UNIVERSITY OF WARMIA AND MAZURY IN OLSZTYN
The Faculty of Technical Sciences
POLAND, 10-957 Olsztyn, M. Oczapowskiego 11
tel.: (48)(89) 5-23-32-40, fax: (48)(89) 5-23-32-55
URL: http://www.uwm.edu.pl/edu/sobieski/ (in Polish)

GEOMETRIA WYKREŚLNA

Transformacje.

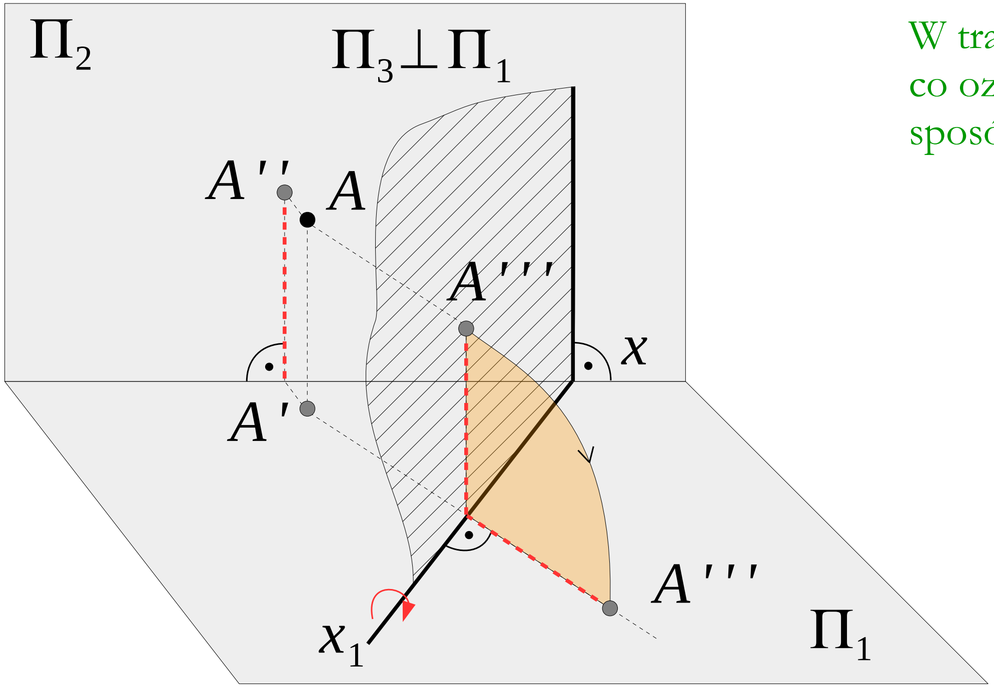
wersja: 20 stycznia 2023

Wojciech Sobieski

Olsztyn, 2021

Transformacja

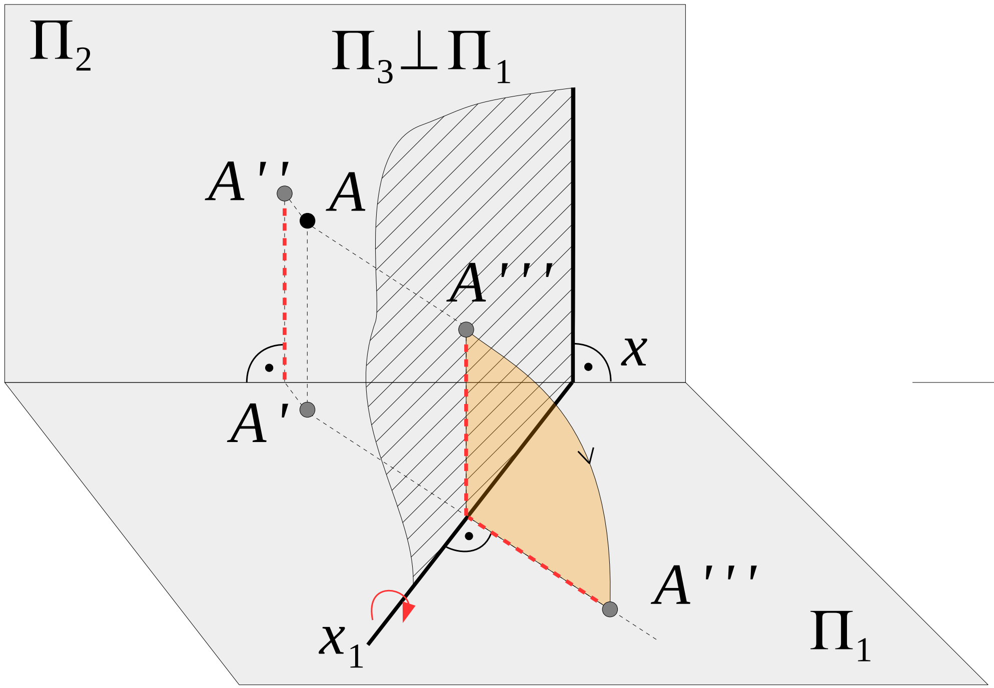
Transformacja – technika rysunkowa polegająca na wstawianiu dodatkowych płaszczyzn rzutujących (zawsze prostopadle do innych, istniejących już płaszczyzn rzutujących), zazwyczaj zorientowanych równolegle lub prostopadłe do wybranych elementów, co pozwala na uzyskanie ich rzeczywistych kształtów i wymiarów.

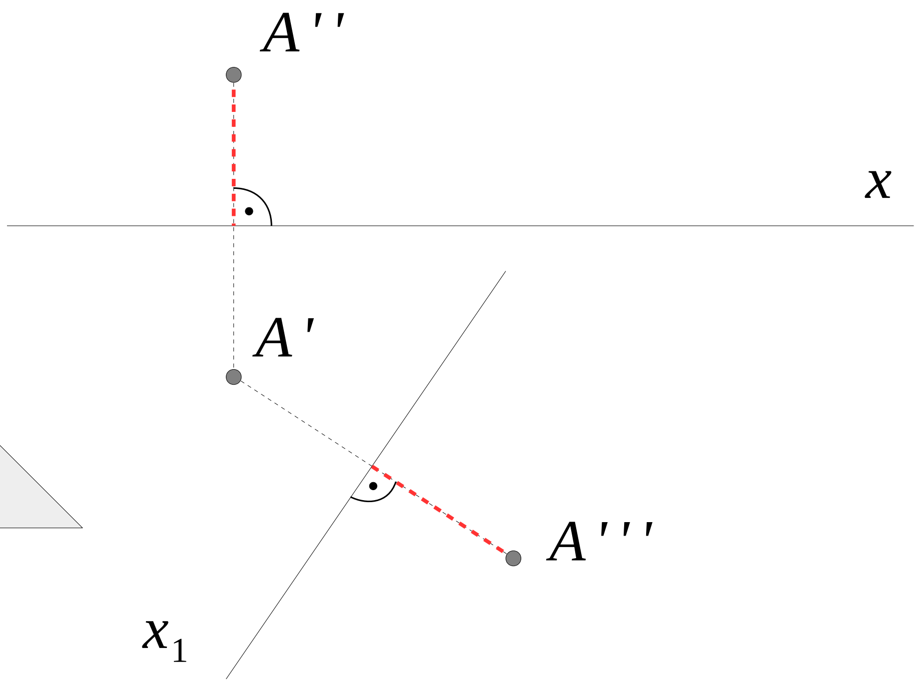


W transformacjach nadal używamy metody Monge'a, co oznacza, że wszystkie rzutnie obracamy w taki sposób, aby się na siebie nałożyły.

Ponieważ rzutnia Π_2 oraz Π_3 są prostopadłe do rzutni Π_1, to odległość rzutu A'' od osi x jest taka sama jak odległość rzutu A''' od osi x_1.

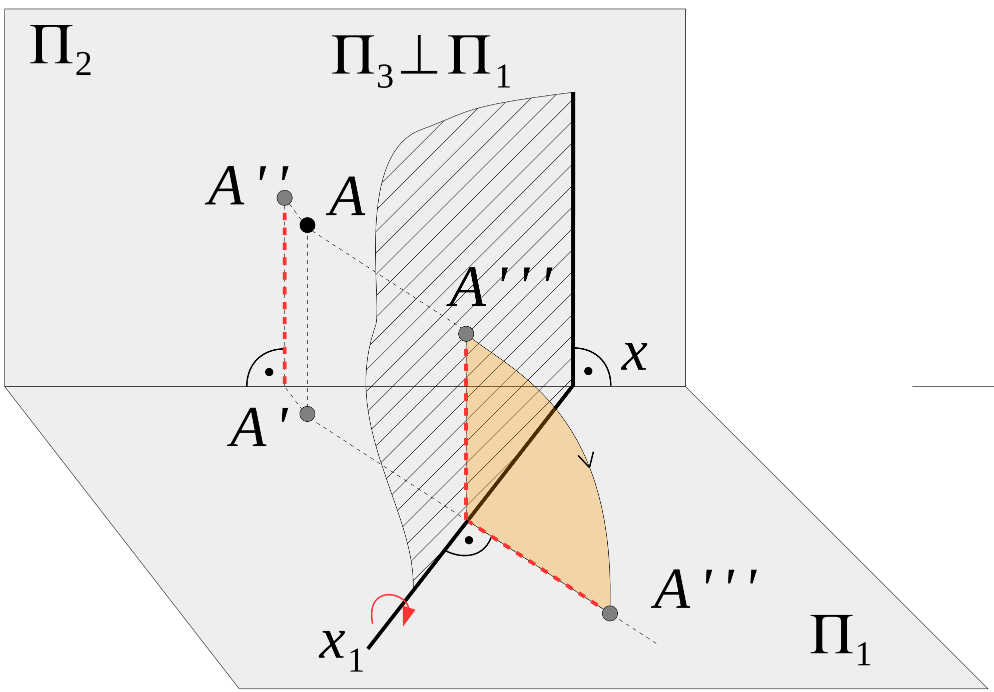
Transformacja punktu

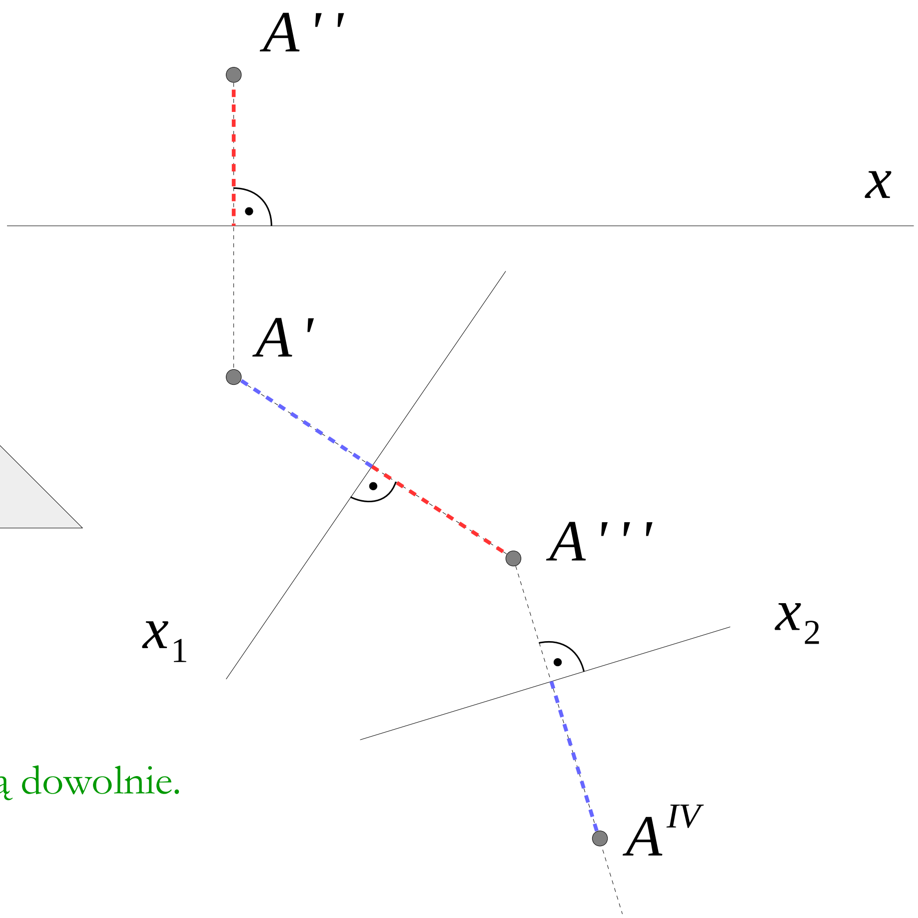




W transformacjach wymiary leżące na zewnątrz (lub wewnątrz, jeżeli są ujemne) sąsiednich osi układu odniesienia są sobie (**zawsze**, **zawsze**) równe.

