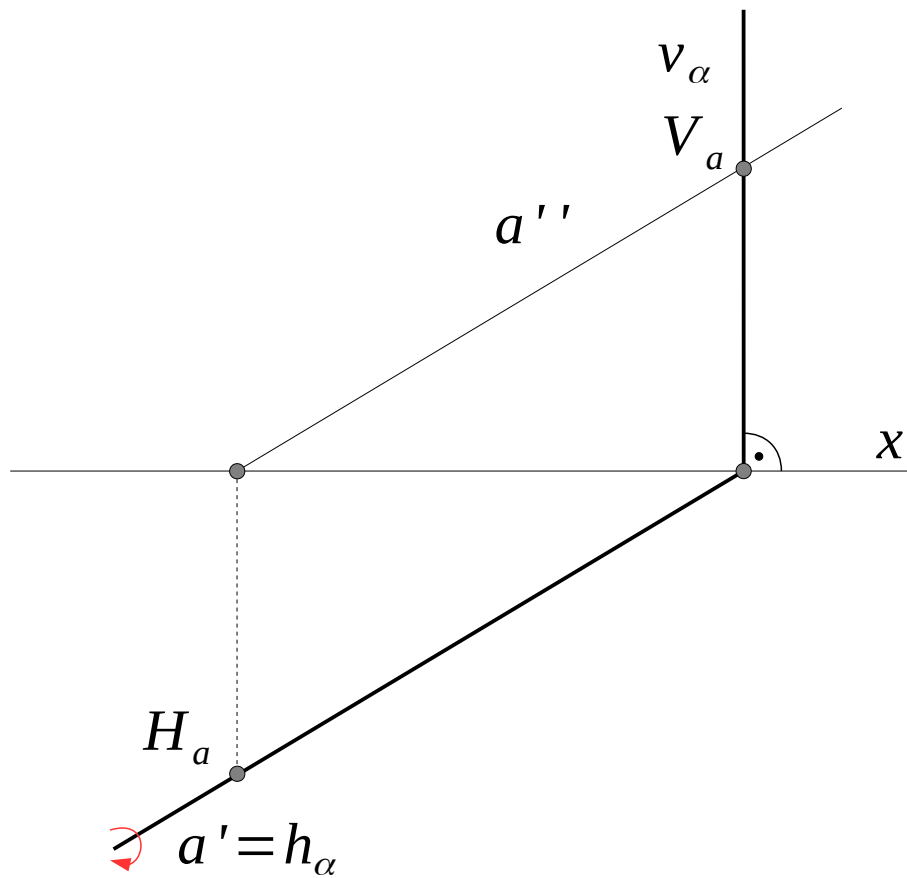
- Wstawiamy płaszczyznę poziomo-rzutuującą.

UWAGA: generalnie na wykładach – aby ułatwić zrozumienie tematu – przedstawiane są przykłady dotyczące rzutni poziomej. Niemniej jednak konstrukcje mogą dotyczyć również rzutni pionowej – zawsze należy przećwiczyć oba warianty!

Podczas ćwiczeń można odwrócić kartkę o 180 stopni i wykonać konstrukcję, jakby chodziło o rzutnię poziomą – trzeba tylko uważać, aby oznaczenia były poprawne i napisane w dobrą stronę kartki.

Kład prosty prostej

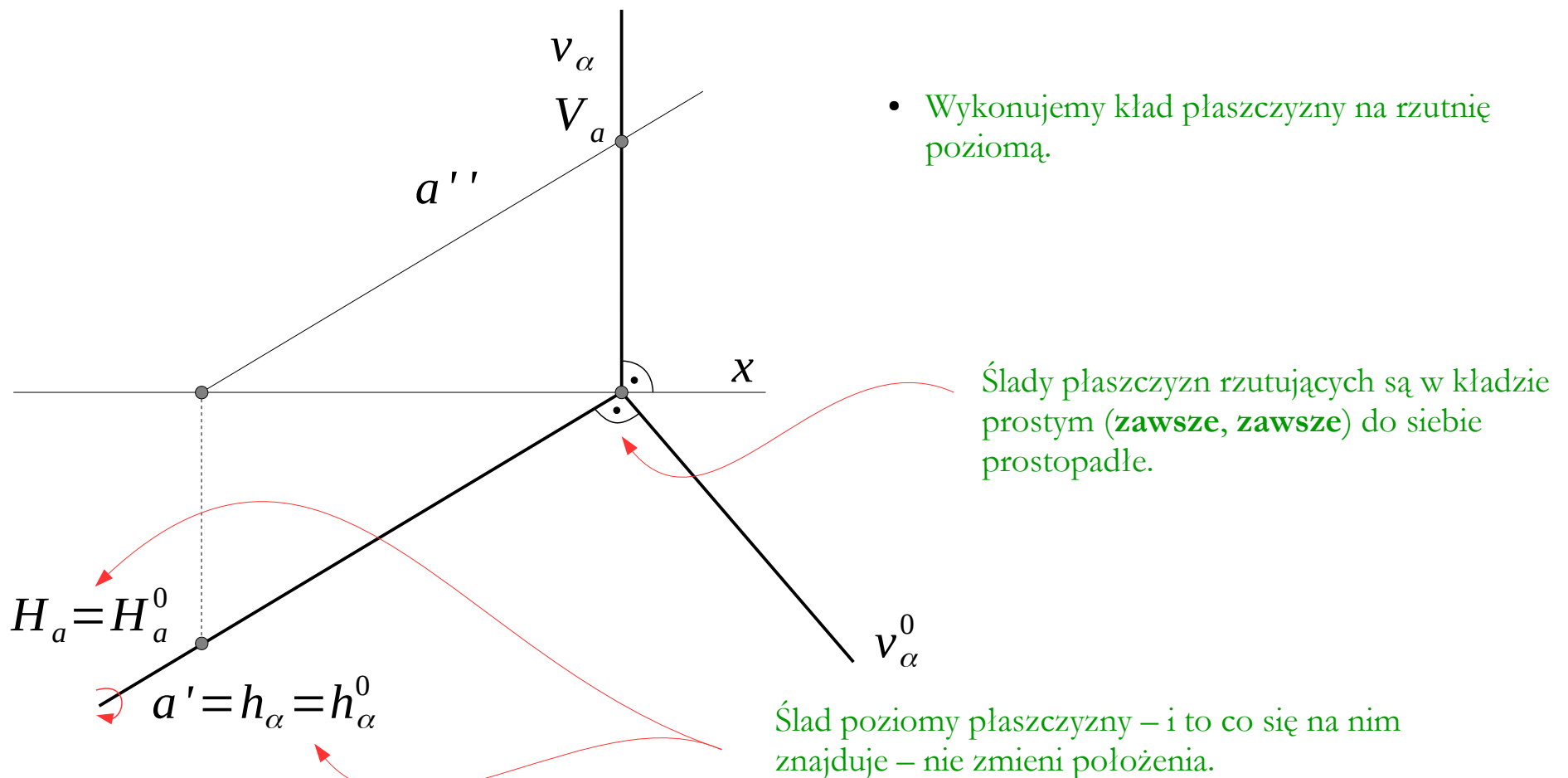
Wyznaczyć kąt nachylenia prostej do rzutni poziomej.



- Wyznaczamy ślady prostej (rzuty śladów nie będą do niczego potrzebne).

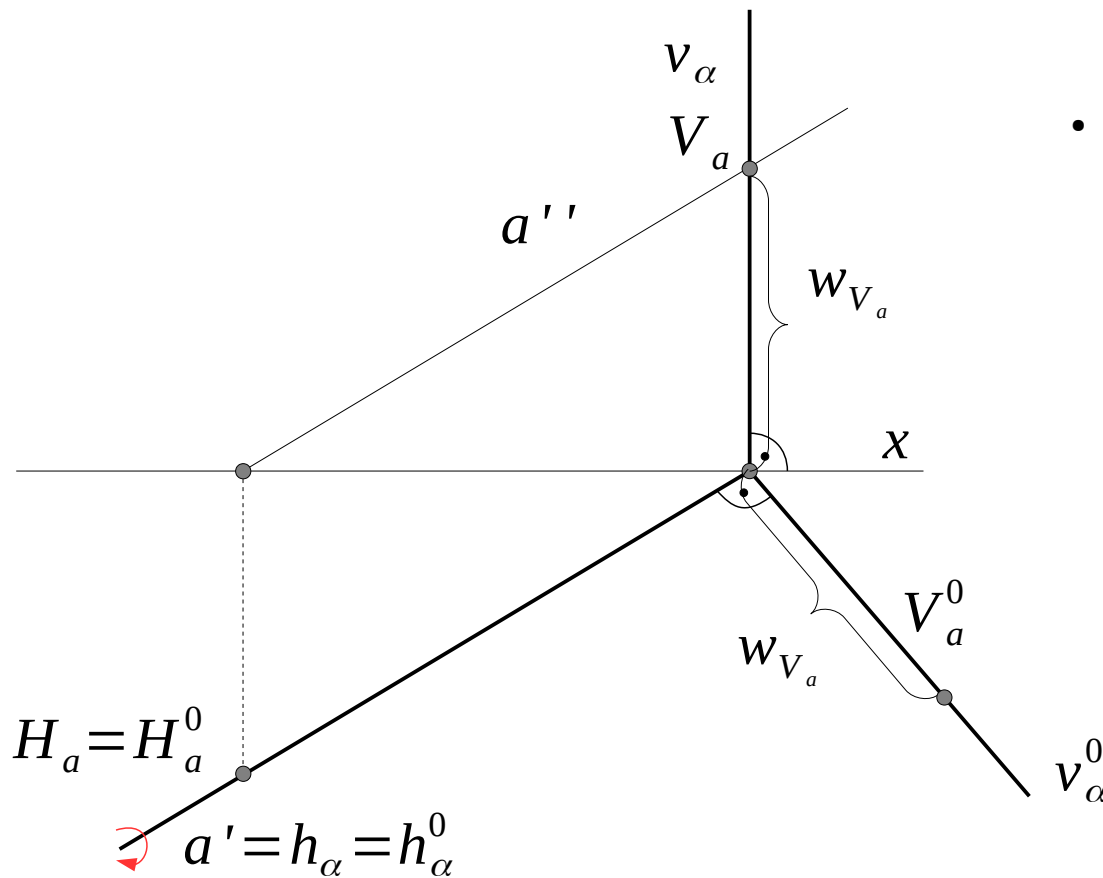
Kład prosty prostej

Wyznaczyć kąt nachylenia prostej do rzutni poziomej.



Kład prosty prostej

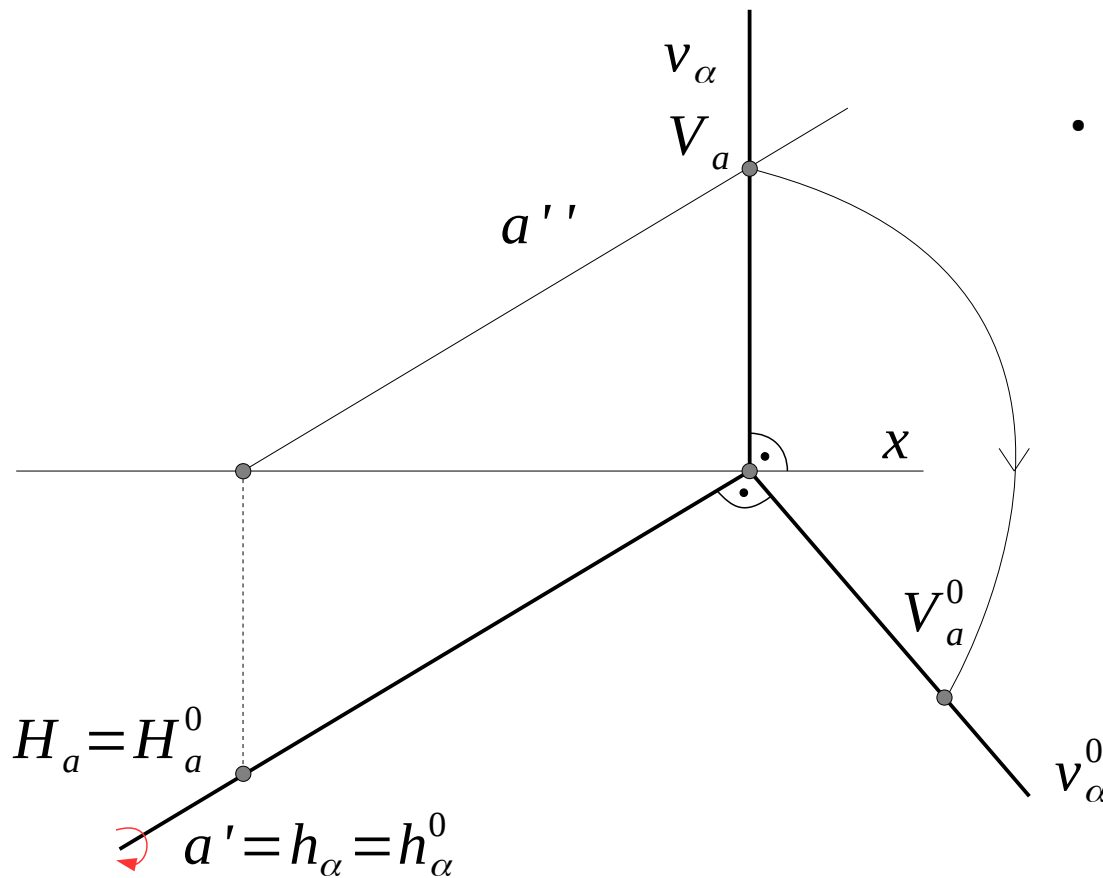
Wyznaczyć kąt nachylenia prostej do rzutni poziomej.



- Zaznaczamy położenie śladu pionowego prostej – można to zrobić odmierzając odpowiednie wymiary (jak poprzednio).