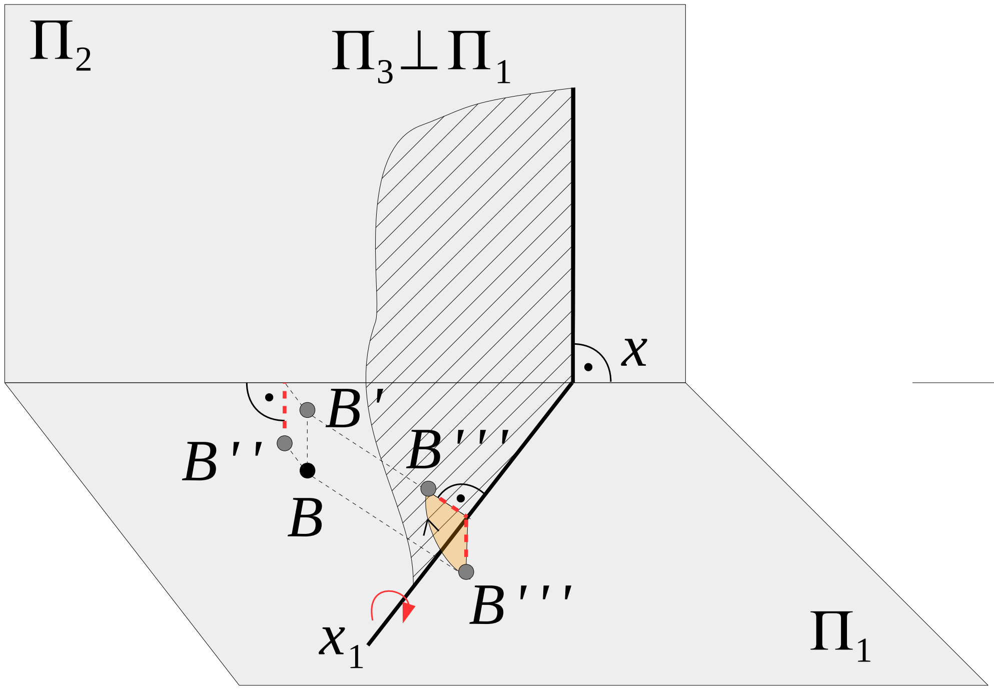
Transformacja punktu

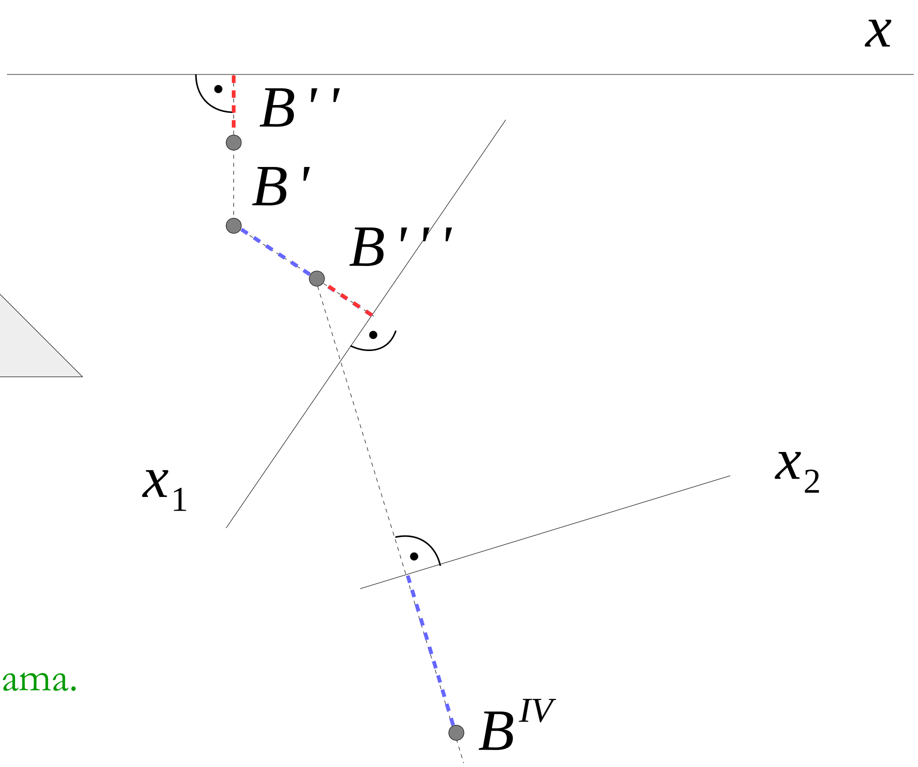




Tu nowe rzutnie – i osie je określające – wstawione są dowolnie.

Transformacja punktu

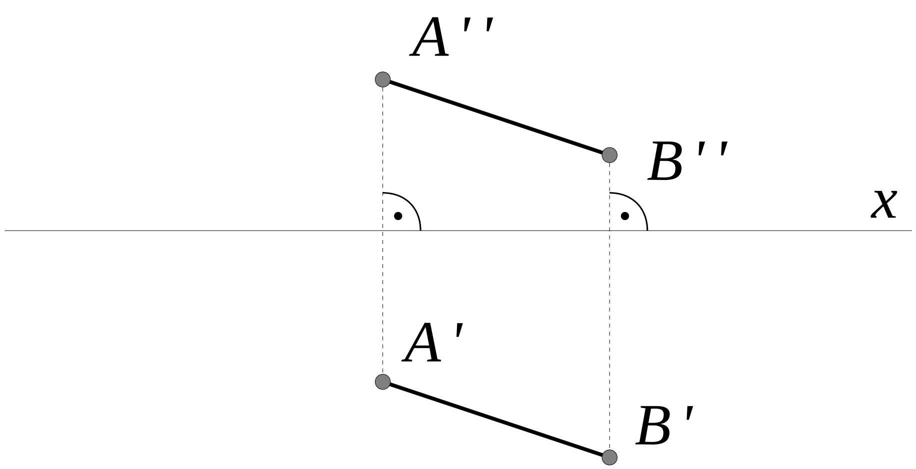




W tym przykładzie punkt B ma ujemną wysokość
– niczego to nie zmienia, bo zasada jest zawsze taka sama.

Transformacja odcinka

Wyznaczyć rzeczywistą długość odcinka AB.

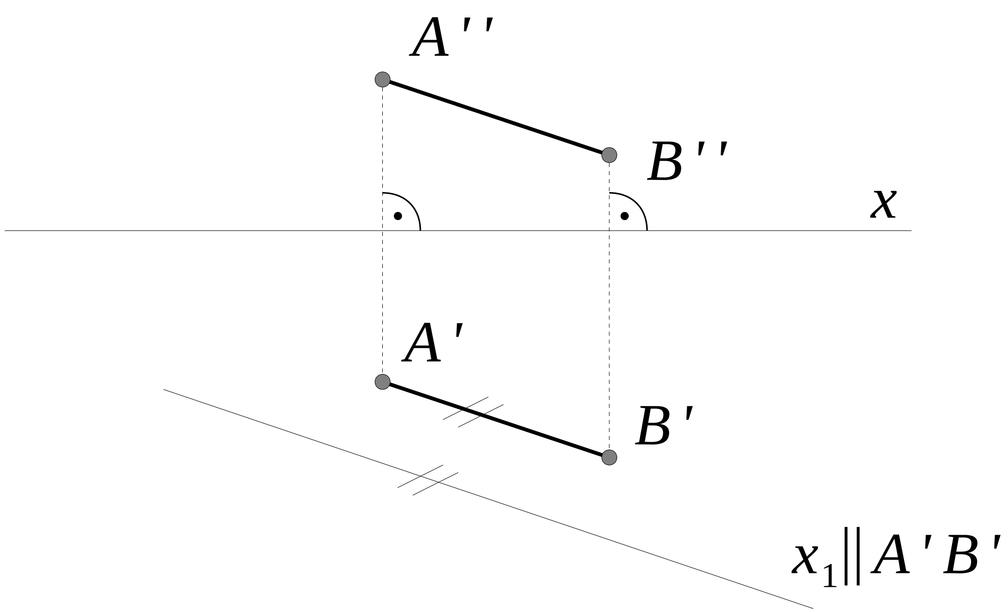


Zadanie to można rozwiązać stosując:

- obrót,
- kład prosty lub kład złożony,
- transformację.

Transformacja odcinka

Wyznaczyć rzeczywistą długość odcinka AB.



Zadanie to można rozwiązać stosując:

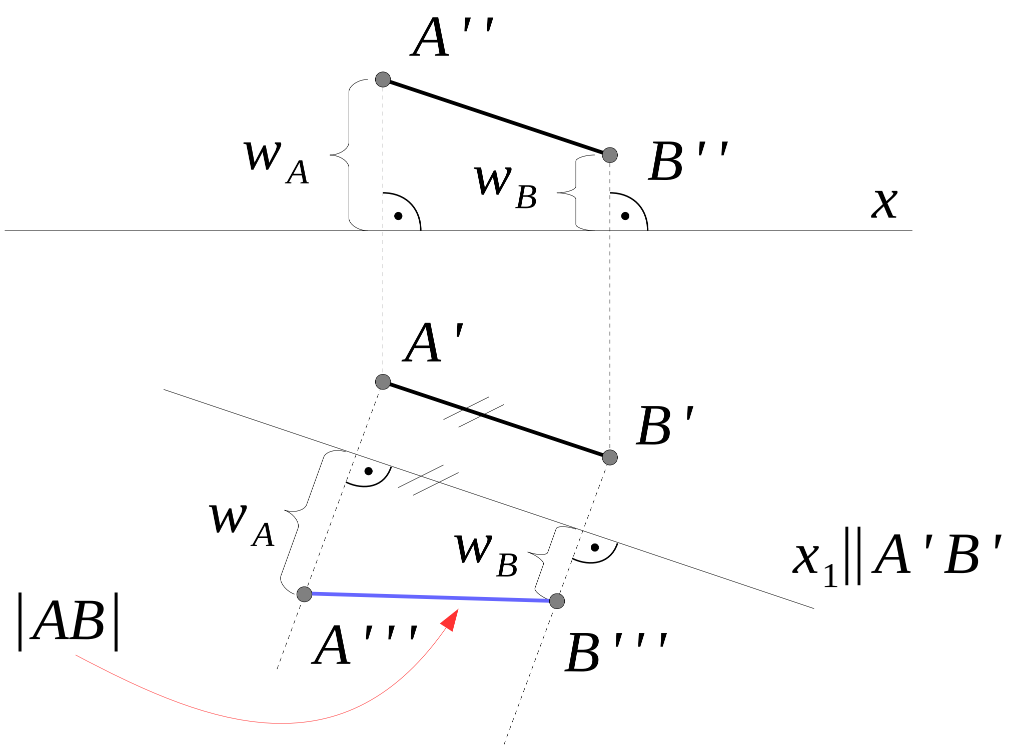
- obrót,
- kład prosty lub kład złożony,
- transformację.

Wiadomo, że rzeczywiste długości widoczne są wtedy, gdy obiekt leży na rzutni lub gdy jest do niej równoległy – wstawmy więc w dowolnym miejscu nową rzutnię, równoległą do odcina AB.

Kluczowym pytaniem w transformacjach jest to, jak ustawić nową rzutnię (oś): równolegle czy prostopadle do obiektu.

Transformacja odcinka

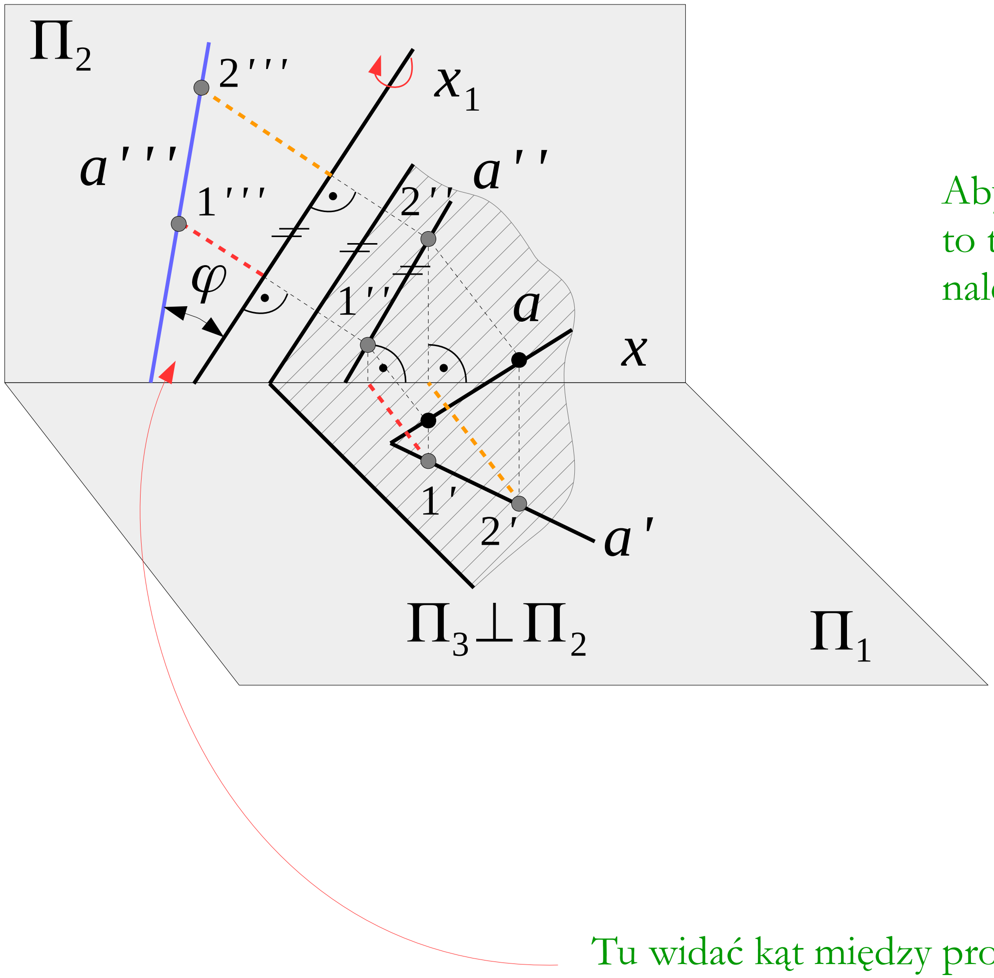
Wyznaczyć rzeczywistą długość odcinka AB.



Wykonajmy teraz transformację obu punktów względem nowej osi.

Gdyby oś x_1 przechodziła przez rzut poziomy odcinka, to efekt byłby taki sam, jak przy zastosowaniu kładu prostego.

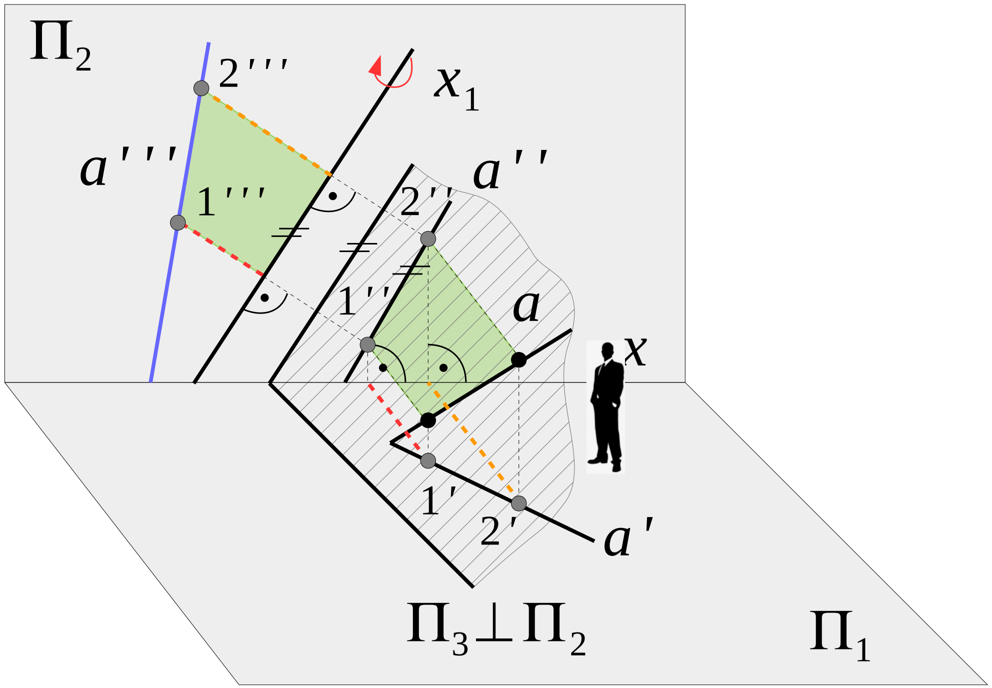
Transformacja prostej



Aby narysować jakąś linię, np. trzeci rzut prostej a, to trzeba mieć trzecie rzuty dwóch punktów do niej należących, np. punktów 1 i 2.

Tu widać kąt między prostą a rzutnią pionową.

Transformacja prostej



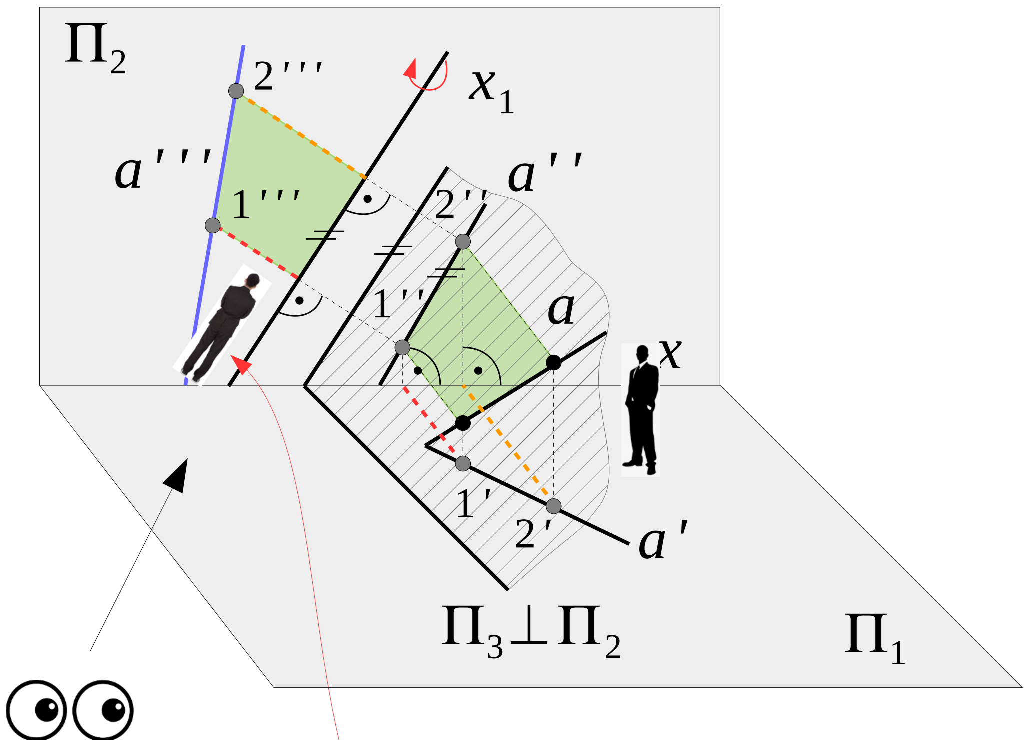
Pamiętajmy, że transformacja to „widok” z innej – wygodnej z jakiegoś względu – strony.

Gdybyśmy stali tak, jak człowiek na rysunku, to:

- po prawej stronie (na „ścianie”, czyli rzutni pionowej) widzielibyśmy rzut pionowy prostej – byłaby to podstawa (bok, przy którym dwa kąty są proste) zielonego trapezu widocznego na rysunku,
- po lewej stronie widzielibyśmy nachyloną, odchodzącą w górę i w lewo prostą a – byłaby to góra (bok, przy którym oba kąty nie są proste) zielonego trapezu widocznego na rysunku.

Na pierwszym wykładzie była mowa o tym, że „primy” dają nam widok z góry, a „bisy” widok z przodu.

Transformacja prostej



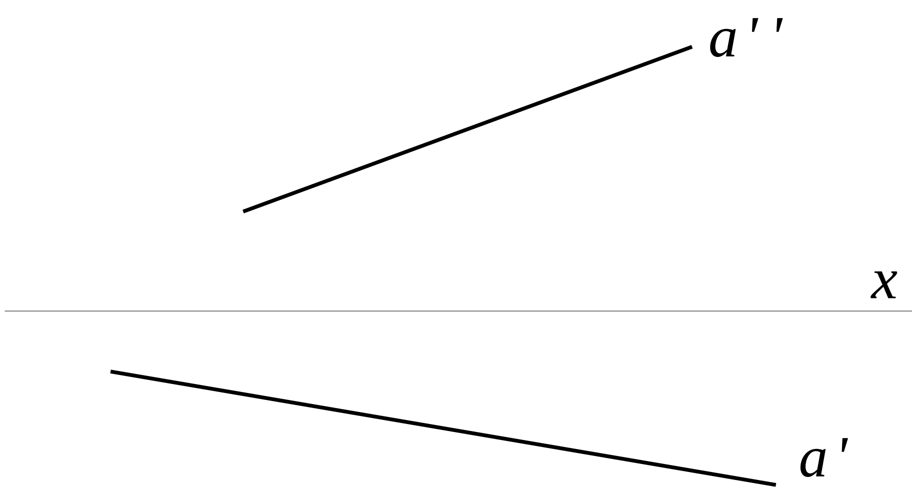
Pamiętajmy, że transformacja to „widok" z innej – wygodnej z jakiegoś względu – strony.

Po wykonaniu transformacji i spojrzeniu zza pleców obserwatora, zobaczylibyśmy obraz dokładnie taki, jaki widać na trzecich rzutach.

Obserwator jest pochylony, gdyż oś x_1,
wokół której obracamy trzecią rzutnię nie jest prostopadła do osi x.

Transformacja prostej

Wyznaczyć kąt nachylenia prostej do rzutni poziomej.

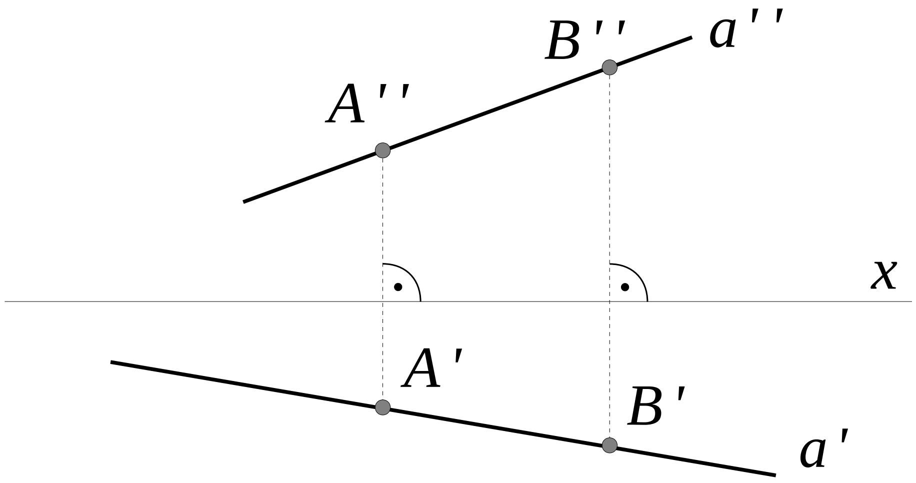


Zadanie to można rozwiązać stosując:

- obrót,
- kład prosty lub kład złożony,
- transformację.

Transformacja prostej

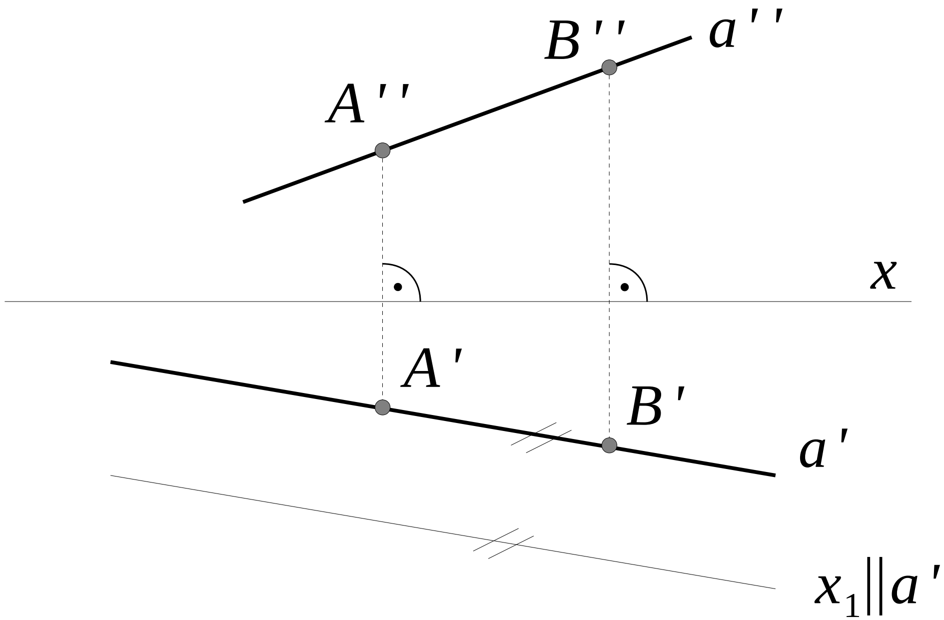
Wyznaczyć kąt nachylenia prostej do rzutni poziomej.