Kład prosty prostej

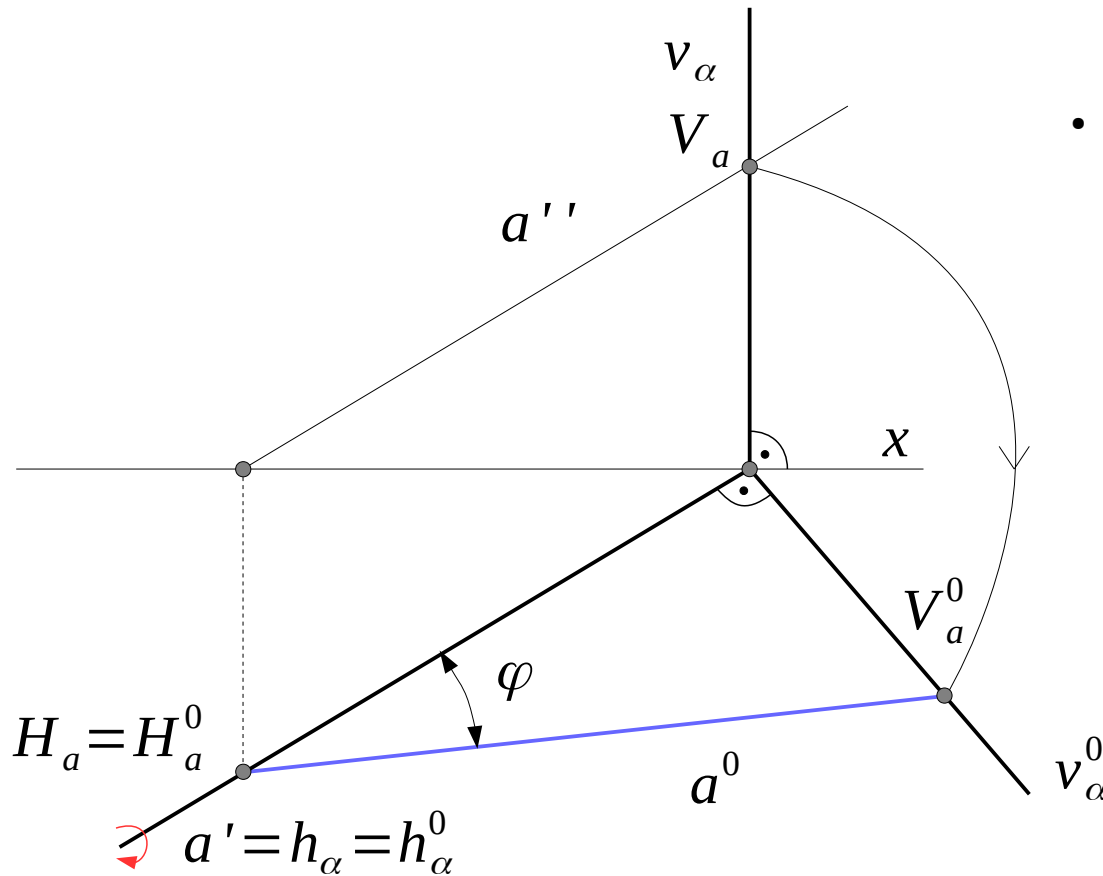
Wyznaczyć kąt nachylenia prostej do rzutni poziomej.



- Zaznaczamy położenie śladu pionowego prostej – można to zrobić przenosząc wymiar za pomocą cyrkla.

Kład prosty prostej

Wyznaczyć kąt nachylenia prostej do rzutni poziomej.

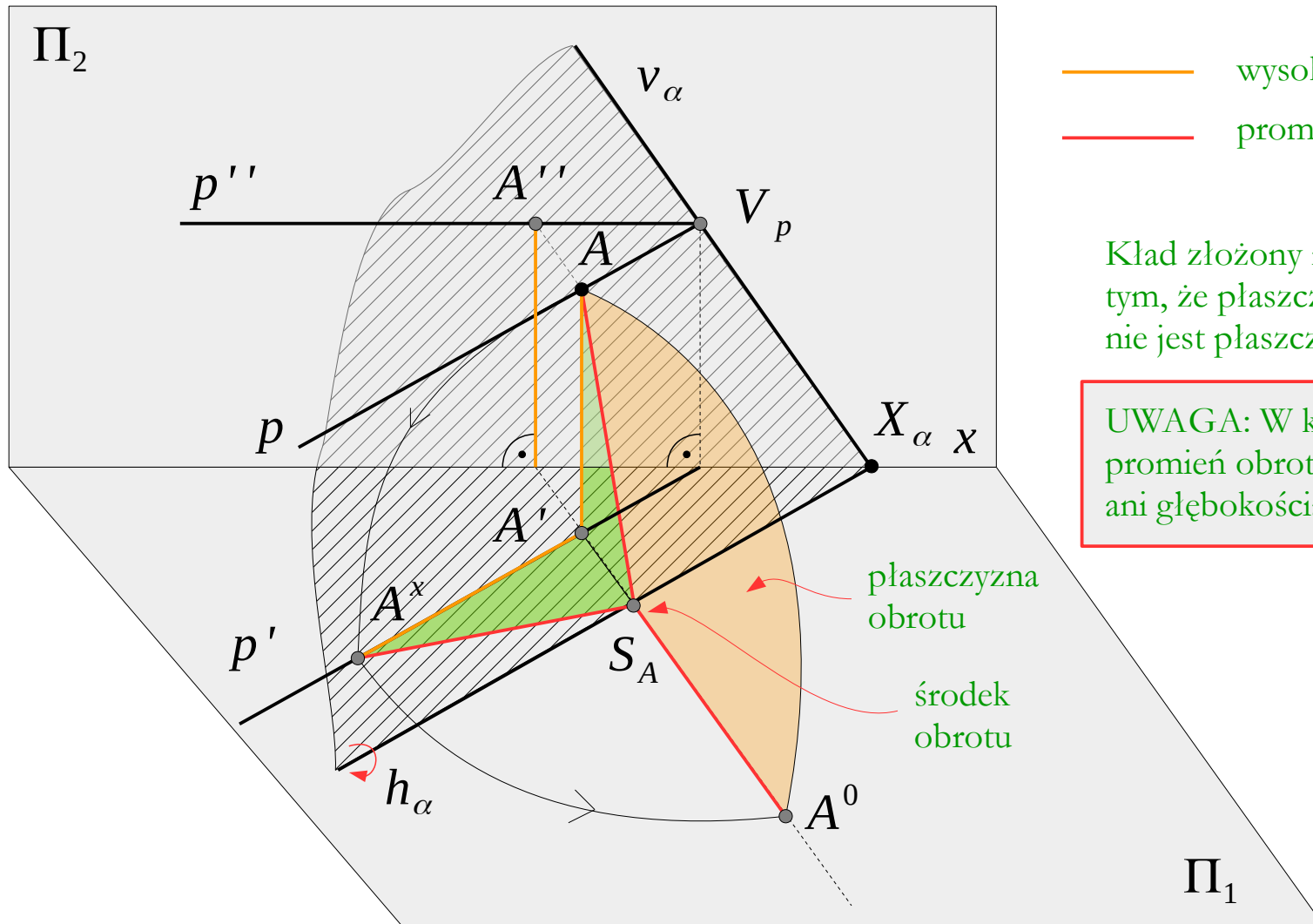


- Zaznaczamy szukany kąt.

Omówiona tu konstrukcja umożliwia również:

- wyznaczenie kąta między prostymi przecinającymi się,
- wyznaczenie odległości między prostymi równoległymi,
- wyznaczenie odległości punktu od prostej, o ile leżą one na jednej płaszczyźnie.

Kłady złożone



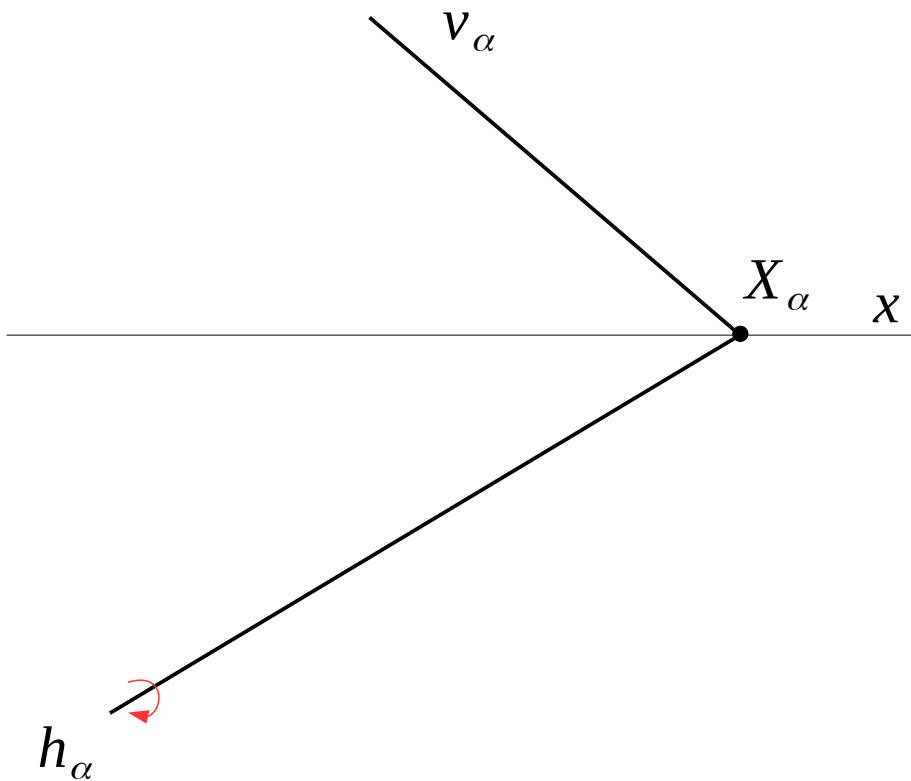
- wysokość punktu
- promień obrotu punktu

Kład złożony różni się od prostego tym, że płaszczyzna którą kładziemy nie jest płaszczyzną rzutującą.

UWAGA: W kładach złożonych promień obrotu nie jest ani wysokością, ani głębokością punktu!

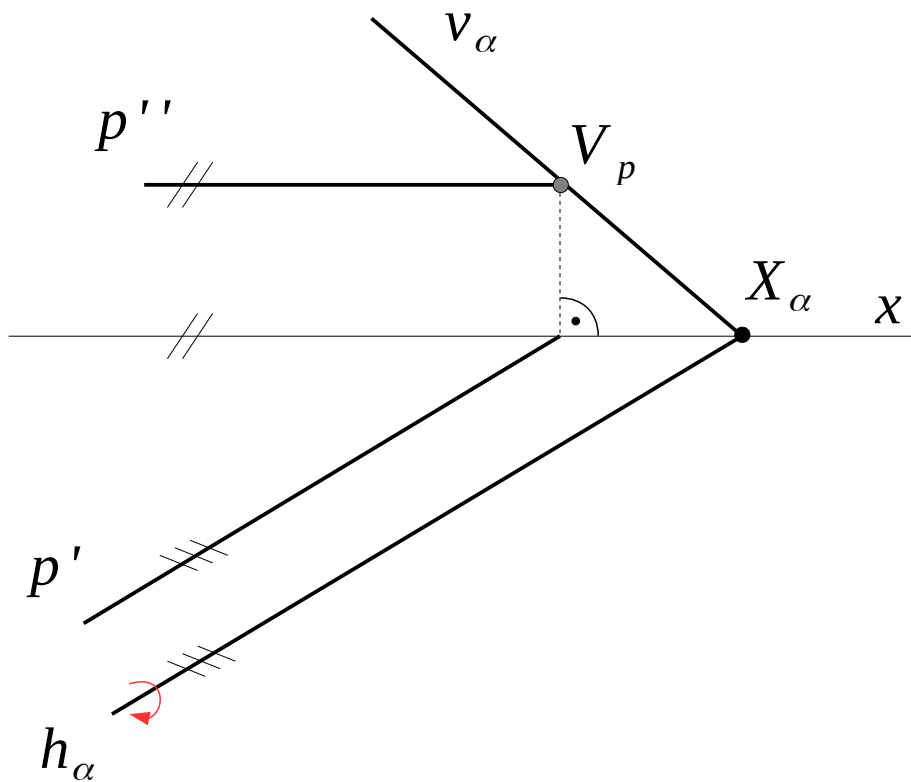
Kłady złożone

Wykonać kład dowolnego punktu A , leżącego na płaszczyźnie α , na rzutnię poziomą.



Kłady złożone

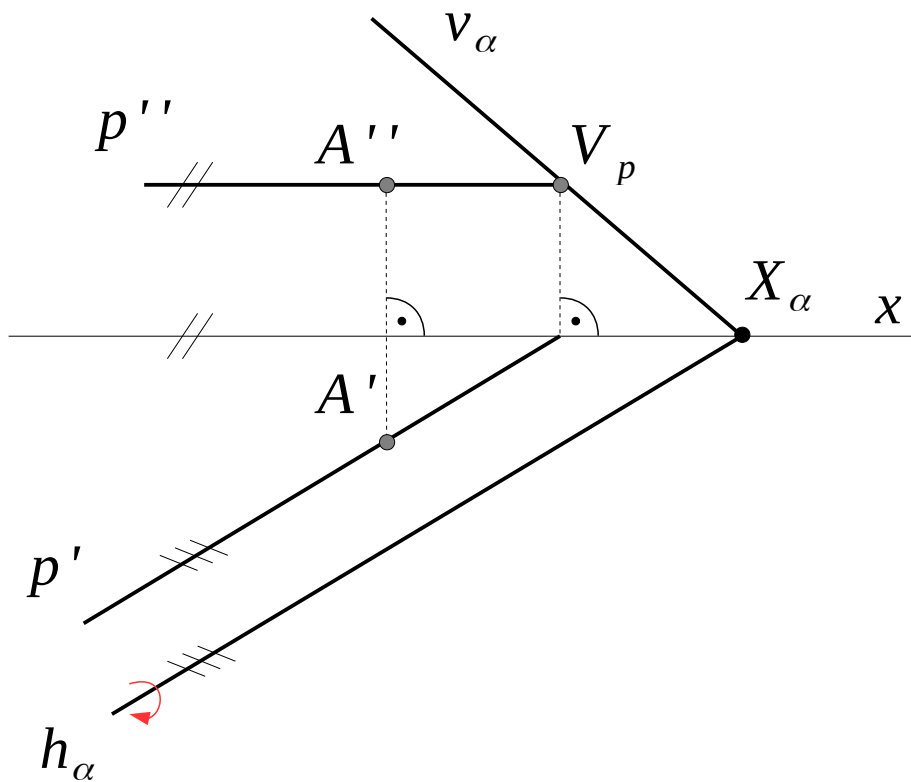
Wykonać kład dowolnego punktu A , leżącego na płaszczyźnie α , na rzutnię poziomą.