Aby wykonać transformację prostej, trzeba obrać na niej jakieś dwa punkty.

Transformacja prostej

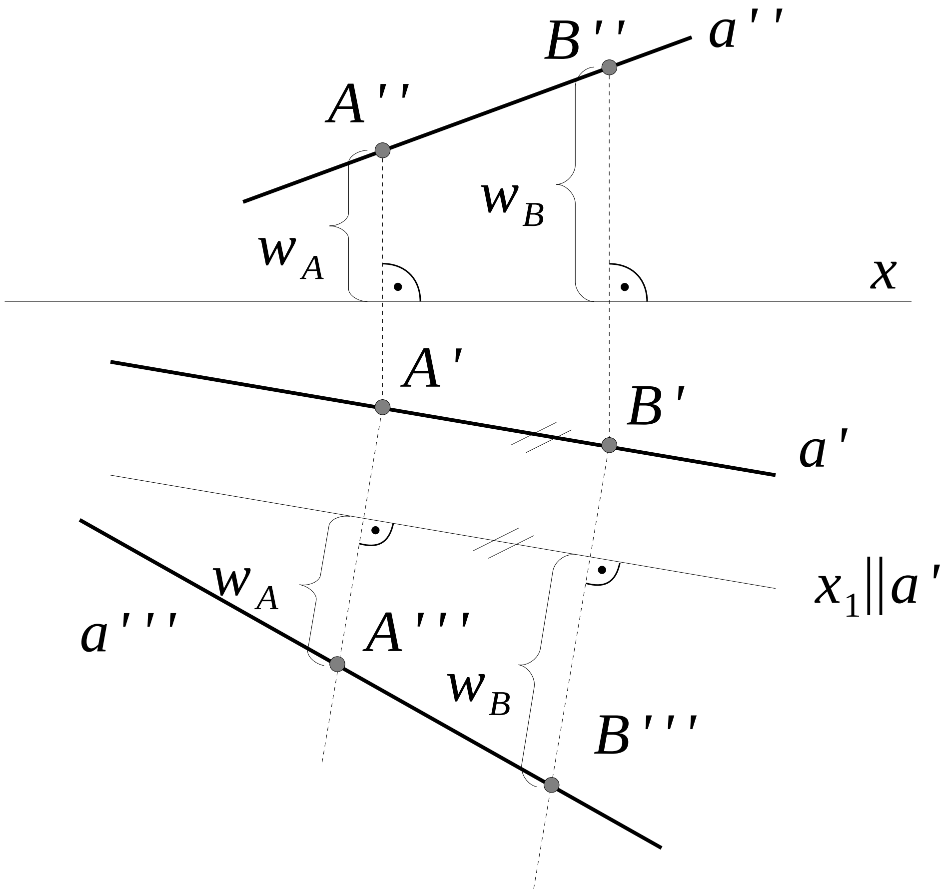
Wyznaczyć kąt nachylenia prostej do rzutni poziomej.



Treść zadania wskazuje, że nową rzutnię trzeba wstawić równolegle do rzutu poziomego prostej – odległość między rzutem a’ a osią x_1 nie ma znaczenia.

Transformacja prostej

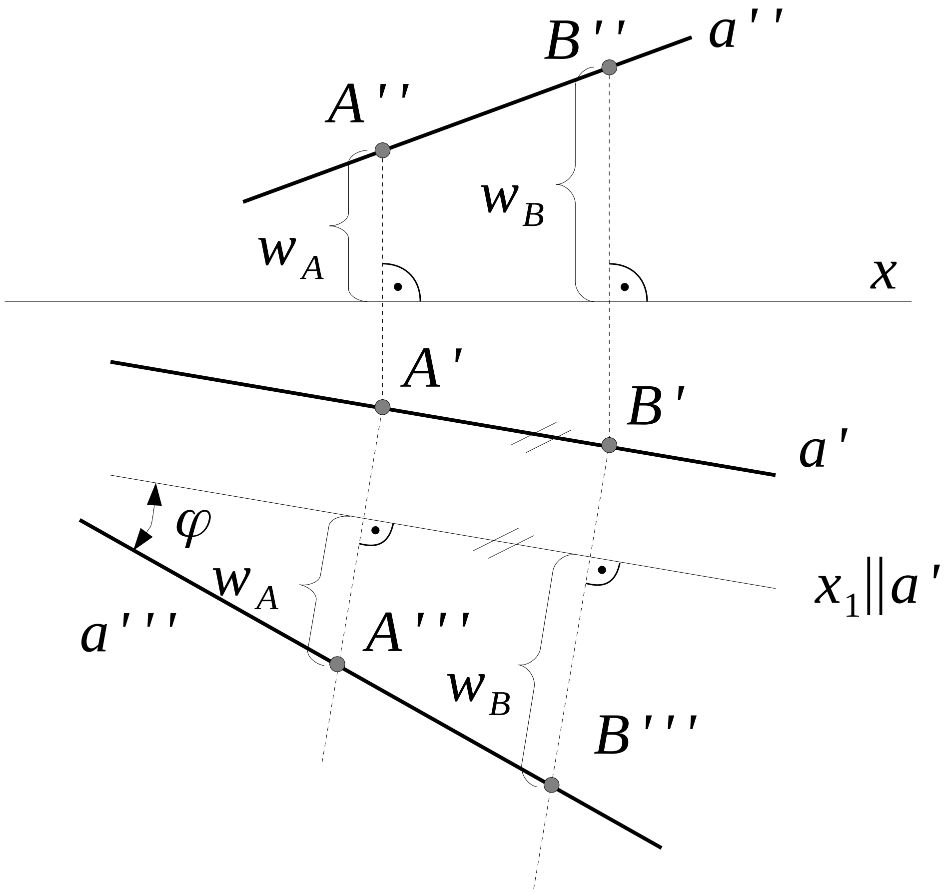
Wyznaczyć kąt nachylenia prostej do rzutni poziomej.



Wykonajmy transformację punktów A i B względem osi x_1.

Transformacja prostej

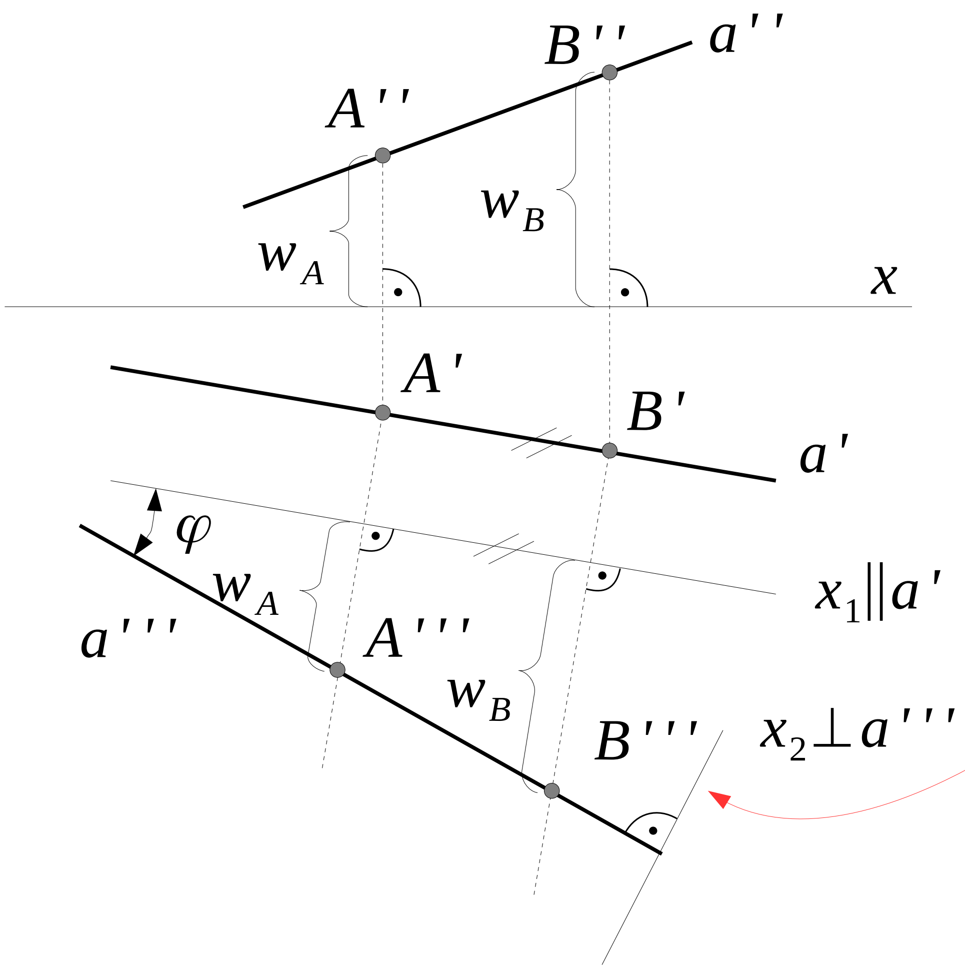
Wyznaczyć kąt nachylenia prostej do rzutni poziomej.



Zaznaczmy poszukiwany kąt.

Transformacja prostej

Wyznaczyć kąt nachylenia prostej do rzutni poziomej.

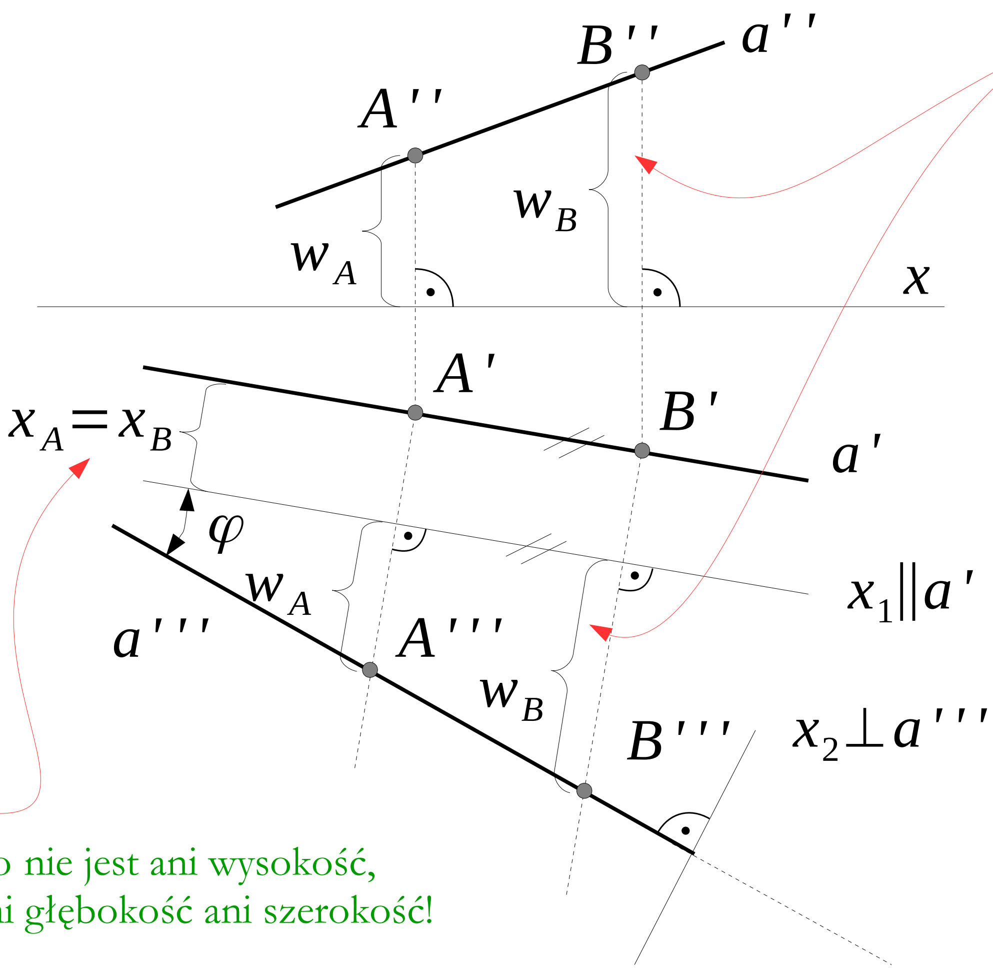


Zadanie zostało wykonane, ale sprawdźmy coś jeszcze!