- Aby narysować punkt na płaszczyźnie należy najpierw narysować na niej jakąś prostą – najkorzystniej jest narysować prostą poziomą lub czołową (patrz temat elementy przynależne – prosta na płaszczyźnie).

Kłady złożone

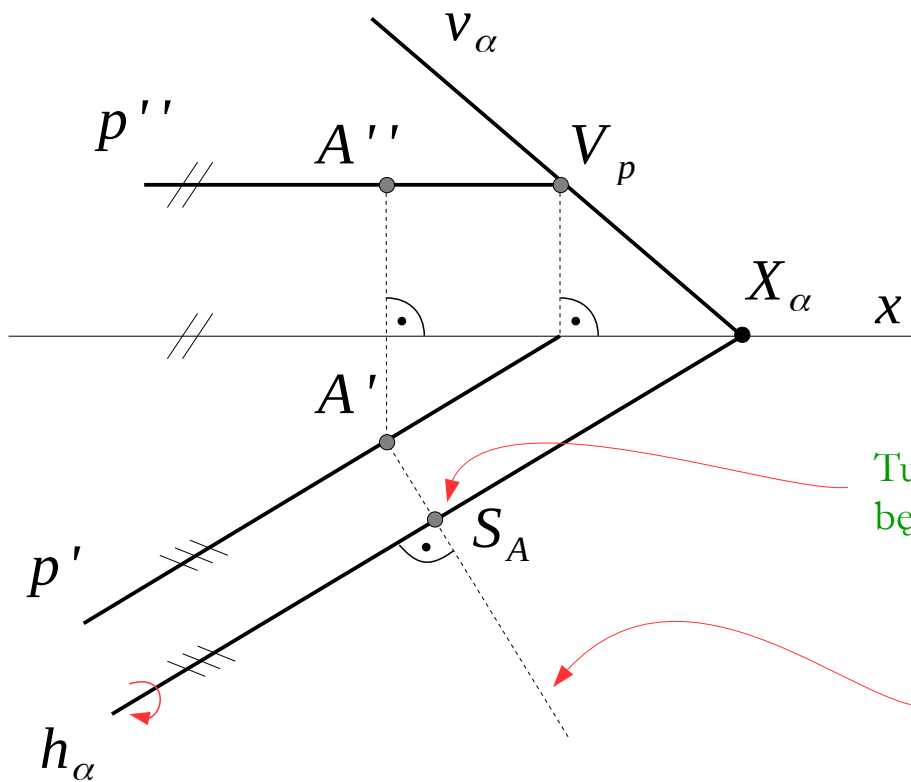
Wykonać kład dowolnego punktu A , leżącego na płaszczyźnie α , na rzutnię poziomą.



- Mając rzuty prostej można narysować na nich rzuty dowolnego punktu, np. punktu A .

Kłady złożone

Wykonać kład dowolnego punktu A , leżącego na płaszczyźnie α , na rzutnię poziomą.



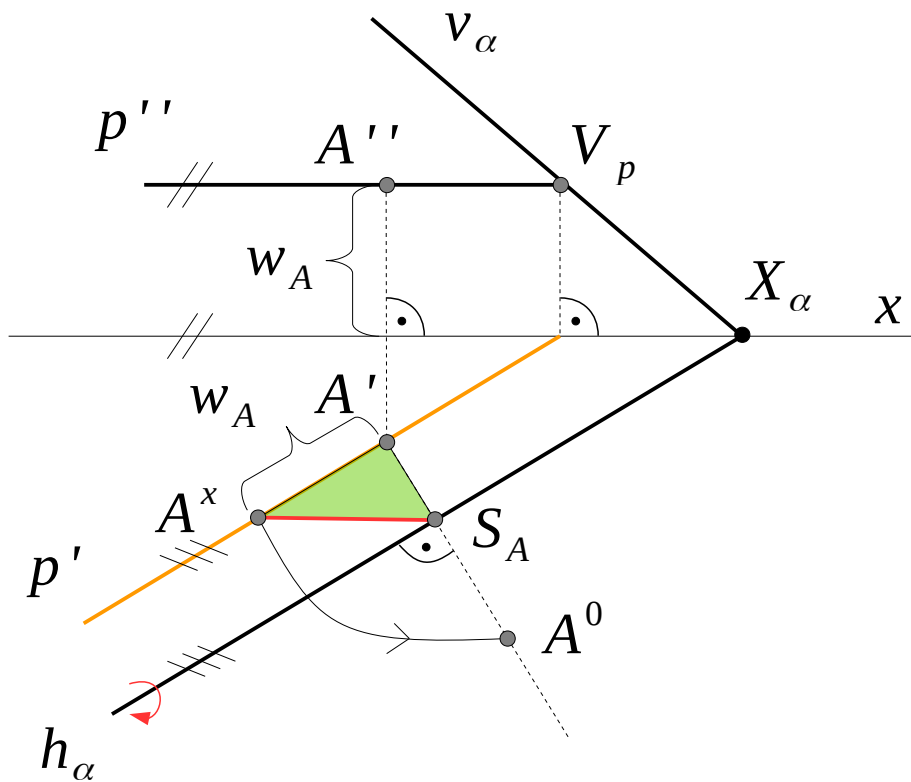
- Rysujemy „odnoszącą” (wiemy, że jest to w rzeczywistości ślad płaszczyzny obrotu punktu A) z rzutu poziomego punktu A i prostopadle do śladu poziomego płaszczyzny.

Tu jest środek obrotu punktu A – wiadomo, że stąd trzeba będzie zatoczyć łuk o promieniu równym promieniowi obrotu.

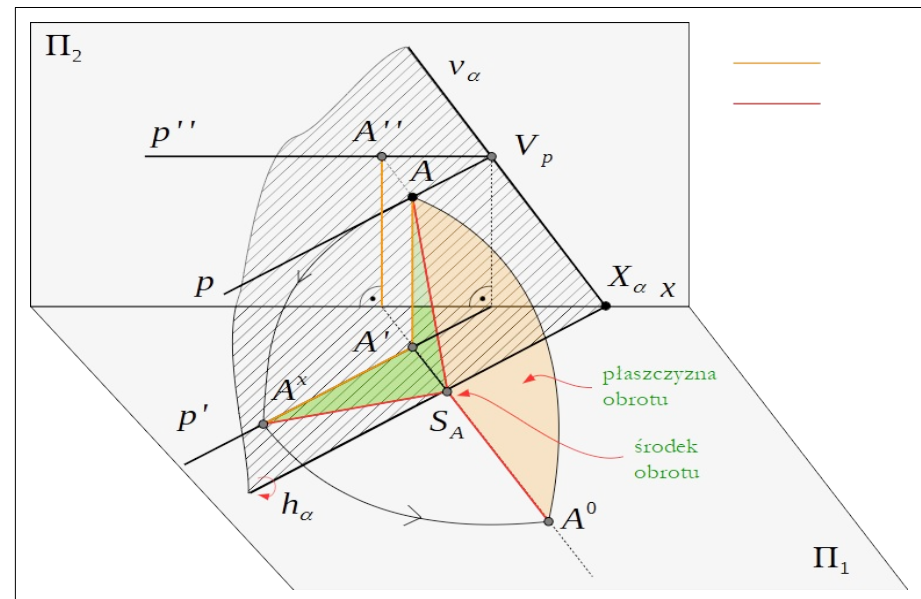
Kład punktu leży na tej linii w odległości równej promieniowi obrotu.

Kłady złożone

Wykonać kład dowolnego punktu A , leżącego na płaszczyźnie α , na rzutnię poziomą.

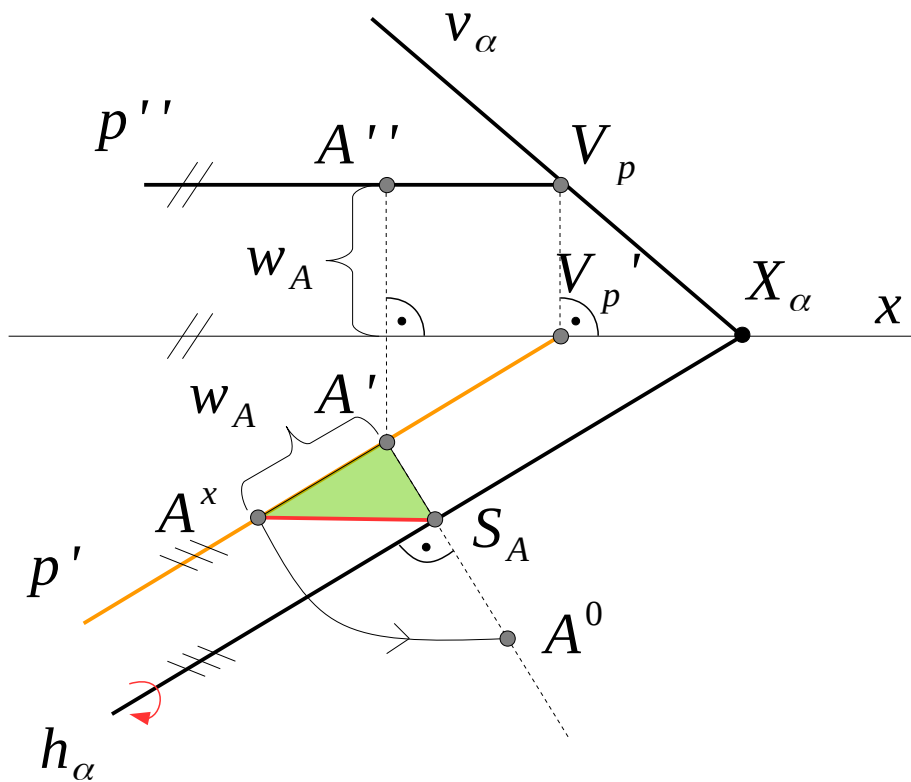


- Odmierzamy długość równą promieniowi obrotu na linii odnoszącej (środkiem obrotu jest punkt S_A) – w efekcie uzyskujemy kład punktu A .



Kłady złożone

Wykonać kład dowolnego punktu A , leżącego na płaszczyźnie α , na rzutnię poziomą.

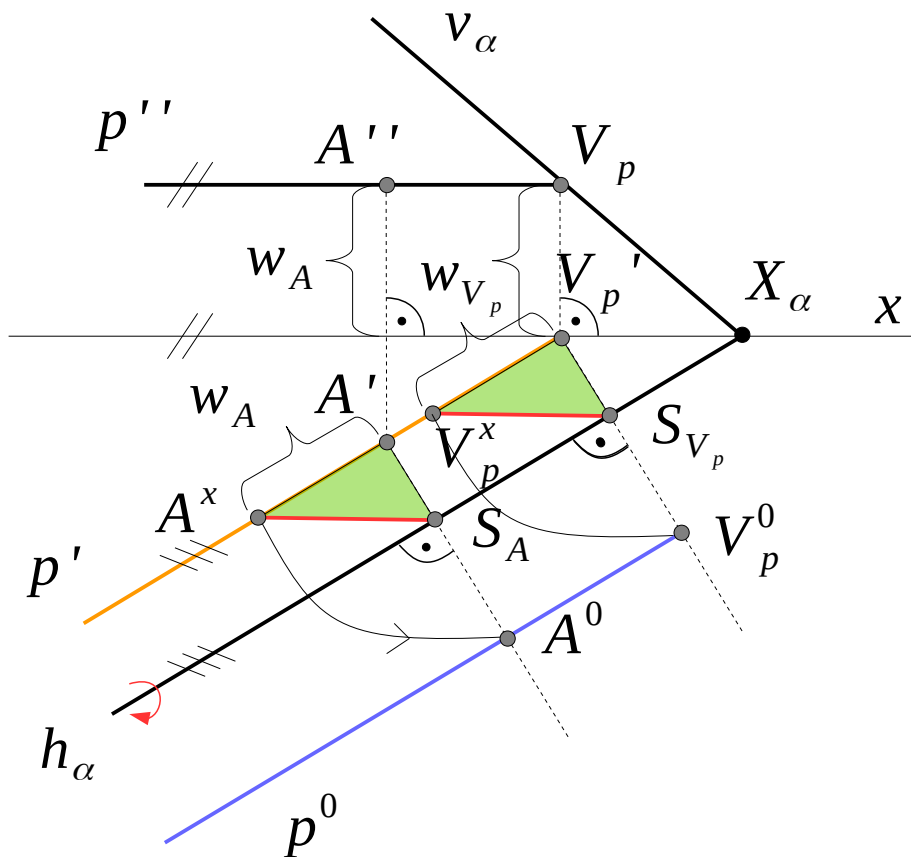


Zadanie zostało wykonane, ale sprawdźmy coś jeszcze!:

- Zaznaczmy rzut poziomy śladu pionowego prostej p .

Kłady złożone

Wykonać kład dowolnego punktu A , leżącego na płaszczyźnie α , na rzutnię poziomą.



Zadanie zostało wykonane, ale sprawdźmy coś jeszcze!:

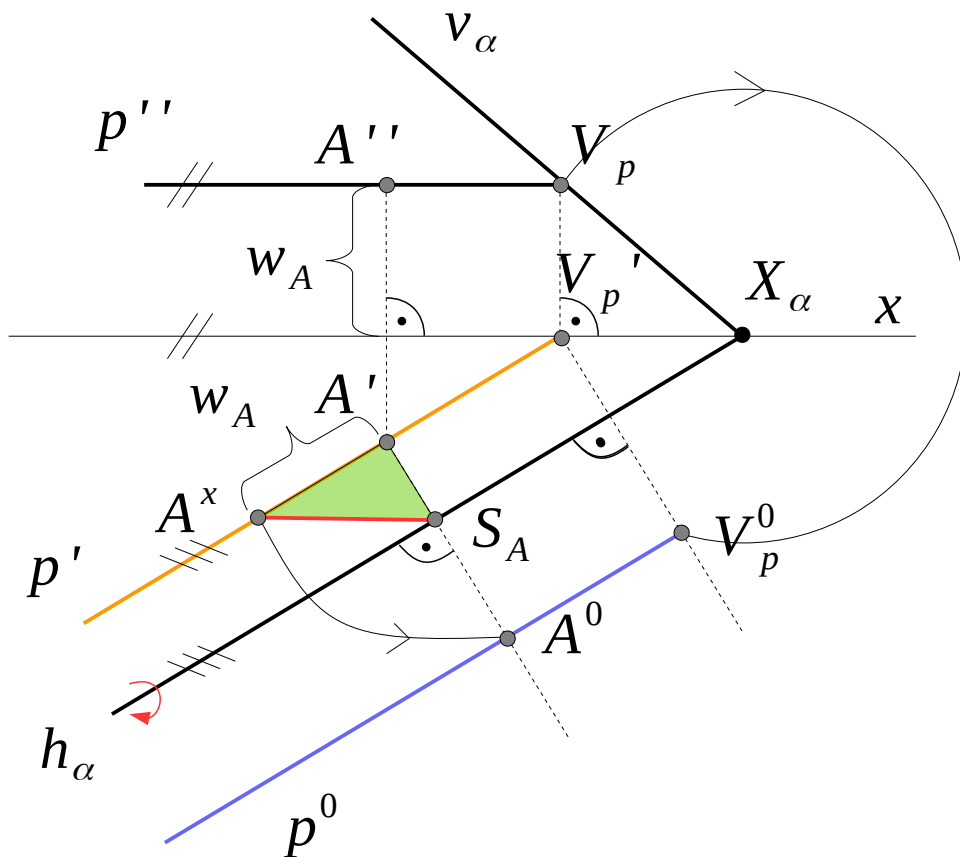
- Zaznaczmy rzut poziomy śladu pionowego prostej p .
- Zaznaczmy „odnoszącą” wychodzącą z rzutu poziomego śladu pionowego prostej p .
- Wyznaczymy kład śladu pionowego prostej p .

Opcja 1:

- robimy konstrukcję tak samo jak to było w przypadku punktu A – łącząc kłady dwóch punktów należących do prostej uzyskujemy kład tej prostej.

Kłady złożone

Wykonać kład dowolnego punktu A , leżącego na płaszczyźnie α , na rzutnię poziomą.



Zadanie zostało wykonane, ale sprawdźmy coś jeszcze!:

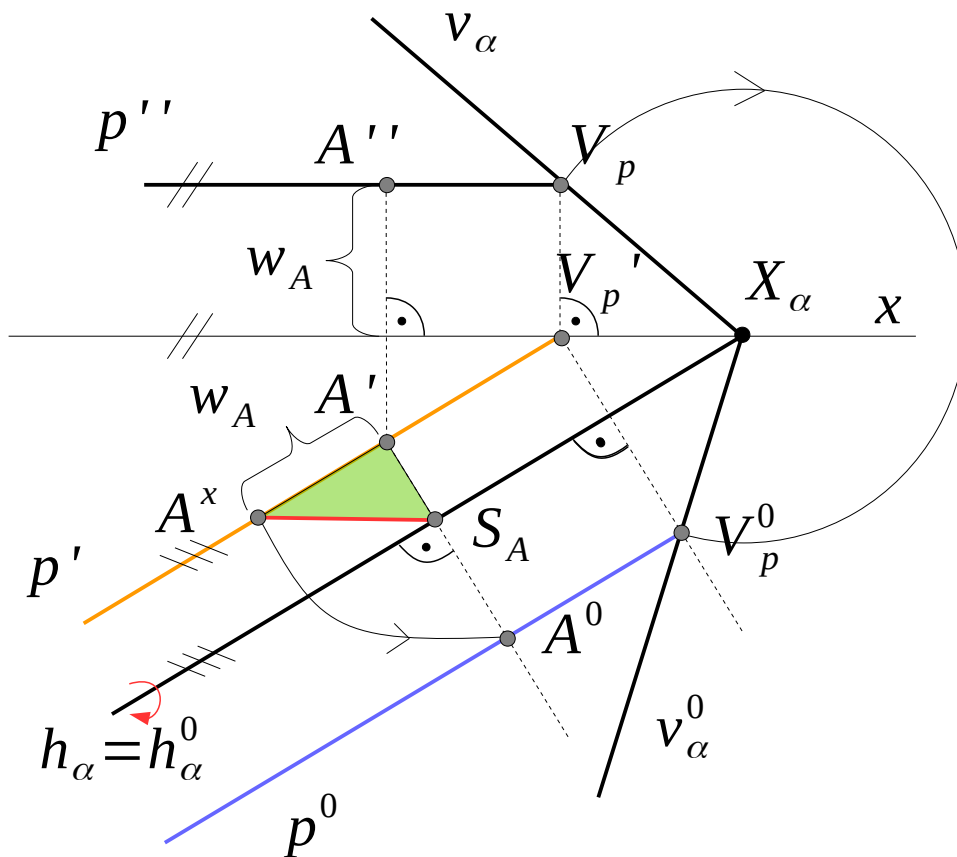
- Zaznaczmy rzut poziomy śladu pionowego prostej p .
- Zaznaczmy „odnoszącą” wychodzącą z rzutu poziomego śladu pionowego prostej p .
- Wyznaczymy kład śladu pionowego prostej p .

Opcja 3:

- zauważamy, że odległość od wężła płaszczyzny do każdego punktu leżącego na jej śladzie jest stała – zarówno przed, jak i po kładzie.

Kłady złożone

Wykonać kład dowolnego punktu A , leżącego na płaszczyźnie α , na rzutnię poziomą.



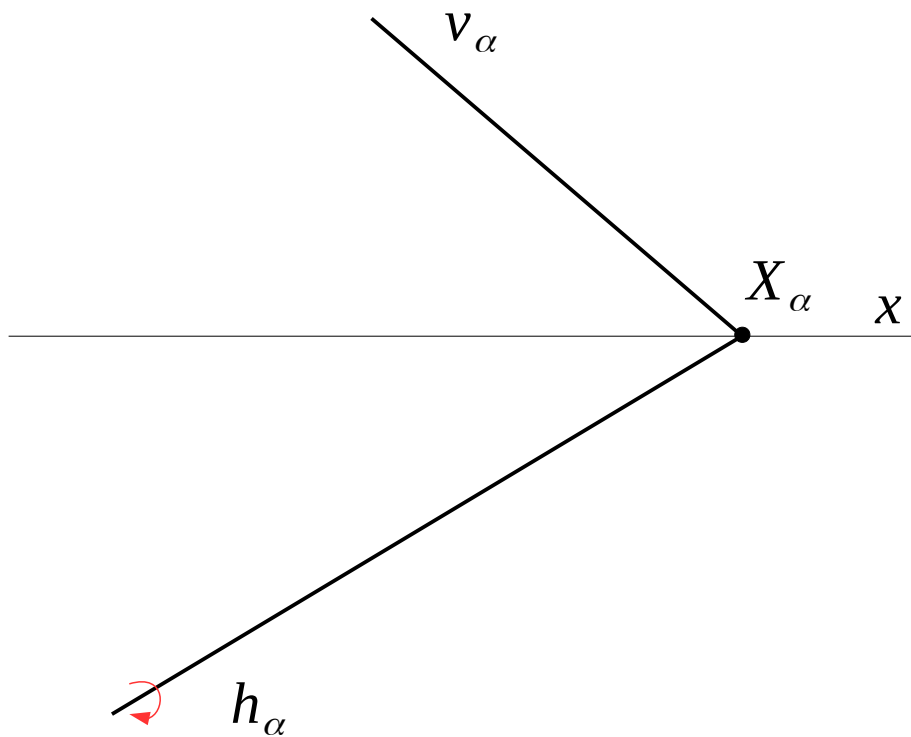
Zadanie zostało wykonane, ale sprawdźmy coś jeszcze!:

- Zaznaczmy rzut poziomy śladu pionowego prostej p .
- Zaznaczmy „odnoszącą” wychodzącą z rzutu poziomego śladu pionowego prostej p .
- Wyznaczamy kład śladu pionowego prostej p .
- Zaznaczamy kłady obu śladów płaszczyzny.

W kładach złożonych najwygodniej jest, w większości przypadków, korzystać z konstrukcji kładzenia prostej szczególnej: poziomej, gdy kład wykonuje się na rzutnię poziomą, lub czołowej, gdy kład wykonuje się na rzutnię pionową.

Kłady złożone

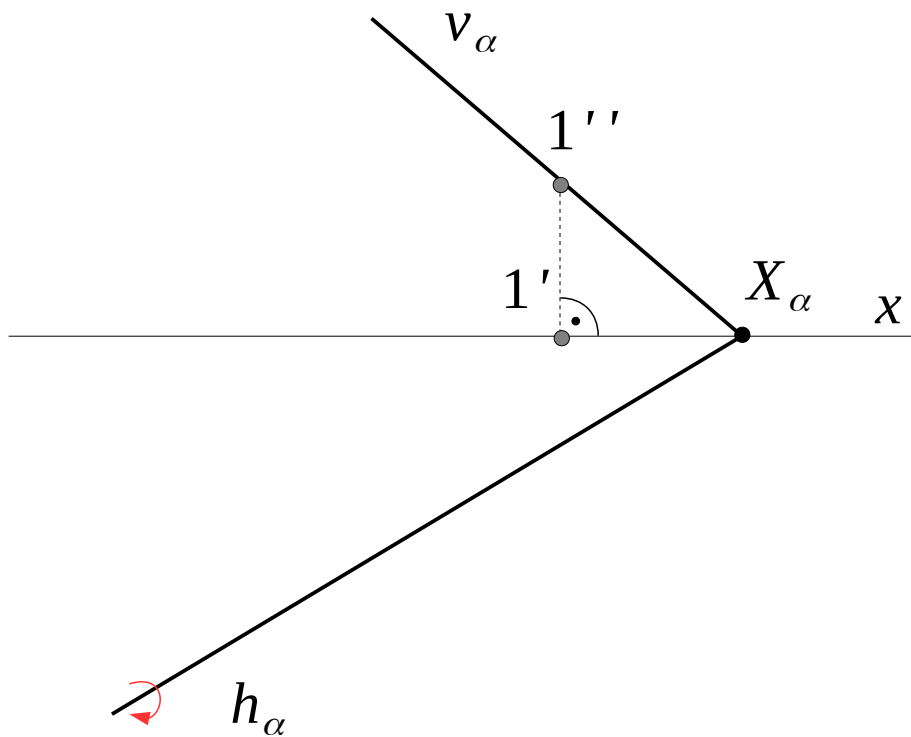
Wykonać kład płaszczyzny α na rzutnię poziomą.



Opisana przed chwilą „opcja 3”, jest najprostszą konstrukcją służącą do wykonania kładu płaszczyzny dowolnej – wystarczy mieć jakiś dowolny punkt leżący na jej śladzie:

Kłady złożone

Wykonać kład płaszczyzny α na rzutnię poziomą.

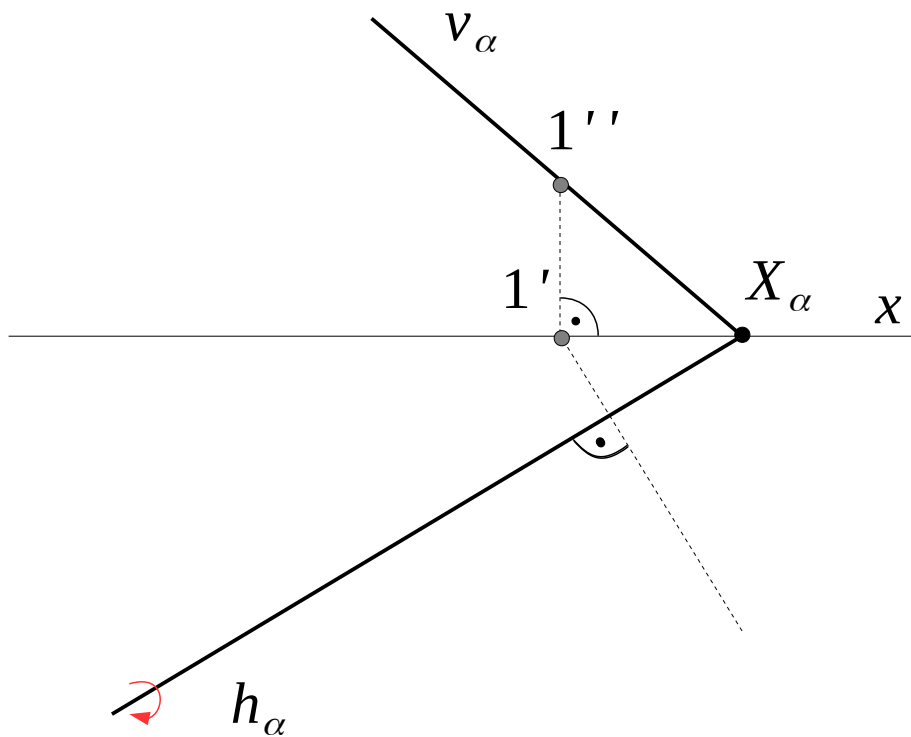


Opisana przed chwilą „opcja 3”, jest najprostszą konstrukcją służącą do wykonania kładu płaszczyzny dowolnej – wystarczy mieć jakiś dowolny punkt leżący na jej śladzie:

- wstawiamy jakiś punkt na tym śladzie płaszczyzny, który zmieni położenie podczas kładu – tu na śladzie pionowym.

Kłady złożone

Wykonać kład płaszczyzny α na rzutnię poziomą.