Wykonajmy transformację prostej względem rzutni prostopadłej do jej rzutu trzeciego.

Transformacja prostej

Wyznaczyć kąt nachylenia prostej do rzutni poziomej.



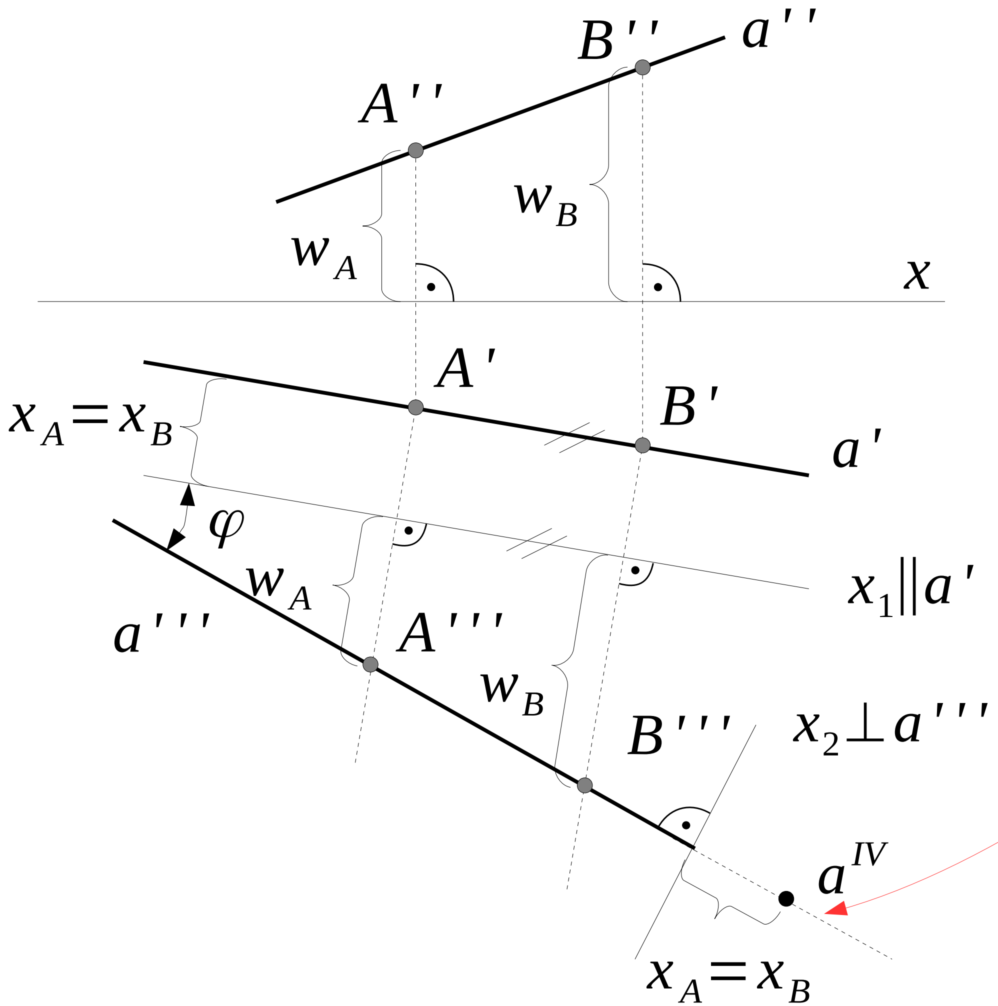
Ten wymiar to wysokość punktu
i tak został oznaczony.

Zadanie zostało wykonane, ale sprawdźmy
coś jeszcze!

To nie jest ani wysokość,
ani głębokość ani szerokość!

Transformacja prostej

Wyznaczyć kąt nachylenia prostej do rzutni poziomej.

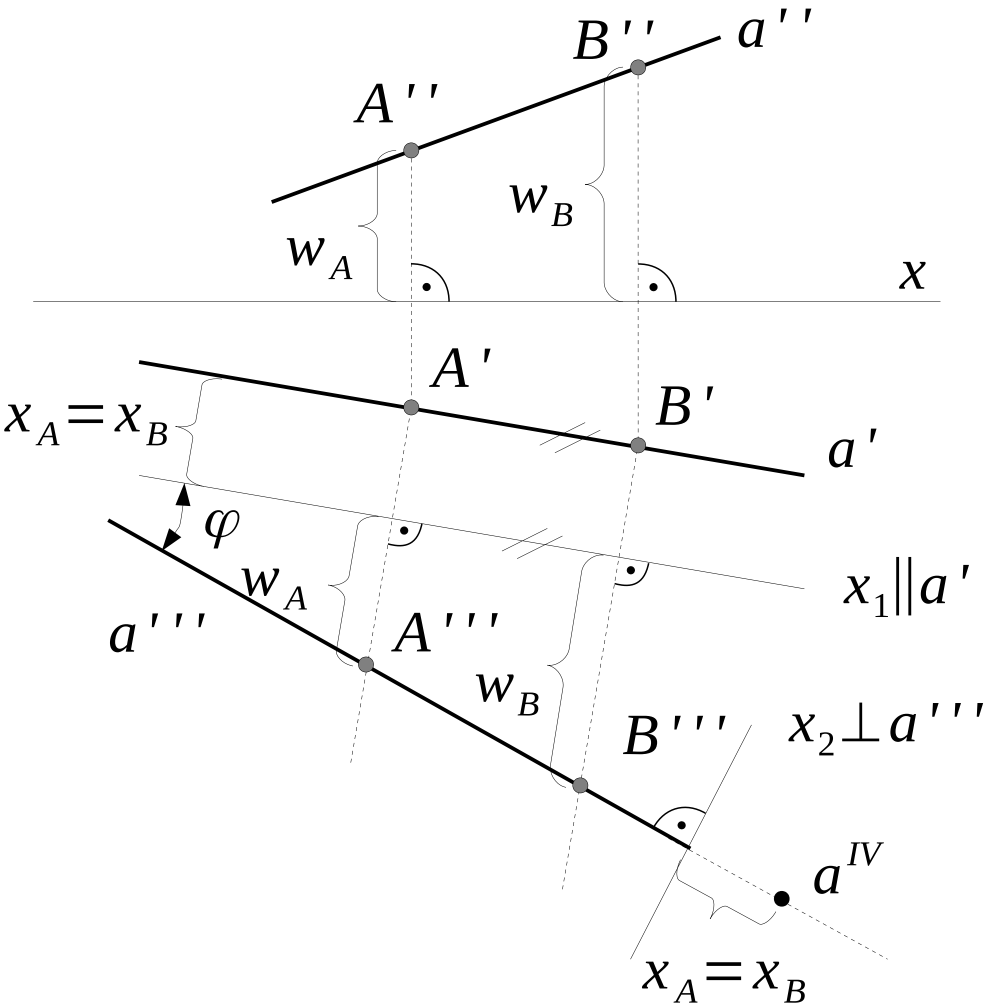


Zadanie zostało wykonane, ale sprawdźmy coś jeszcze!

Ponieważ $x_1 \| a'$, to odległości między rzutami A’ i B’ a osią x_1 są takie same – w konsekwencji prosta na rzucie czwartym jest punktem.

Transformacja prostej

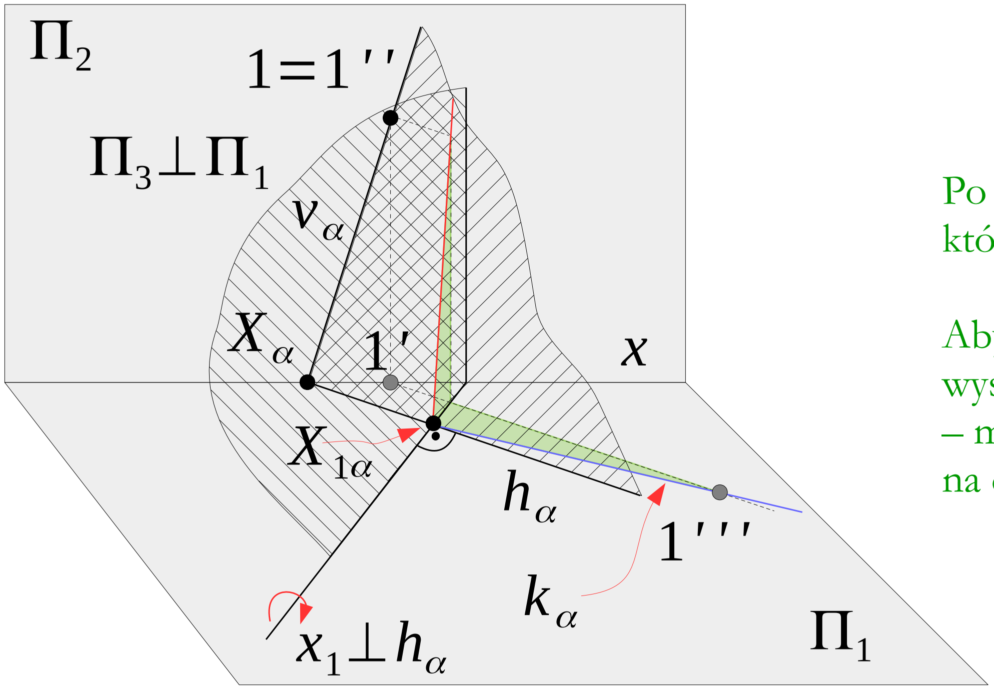
Wyznaczyć kąt nachylenia prostej do rzutni poziomej.



Przedstawiona tu konstrukcja
(jedna transformacja równoległa i jedna
transformacja prostopadła prostej)
pozwala na określanie odległości prostej
od innych elementów:

- innej prostej równoległej lub skośnej,
- płaszczyzny (jeśli jest ona równoległa do tej prostej),
- punktu (jeśli punkt nie leży na tej prostej).

Transformacja płaszczyzny

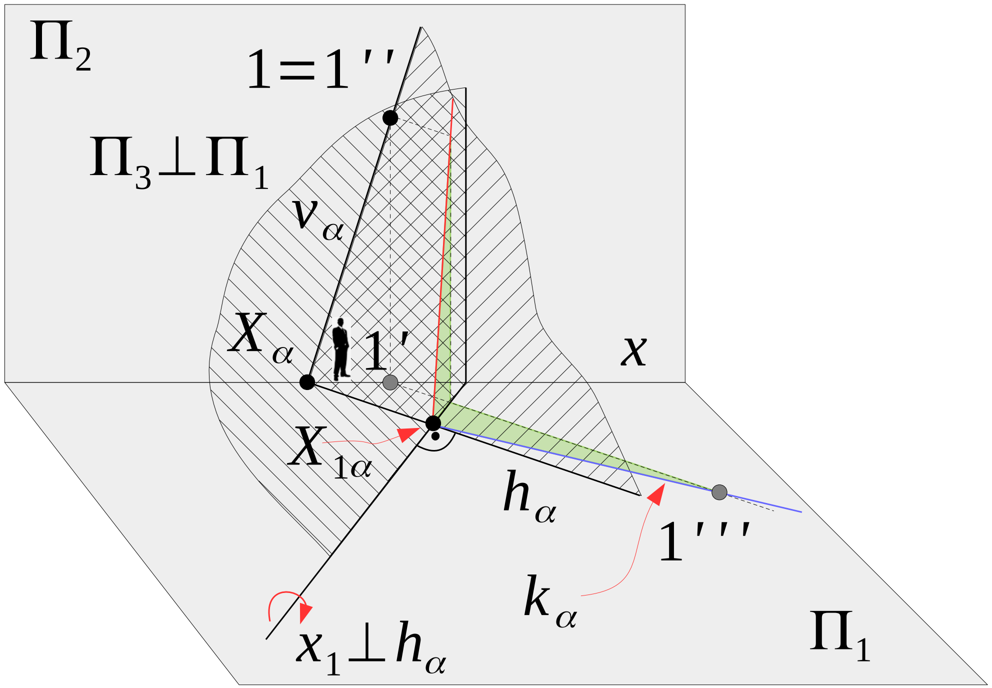


Po wstawieniu nowej rzutni prostopadłej do któregoś śladu płaszczyzny powstanie nowy węzeł.