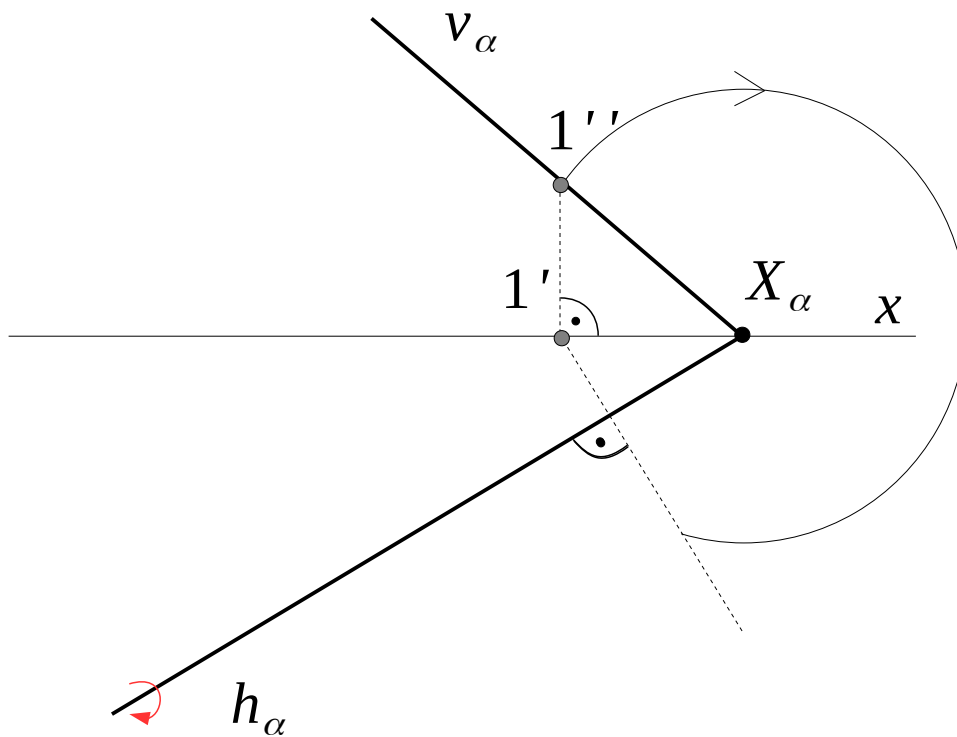


Opisana przed chwilą „opcja 3”, jest najprostszą konstrukcją służącą do wykonania kładu płaszczyzny dowolnej – wystarczy mieć jakiś dowolny punkt leżący na jej śladzie:

- wstawiamy jakiś punkt na tym śladzie płaszczyzny, który zmieni położenie podczas kładu – tu na śladzie pionowym.
- rysujemy „odnoszącą” z tego rzutu, który leży na osi x – tu rzutu poziomego.

Kłady złożone

Wykonać kład płaszczyzny α na rzutnię poziomą.

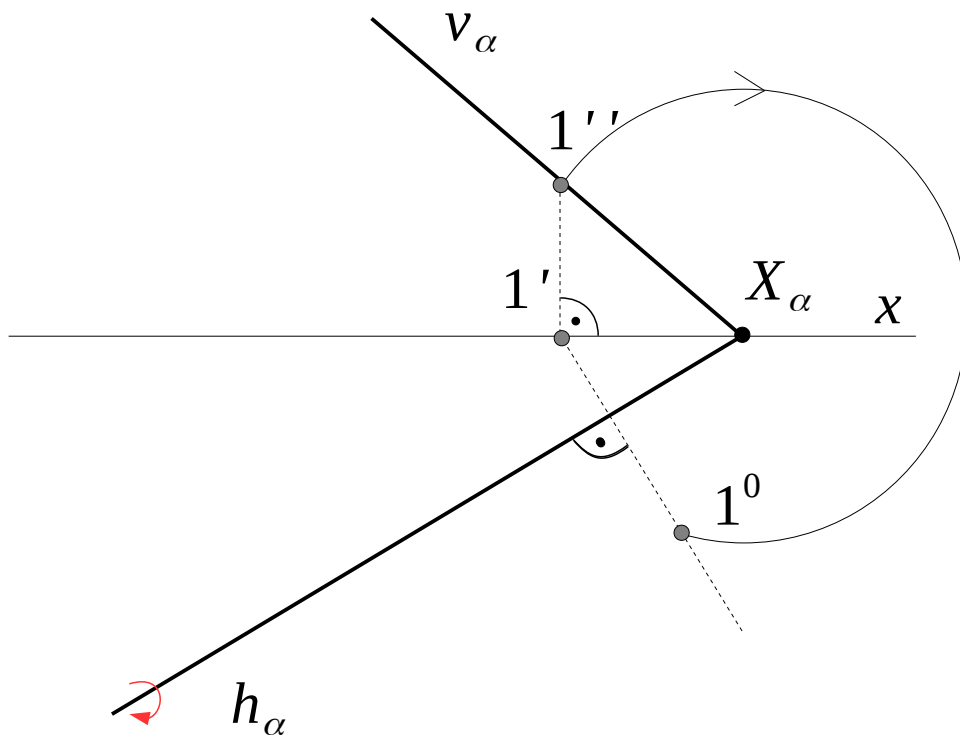


Opisana przed chwilą „opcja 3”, jest najprostszą konstrukcją służącą do wykonania kładu płaszczyzny dowolnej – wystarczy mieć jakiś dowolny punkt leżący na jej śladzie:

- wstawiamy jakiś punkt na tym śladzie płaszczyzny, który zmieni położenie podczas kładu – tu na śladzie pionowym.
- rysujemy „odnoszącą” z tego rzutu, który leży na osi x – tu rzutu poziomego.
- rysujemy okrąg o środku w węźle płaszczyzny i promieniu równym odległości punktu od węzła.

Kłady złożone

Wykonać kład płaszczyzny α na rzutnię poziomą.

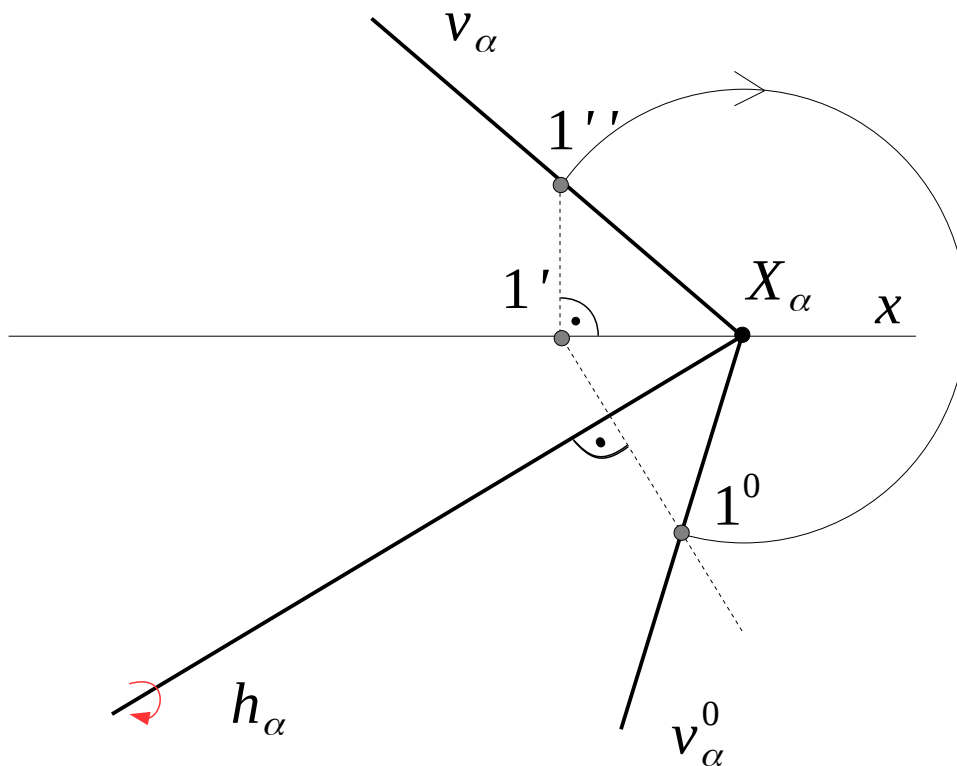


Opisana przed chwilą „opcja 3”, jest najprostszą konstrukcją służącą do wykonania kładu płaszczyzny dowolnej – wystarczy mieć jakiś dowolny punkt leżący na jej śladzie:

- wstawiamy jakiś punkt na tym śladzie płaszczyzny, który zmieni położenie podczas kładu – tu na śladzie pionowym.
- rysujemy „odnoszącą” z tego rzutu, który leży na osi x – tu rzutu poziomego.
- rysujemy okrąg o środku w węźle płaszczyzny i promieniu równym odległości punktu od węzła.
- w miejscu przecięcia się okręgu z linią odnoszącą znajduje się kład punktu.

Kłady złożone

Wykonać kład płaszczyzny α na rzutnię poziomą.

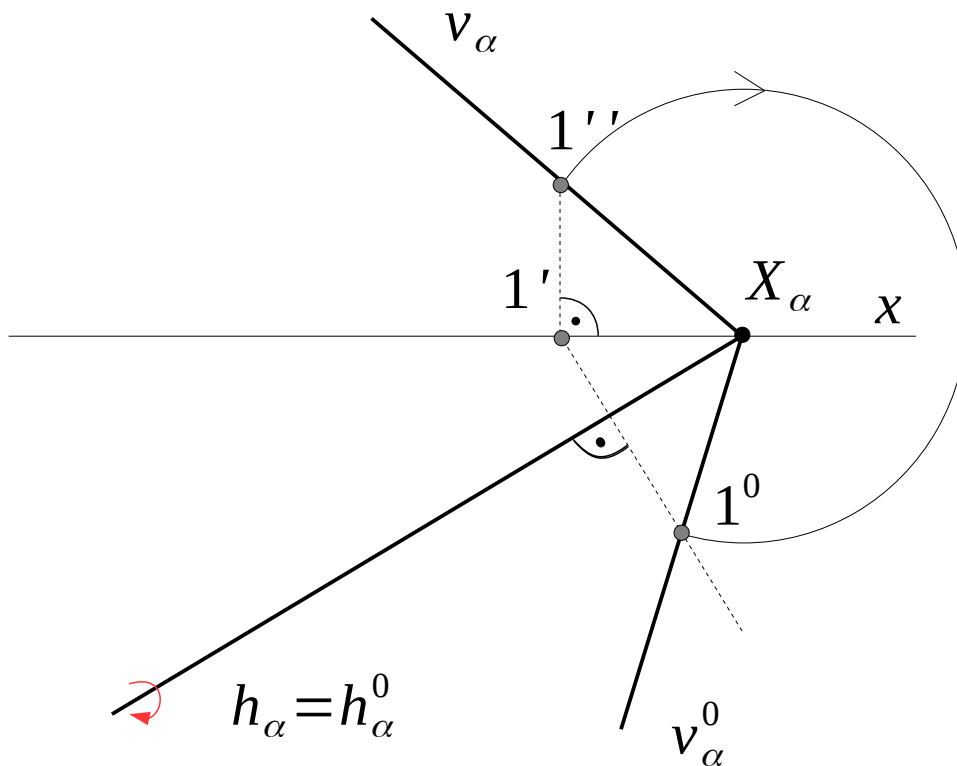


Opisana przed chwilą „opcja 3”, jest najprostszą konstrukcją służącą do wykonania kładu płaszczyzny dowolnej – wystarczy mieć jakiś dowolny punkt leżący na jej śladzie:

- wstawiamy jakiś punkt na tym śladzie płaszczyzny, który zmieni położenie podczas kładu – tu na śladzie pionowym.
- rysujemy „odnoszącą” z tego rzutu, który leży na osi x – tu rzutu poziomego.
- rysujemy okrąg o środku w węźle płaszczyzny i promieniu równym odległości punktu od węzła.
- w miejscu przecięcia się okręgu z linią odnoszącą znajduje się kład punktu.
- łącząc kład punktu z węzłem uzyskujemy kład śladu płaszczyzny – tu śladu pionowego.

Kłady złożone

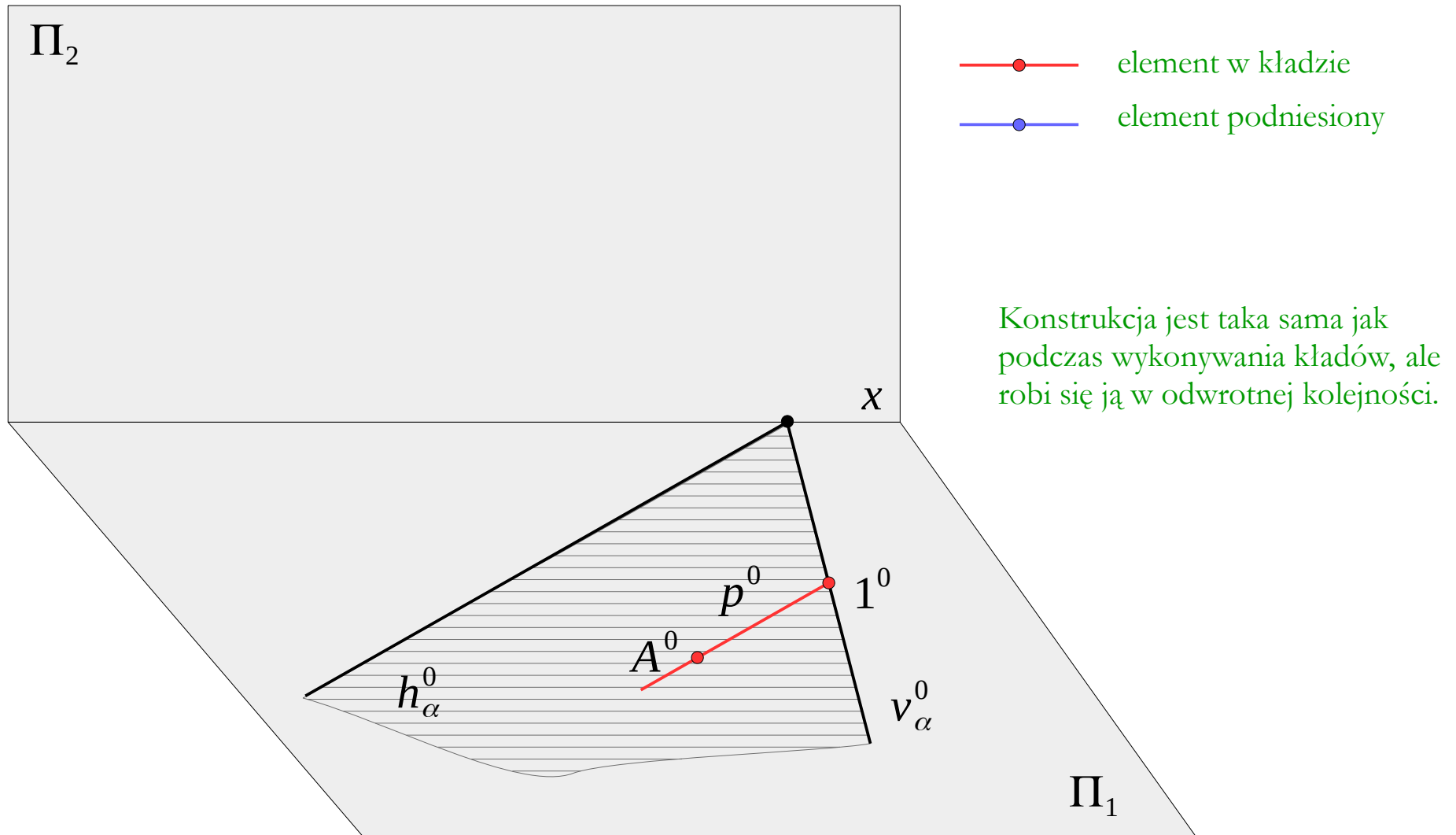
Wykonać kład płaszczyzny α na rzutnię poziomą.



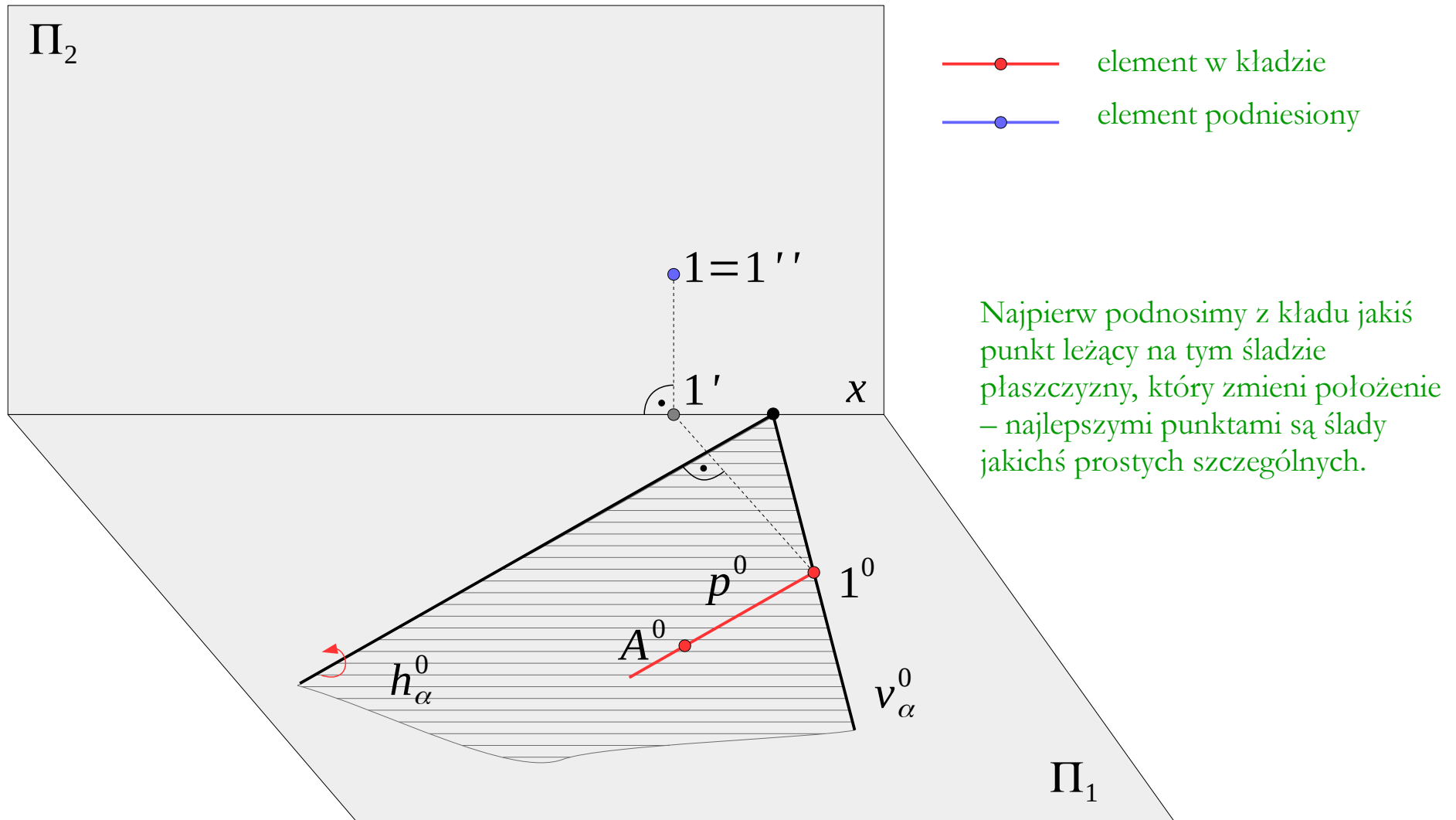
Opisana przed chwilą „opcja 3”, jest najprostszą konstrukcją służącą do wykonania kładu płaszczyzny dowolnej – wystarczy mieć jakiś dowolny punkt leżący na jej śladzie:

- wstawiamy jakiś punkt na tym śladzie płaszczyzny, który zmieni położenie podczas kładu – tu na śladzie pionowym.
- rysujemy „odnoszącą” z tego rzutu, który leży na osi x – tu rzutu poziomego.
- rysujemy okrąg o środku w węźle płaszczyzny i promieniu równym odległości punktu od węzła.
- w miejscu przecięcia się okręgu z linią odnoszącą znajduje się kład punktu.
- łącząc kład punktu z węzłem uzyskujemy kład śladu płaszczyzny – tu śladu pionowego.
- kład drugiego śladu płaszczyzny pokrywa się zawsze z tym śladem.