Aby uzyskać ślad płaszczyzny na nowej rzutni, wystarczy trzeci rzut tylko jednego punktu – może to być np. punkt leżący na drugim śladzie tej płaszczyzny.

Transformacja płaszczyzny względem rzutni do niej równoległej nic nie daje – przydatne są w zasadzie tylko transformacje płaszczyzn na rzutnie do nich prostopadłe.

Transformacja płaszczyzny



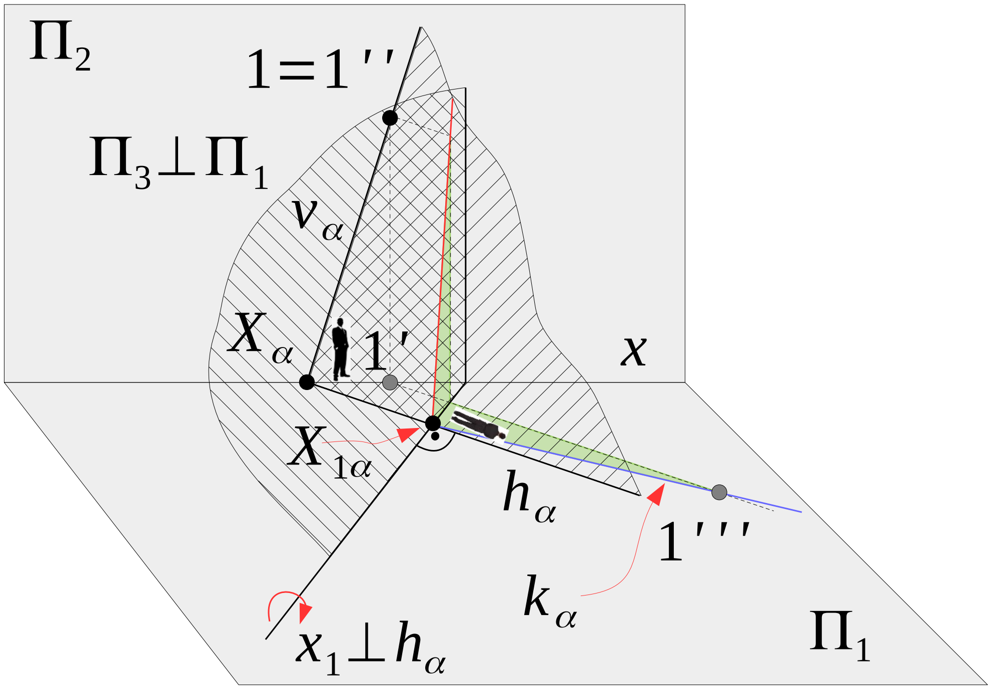
Pamiętajmy, że transformacja to „widok” z innej – wygodnej z jakiegoś względu – strony.

Gdybyśmy stali tak, jak człowiek na rysunku, to:

- przed sobą na dole („podłodze”) widzielibyśmy oś x_1.
- przed sobą po prawej stronie widzielibyśmy krawędź płaszczyzny i trzeciej rzutni (linia czerwona).

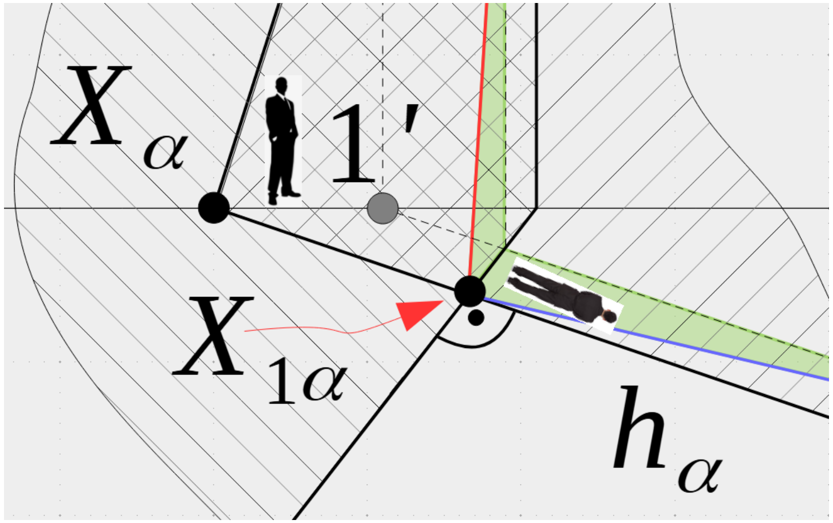
Kolejny ślad płaszczyzny zwykło się oznaczać symbol k, chodź jest do dyskusyjne – symbol ten stosuje się bowiem do oznaczania śladu bocznego w układzie trzech wzajemnie prostopadłych rzutni (a tu tak nie jest).

Transformacja płaszczyzny



Pamiętajmy, że transformacja to „widok” z innej – wygodnej z jakiegoś względu – strony.

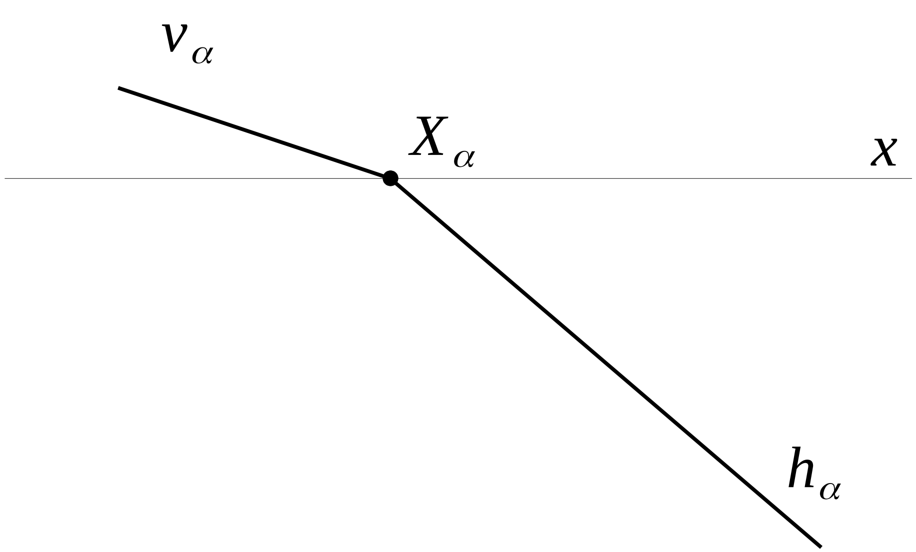
Po wykonaniu transformacji i spojrzeniu zza pleców obserwatora, zobaczylibyśmy obraz dokładnie taki, jaki widać na trzecich rzutach.



Powiększenie opisywanego tu fragmentu rysunku.

Transformacja płaszczyzny

Wyznaczyć kąt nachylenia płaszczyzny do rzutni poziomej.



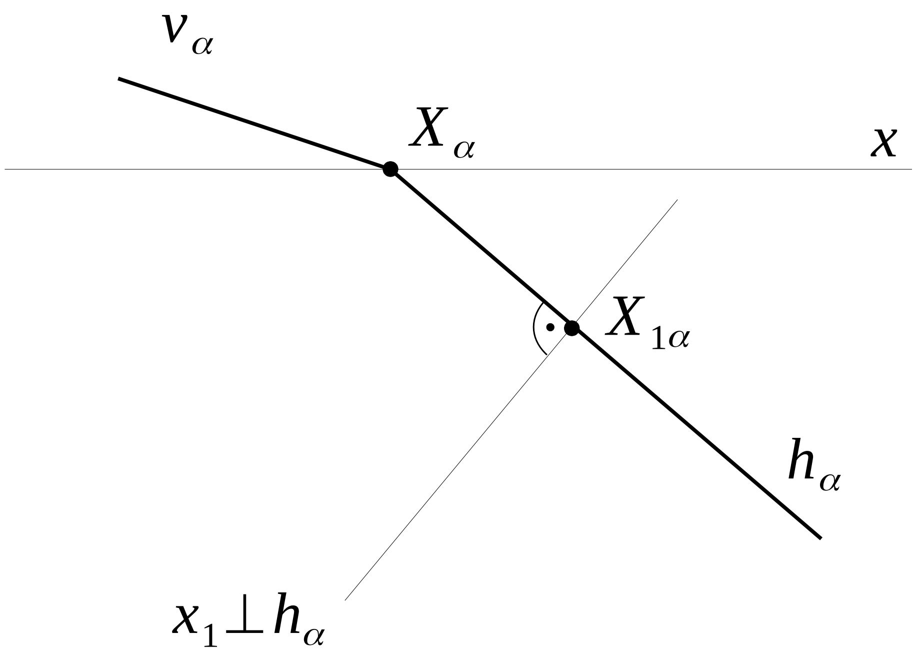
Zadanie to można rozwiązać stosując:

- obrót,
- kład prosty lub kład złożony,
- transformację.

Transformacja płaszczyzny

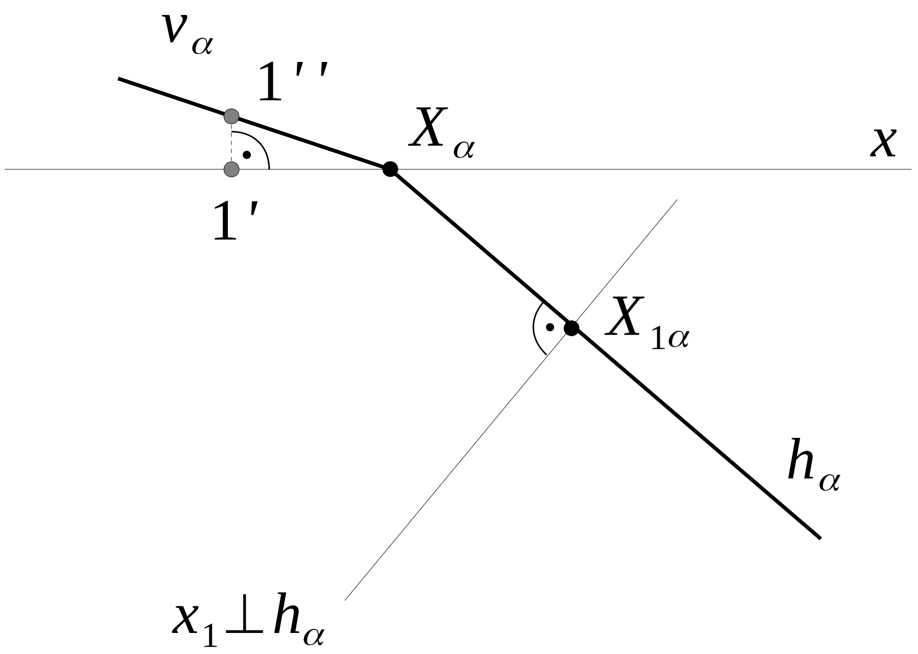
Wyznaczyć kąt nachylenia płaszczyzny do rzutni poziomej.

Wstawiamy nową rzutnię prostopadłą do śladu poziomego płaszczyzny.



Transformacja płaszczyzny

Wyznaczyć kąt nachylenia płaszczyzny do rzutni poziomej.

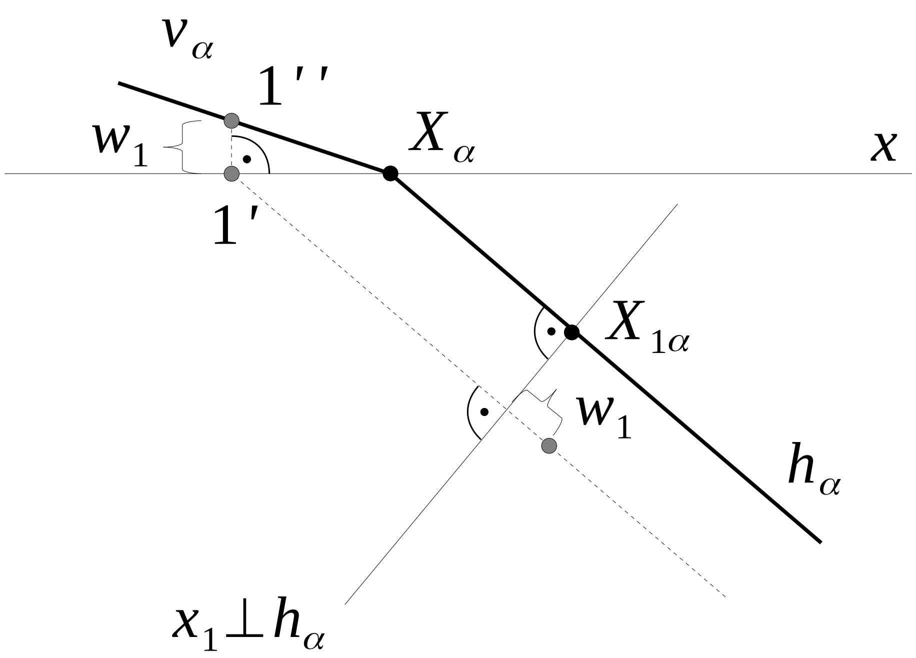


Obieramy dowolny punkt leżący na śladzie pionowym płaszczyzny.