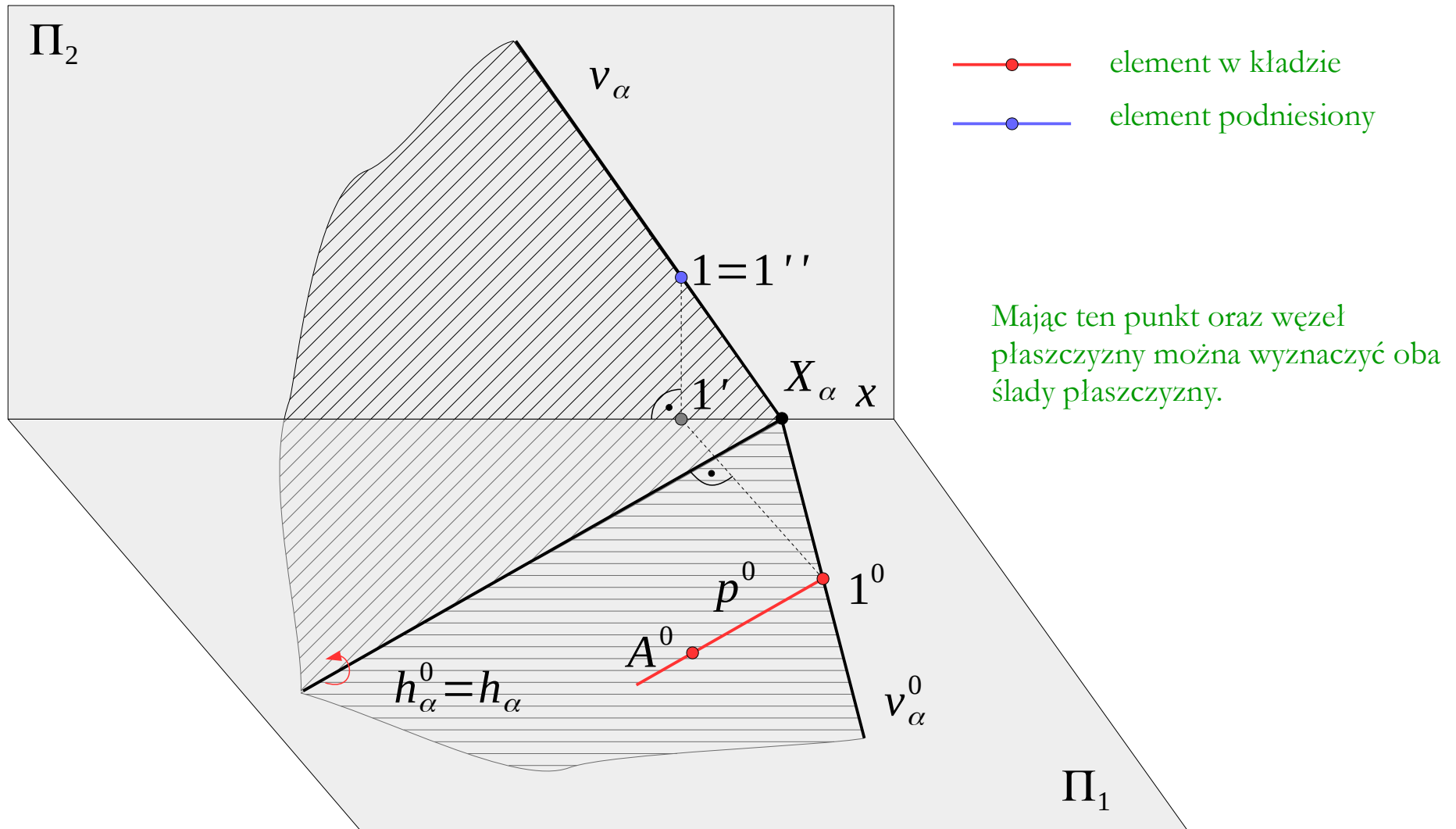
Podnoszenie z kładu



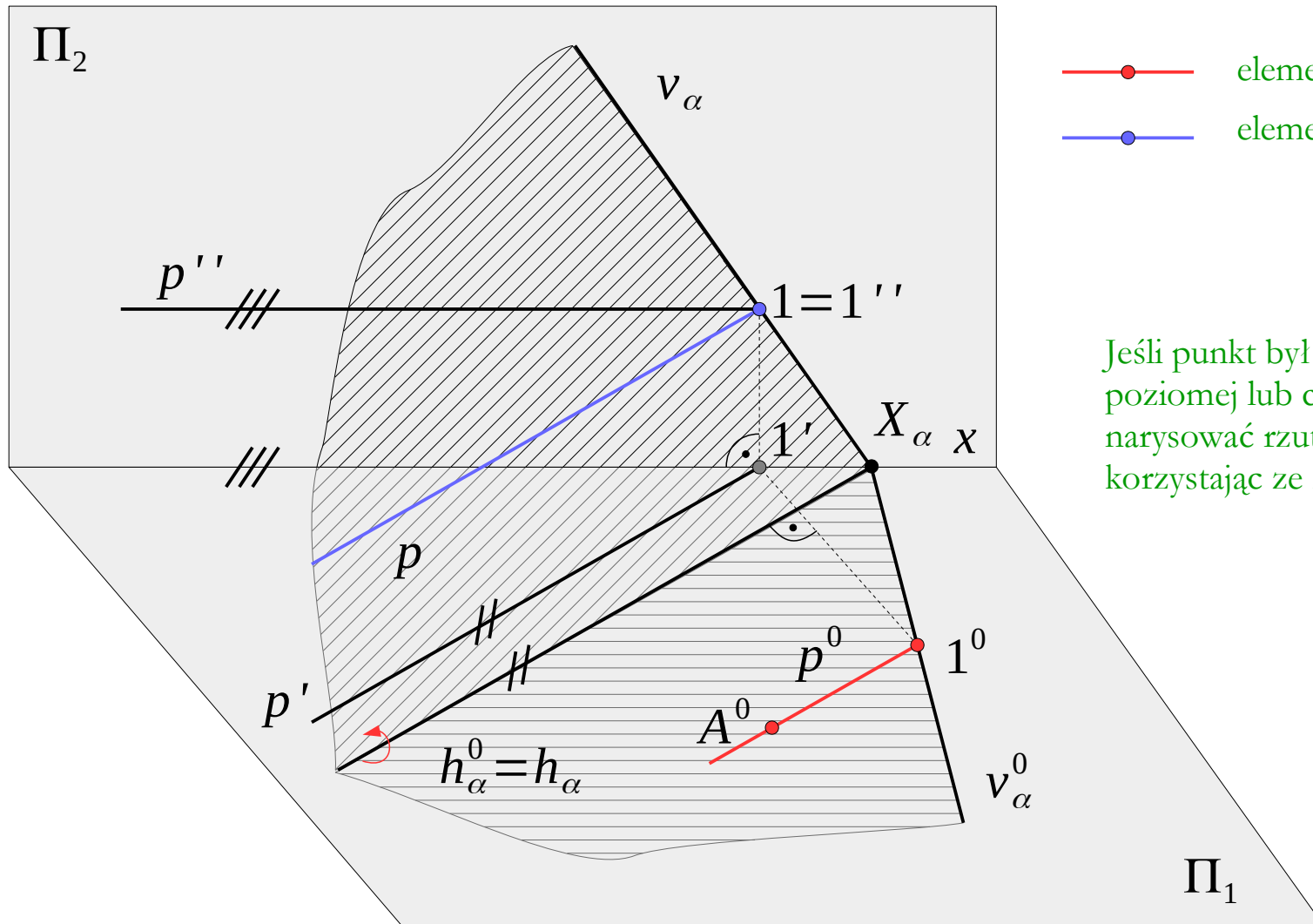
Podnoszenie z kładu



Podnoszenie z kładu



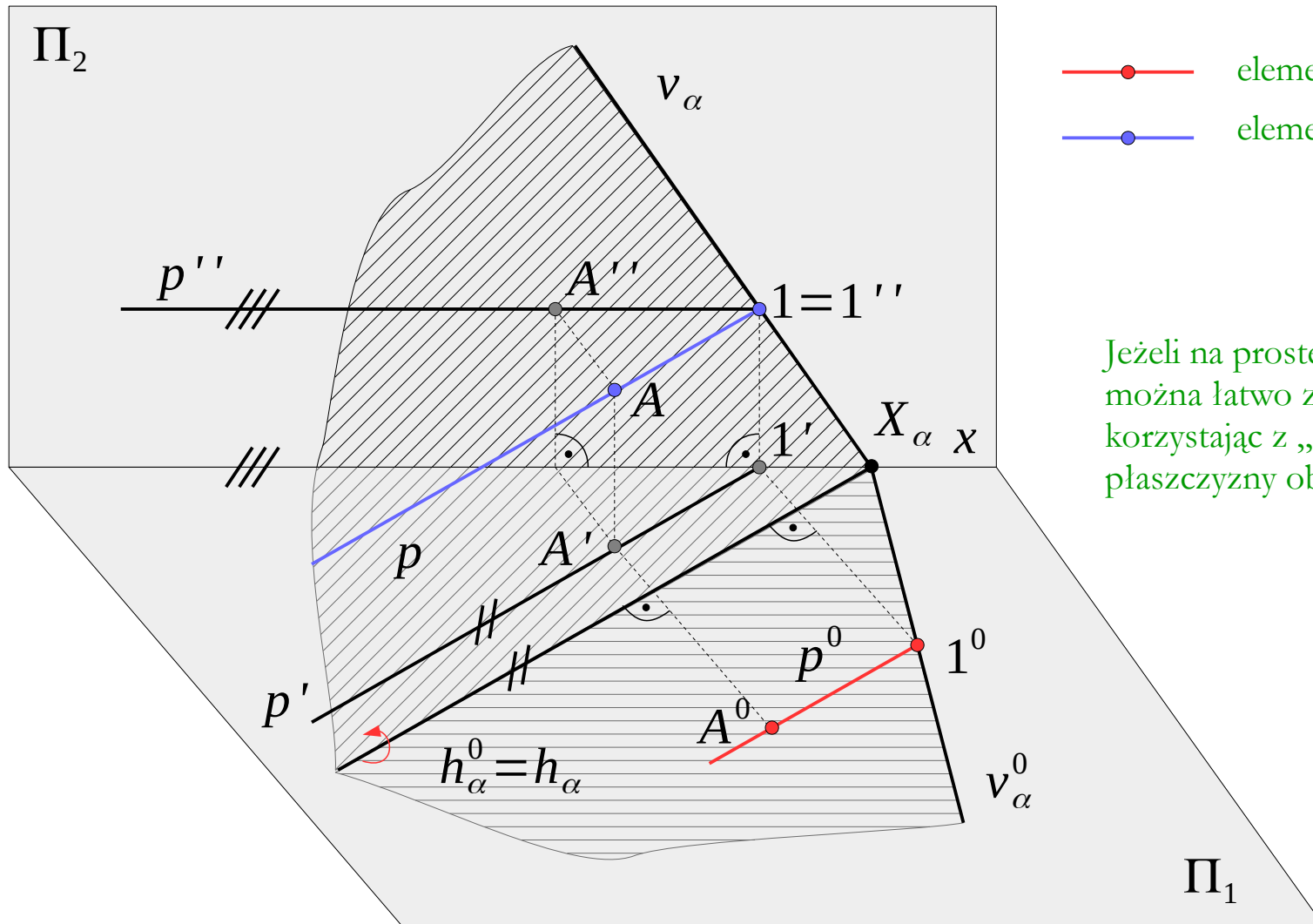
Podnoszenie z kładu



- element w kładzie
- element podniesiony

Jeśli punkt był śladem jakiejś prostej poziomej lub czołowej, to można narysować rzuty tej prostej, korzystając ze znanych już związków.

Podnoszenie z kładu

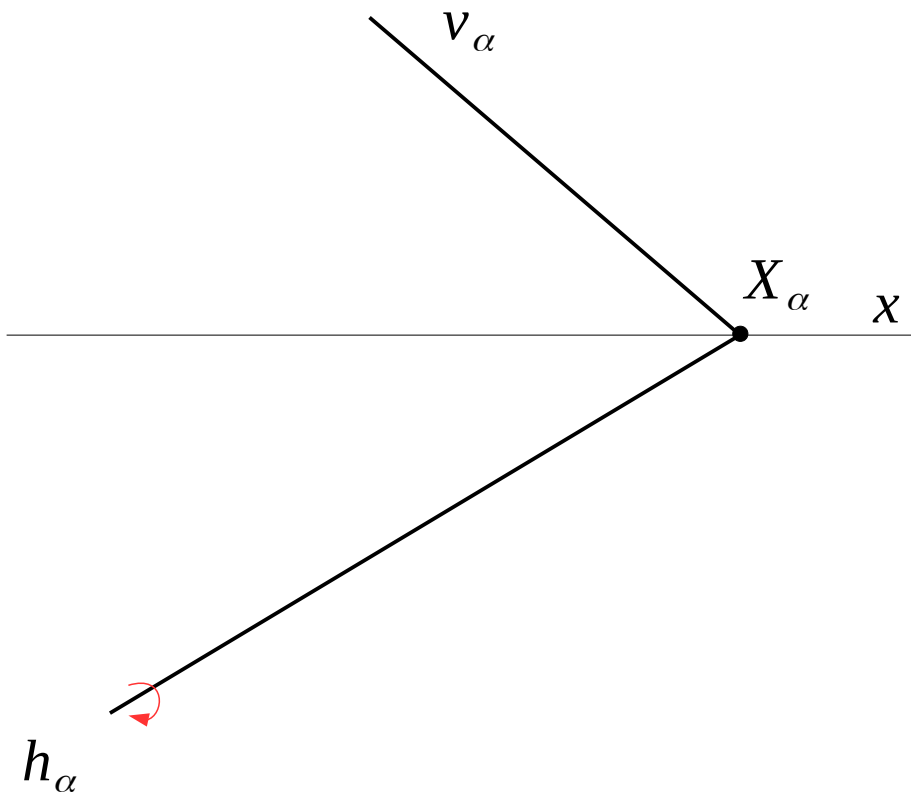


- element w kładzie
- element podniesiony

Jeżeli na prostej leżał jakiś punkt, to można łatwo znaleźć jego rzuty, korzystając z „odnoszącej” (śladu płaszczyzny obrotu tego punktu).

Podnoszenie z kładu

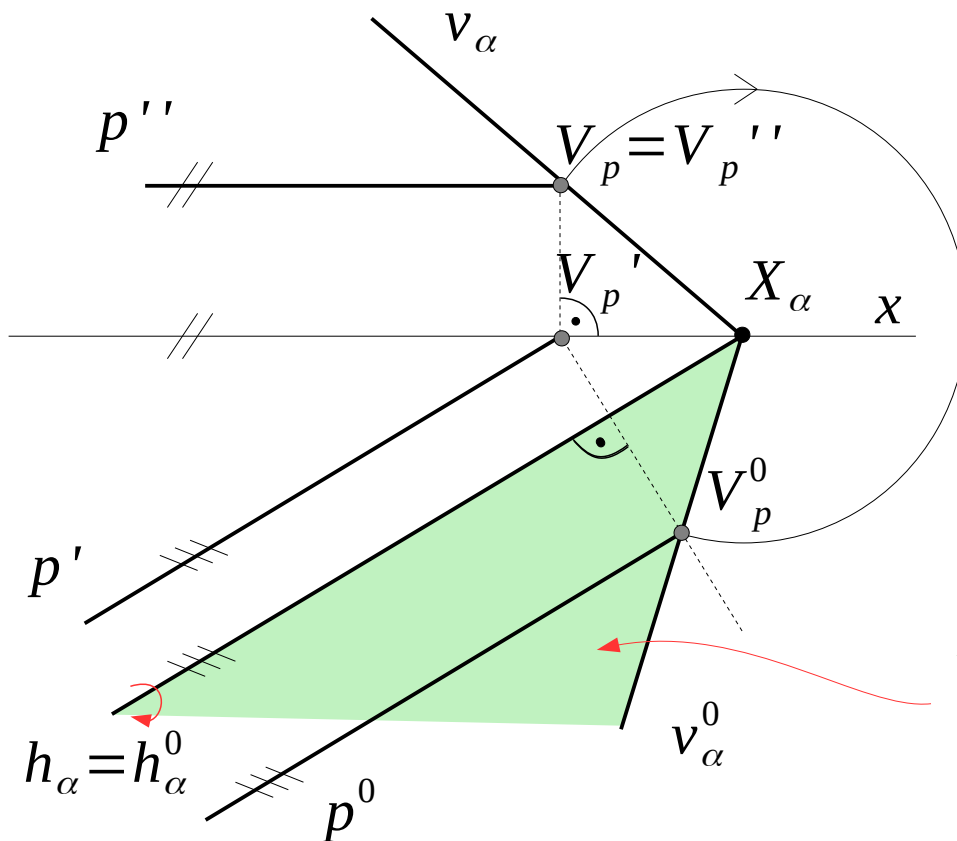
Na płaszczyźnie α narysować dowolny kwadrat o boku 1 cm.



Podnoszenie z kładu

Na płaszczyźnie α narysować dowolny kwadrat o boku 1 cm.

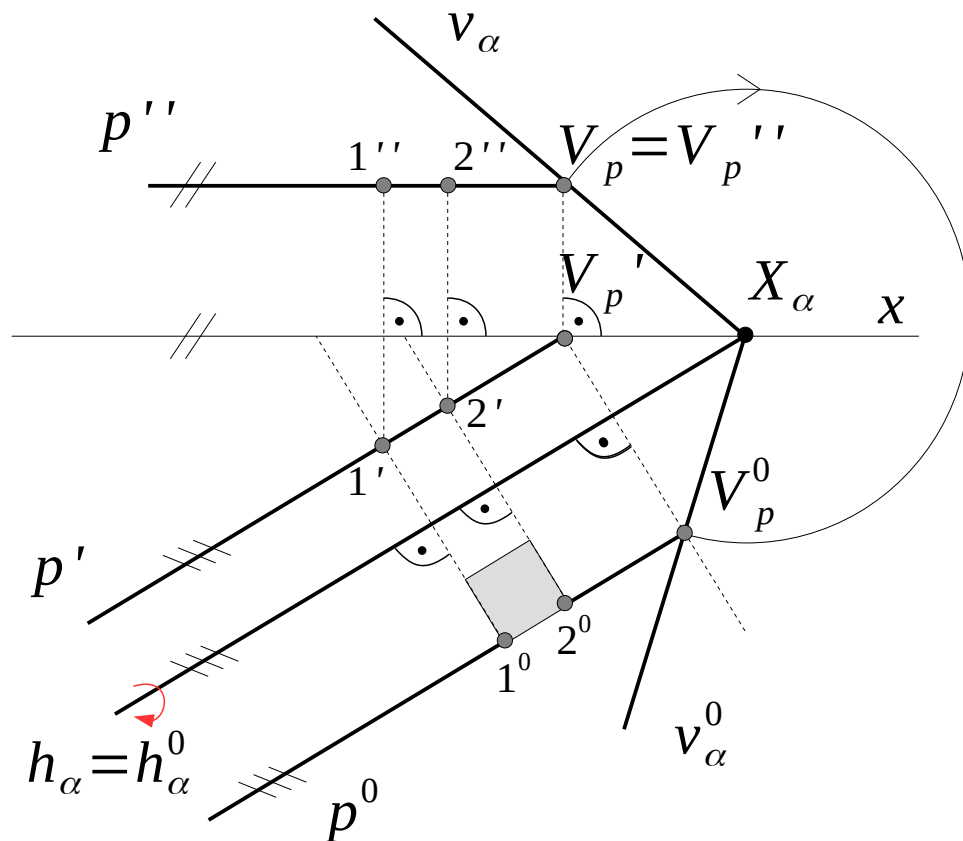
- Wykonujemy kład płaszczyzny razem z prostą.



W kładzie wszystkie elementy mają rzeczywiste rozmiary i kąty

Podnoszenie z kładu

Na płaszczyźnie α narysować dowolny kwadrat o boku 1 cm.



- Znajdujemy rzuty wierzchołków 1 i 2 – wiadomo, że leżą one na „odnoszących” oraz na odpowiednich rzutach prostej p .

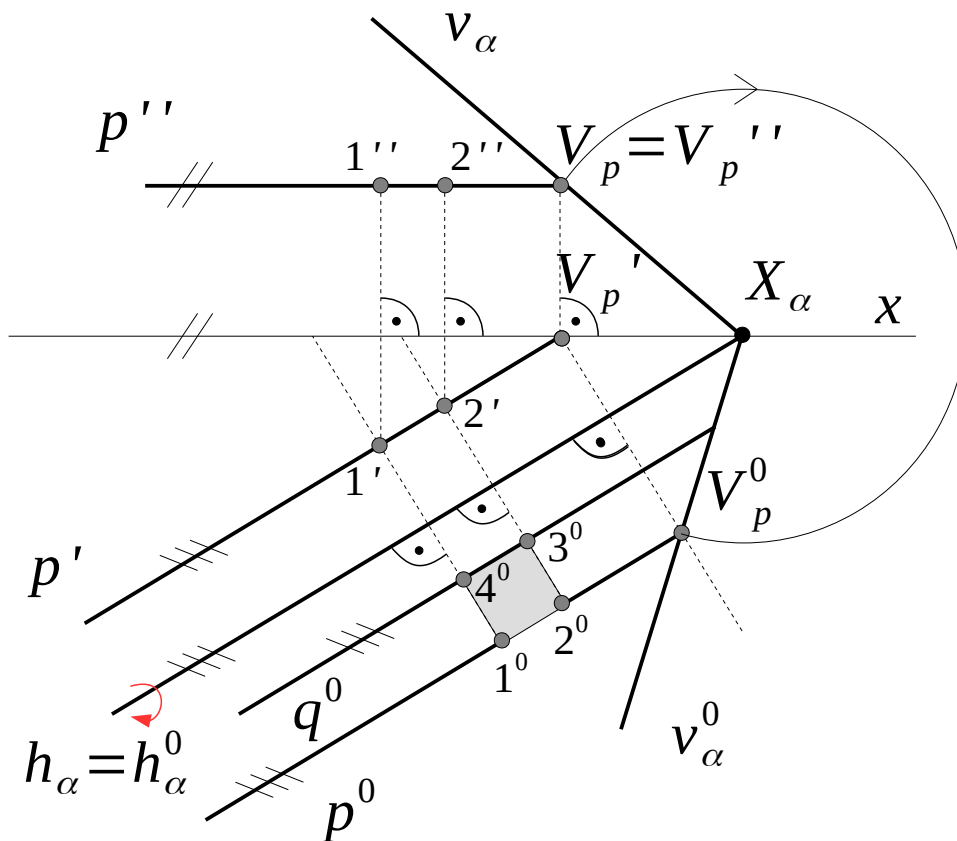
$$1 \in p \rightarrow \begin{cases} 1' \in p' \\ 1'' \in p'' \end{cases}$$

$$2 \in p \rightarrow \begin{cases} 2' \in p' \\ 2'' \in p'' \end{cases}$$

Podnoszenie z kładu

Na płaszczyźnie α narysować dowolny kwadrat o boku 1 cm.