Transformacja płaszczyzny

Wyznaczyć kąt nachylenia płaszczyzny do rzutni poziomej.

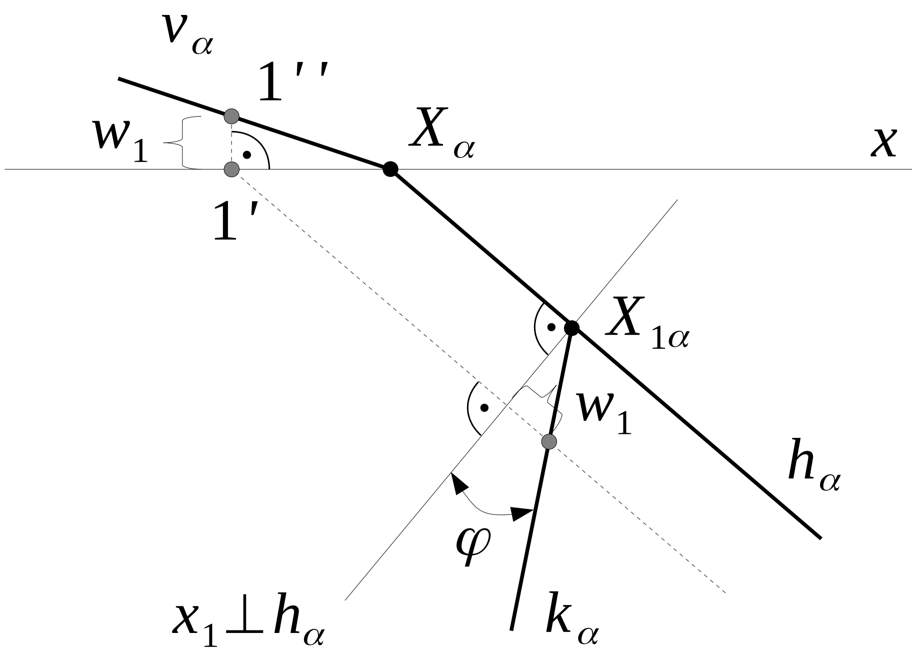
Wykonujemy transformację punktu.



Transformacja płaszczyzny

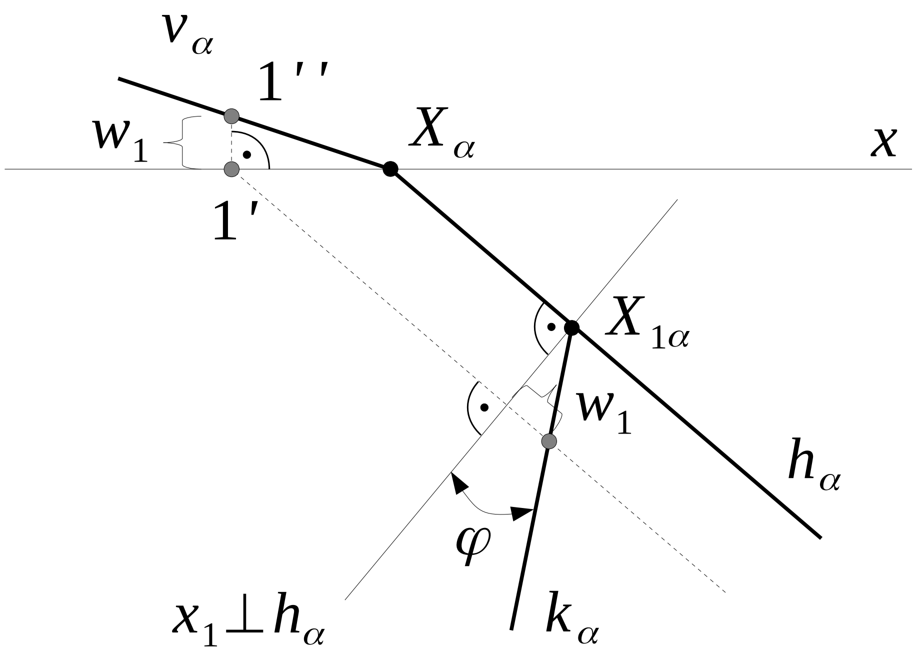
Wyznaczyć kąt nachylenia płaszczyzny do rzutni poziomej.

Rysujemy trzeci ślad płaszczyzny i zaznaczamy szukany kąt.



Transformacja płaszczyzny

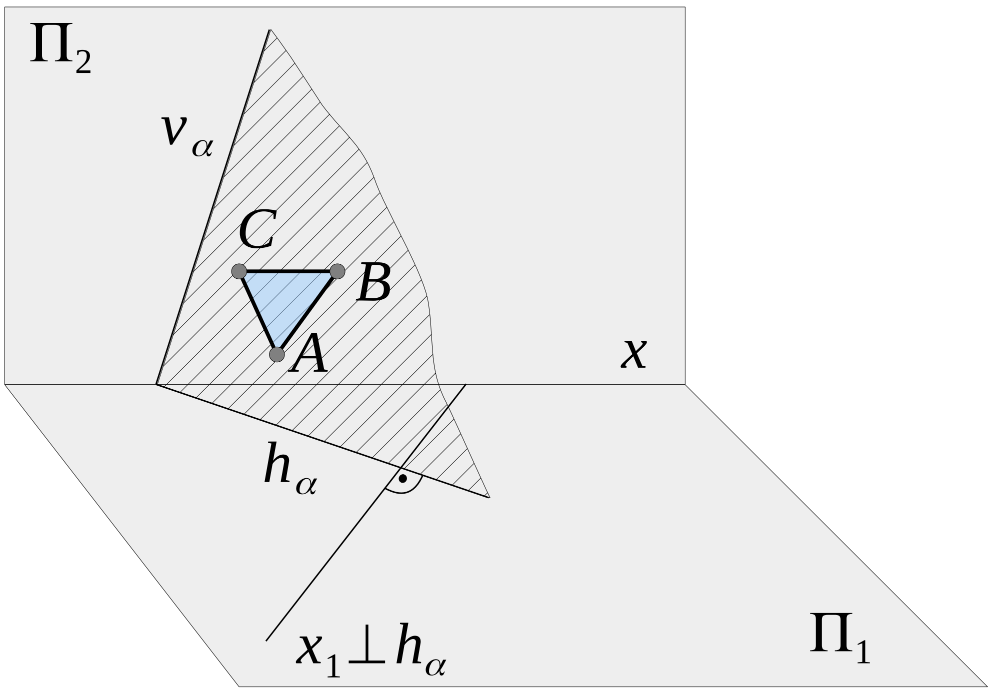
Wyznaczyć kąt nachylenia płaszczyzny do rzutni poziomej.



Przedstawiona tu konstrukcja pozwala na określanie odległości płaszczyzny od innych elementów:

- innej płaszczyzny równoległej do danej,
- prostej równoległej do płaszczyzny,
- punktu.

Transformacja figury płaskiej



Pamiętajmy, że każda nowa rzutnia musi być prostopadła do jakiejś rzutni już istniejącej.

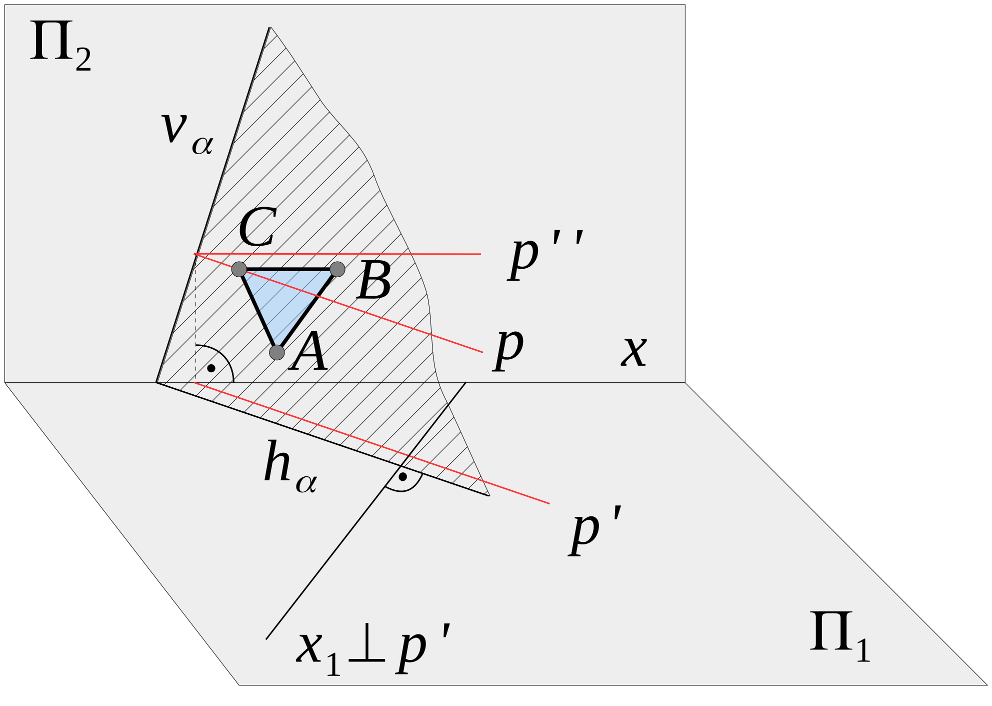
W przypadku jak na rysunku nie da się np. wstawić rzutni równoległej do danej płaszczyzny, gdyż warunek prostopadłości rzutni nie będzie spełniony.

Można jednak wstawić rzutnię prostopadłą do rzutni poziomej lub pionowej i jednocześnie prostopadłą do odpowiedniego śladu płaszczyzny – w efekcie uzyska się ślad boczny, na którym punkty tworzące figurę będą leżały na jednej linii (na trzecim śladzie płaszczyzny).

Gdyby teraz wstawić rzutnię równoległą do linii utworzonej przez trzecie rzuty punktów, to na rzutach czwartych uzyskalibyśmy rzeczywisty kształt i rozmiar figury utworzonej przez punkty.

Zadanie z rysunku można również rozumieć jako transformację płaszczyzny określonej przez 3 leżące na niej punkty.

Transformacja figury płaskiej



A co zrobić, jeśli ślady płaszczyzny nie będą podane?

Przypomnijmy sobie, że:

- jeżeli prosta leżąca na płaszczyźnie α jest pozioma to (**zawsze**, **zawsze**):

$$p' \| h_\alpha$$

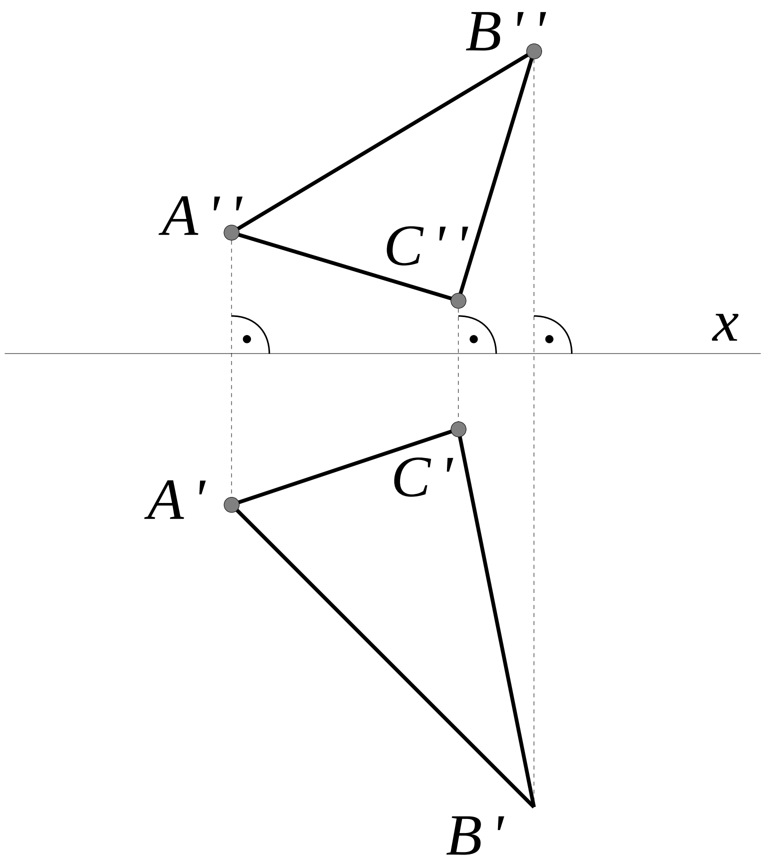
- jeżeli prosta leżąca na płaszczyźnie α jest pozioma to (**zawsze**, **zawsze**):

$$c'' \| v_\alpha$$

Aby wstawić nową oś układu odniesienia nie trzeba mieć śladów płaszczyzny – wystarczą rzuty odpowiedniej prostej szczególnej: poziomej lub czołowej.