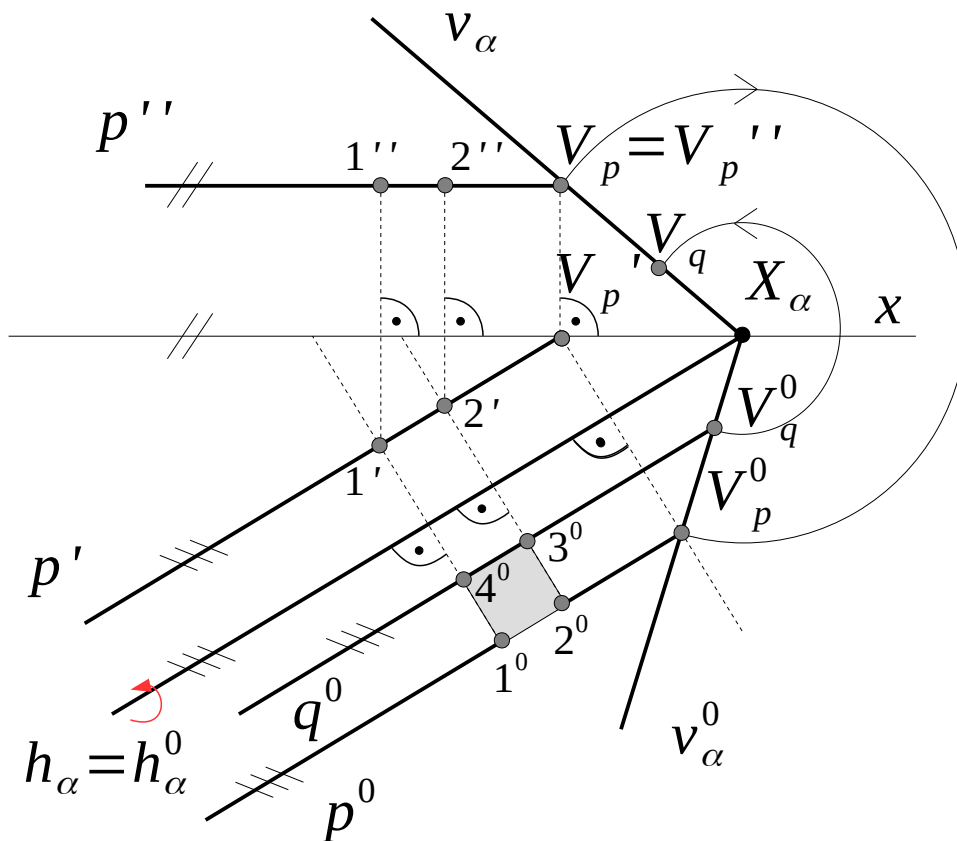
- Przez pozostałe dwa wierzchołki kwadratu prowadzimy drugą prostą poziomą – tu nazwaną q .



Podnoszenie z kładu

Na płaszczyźnie α narysować dowolny kwadrat o boku 1 cm.

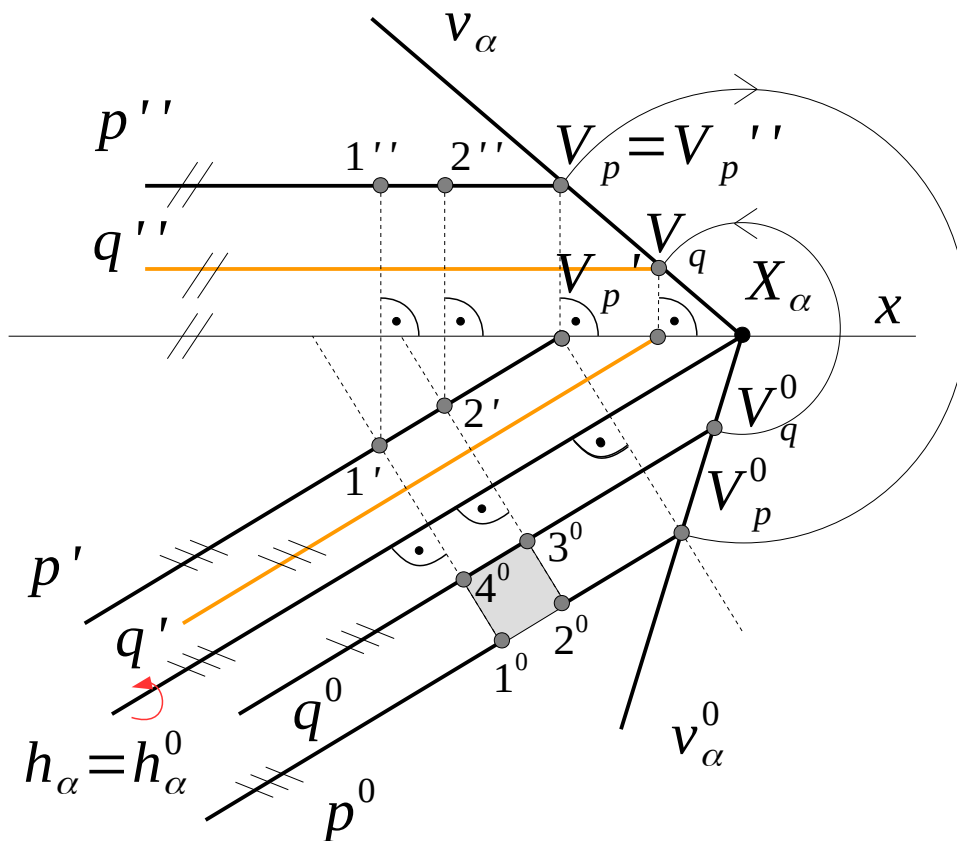
- Podnosimy z kładu ślad prostej q (ze względu na brak miejsca na rysunku pominięto oznaczenia rzutów tego śladu).



Podnoszenie z kładu

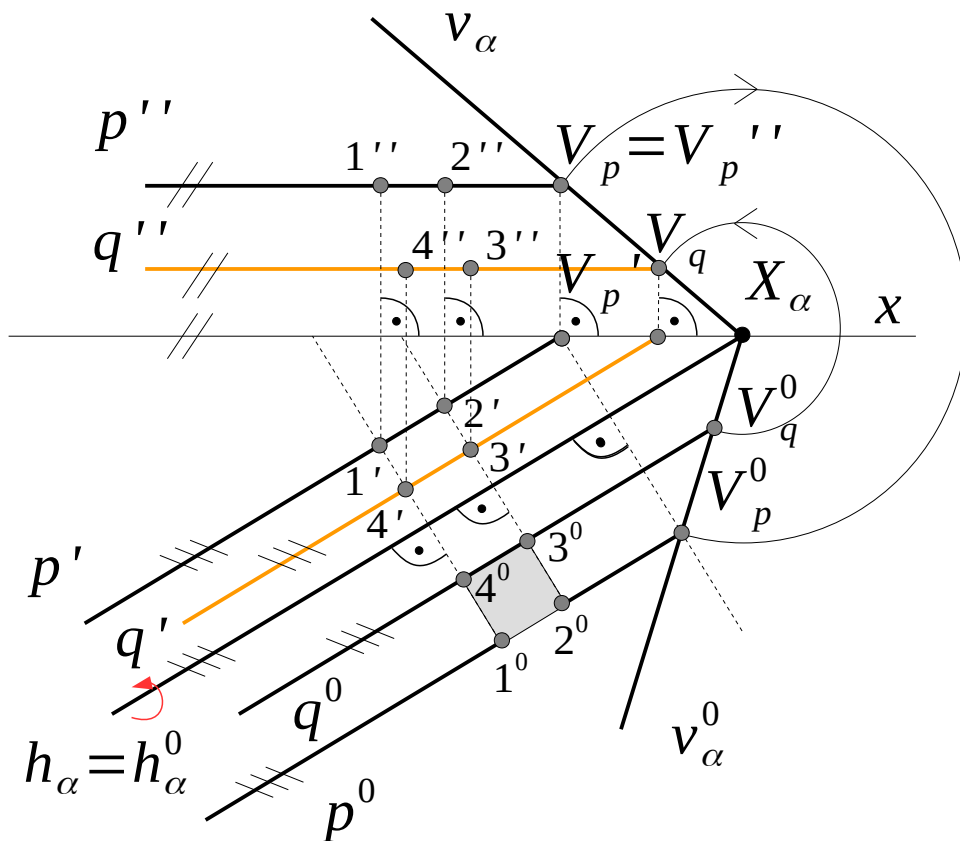
Na płaszczyźnie α narysować dowolny kwadrat o boku 1 cm.

- Rysujemy rzuty prostej q korzystając ze znanych już związków dotyczących położenia prostej szczególnej na płaszczyźnie.



Podnoszenie z kładu

Na płaszczyźnie α narysować dowolny kwadrat o boku 1 cm.



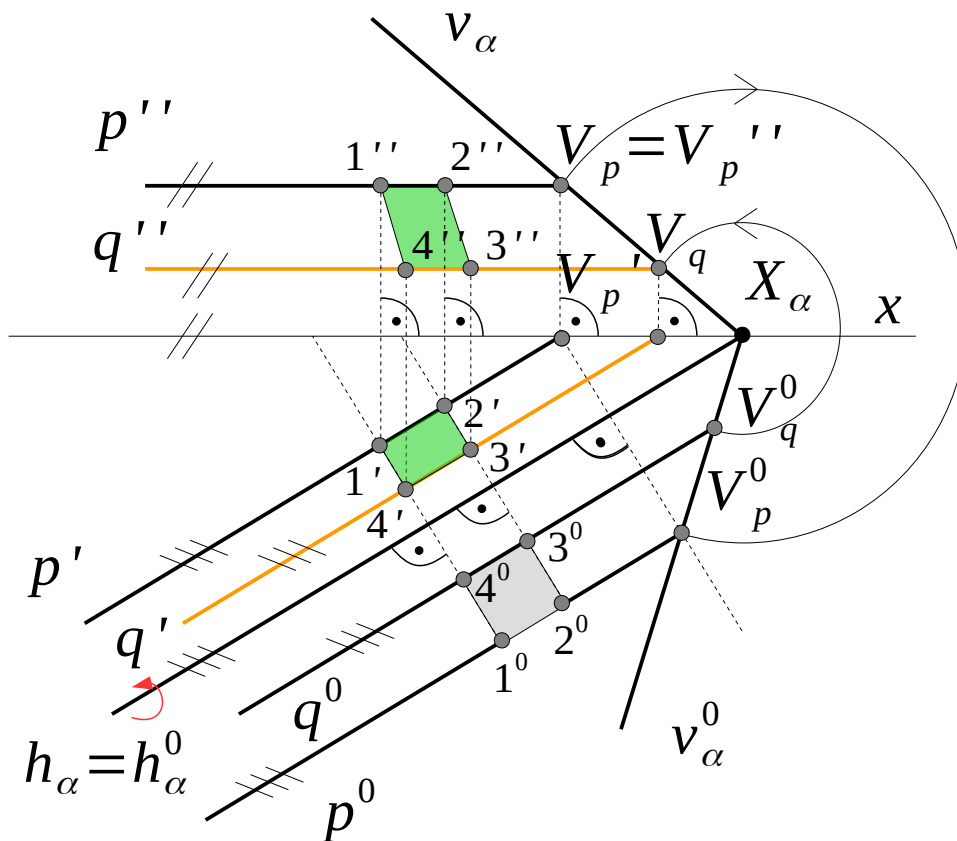
- Podnosimy z kładu punktu 3 i 4, tak samo jak to robiliśmy wcześniej z punktami 1 i 2.

Kłady złożone umożliwiają również:

- wyznaczanie rzeczywistych kształtów, wymiarów i kątów obiektów już istniejących, lub ich grup,
- rysowanie rzutów dowolnych figur o konkretnych kształtach, wymiarach i kątach.
- rysowanie obiektów położonych względem siebie w jakiś konkretny sposób – gdy np. podana jest jakaś odległość lub kąt.

Podnoszenie z kładu

Na płaszczyźnie α narysować dowolny kwadrat o boku 1 cm.



- Podnosimy z kładu punktu 3 i 4, tak samo jak to robiliśmy wcześniej z punktami 1 i 2.

Zwróćmy uwagę, że na rzutach obiekt nie wygląda na kwadrat – widać jedynie, że to jakiś równoległobok.

Podsumowanie

Zagadnienia:

Kład prosty punktu, odcinka i prostej; kłady złożone, podnoszenie z kładu.

UNIVERSITY OF WARMIA AND MAZURY IN OLSZTYN
The Faculty of Technical Sciences
POLAND, 10-957 Olsztyn, M. Oczapowskiego 11
tel.: (48)(89) 5-23-32-40, fax: (48)(89) 5-23-32-55
URL: <http://www.uwm.edu.pl/edu/sobieski/> (in Polish)



Dziękuję za uwagę

Wojciech Sobieski

Olsztyn, 2021