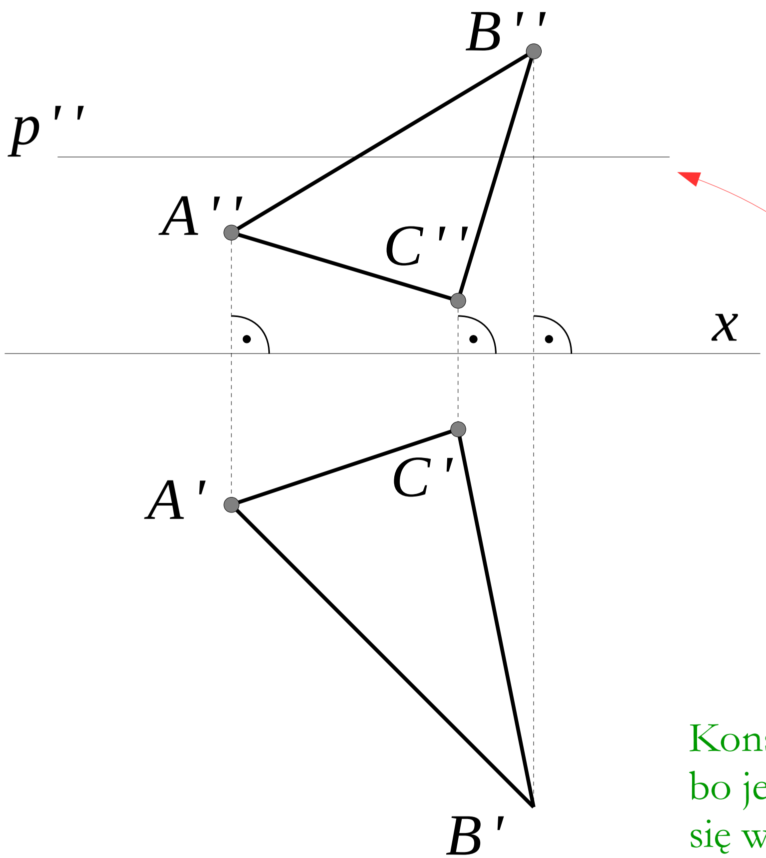
Transformacja figury płaskiej

Wyznaczyć wartości kątów w trójkącie ABC.



Transformacja figury płaskiej

Wyznaczyć wartości kątów w trójkącie ABC.

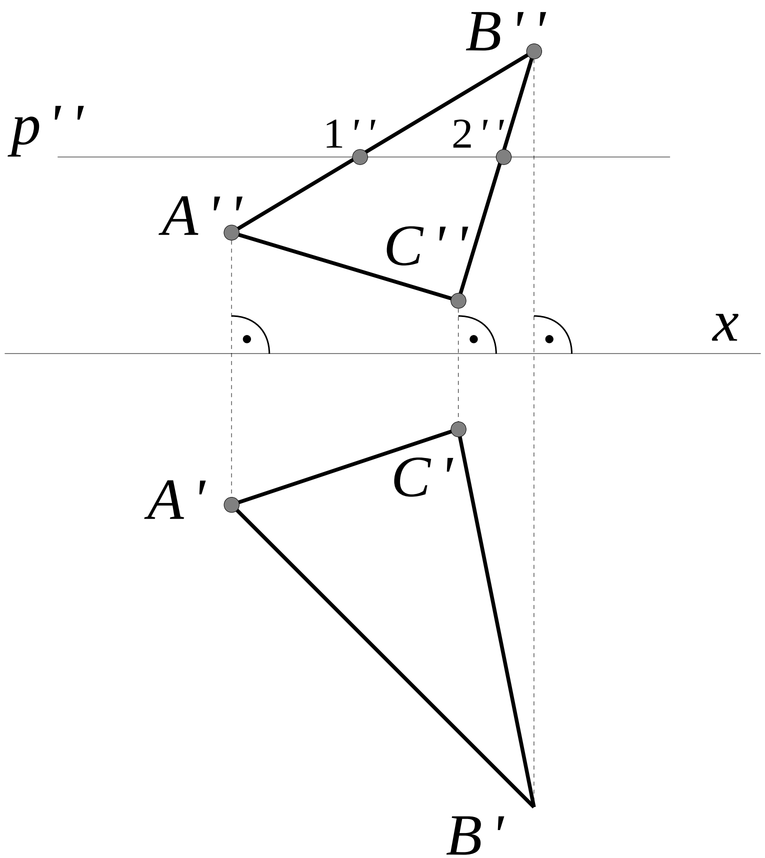


- Wyznaczamy dowolną prostą szczególną na płaszczyźnie – tu prostą poziomą:
  - rysujemy jej rzut pionowy.

Konstrukcja jest mało optymalna (dla pokazania, że tak też można), bo jeden z punktów przecięcia prostej p z trójkątem mógłby znajdować się w którymś z wierzchołków – tu najlepszy byłby punkt A.

Transformacja figury płaskiej

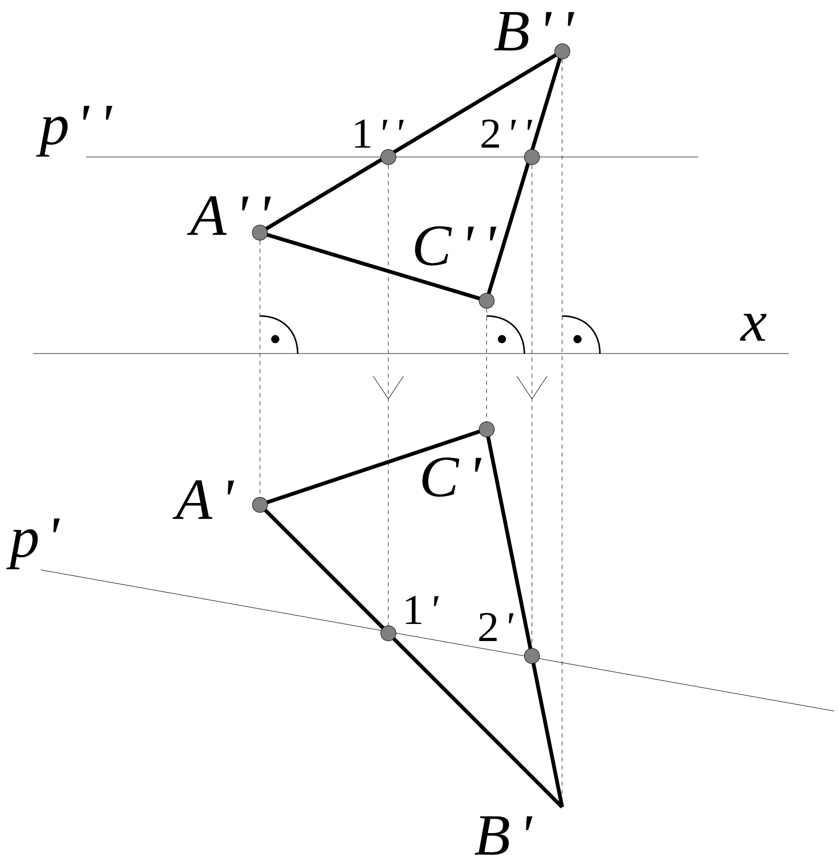
Wyznaczyć wartości kątów w trójkącie ABC.



- Wyznaczamy dowolną prostą szczególną na płaszczyźnie – tu prostą poziomą:
  - rysujemy jej rzut pionowy,
  - zaznaczamy punkty pomocnicze 1 i 2.

Transformacja figury płaskiej

Wyznaczyć wartości kątów w trójkącie ABC.



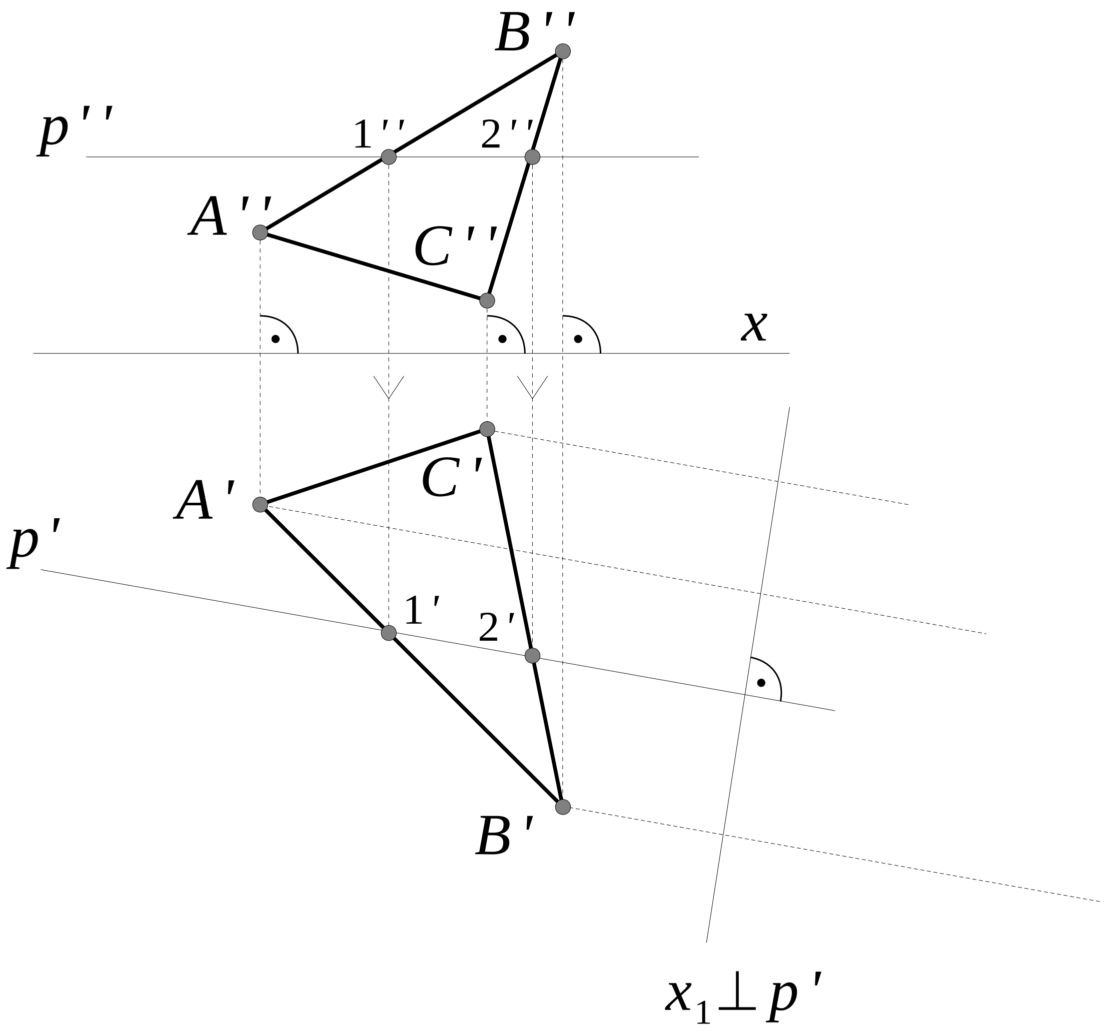
- Wyznaczamy dowolną prostą szczególną na płaszczyźnie – tu prostą poziomą:
  - rysujemy jej rzut pionowy,
  - zaznaczamy punkty pomocnicze 1 i 2,
  - wyznaczamy drugi rzut prostej szczególnej, wiedząc na których bokach trójkąta leżą poszczególne punkty pomocnicze.

$$1 \in AB$$

$$2 \in BC$$

Transformacja figury płaskiej

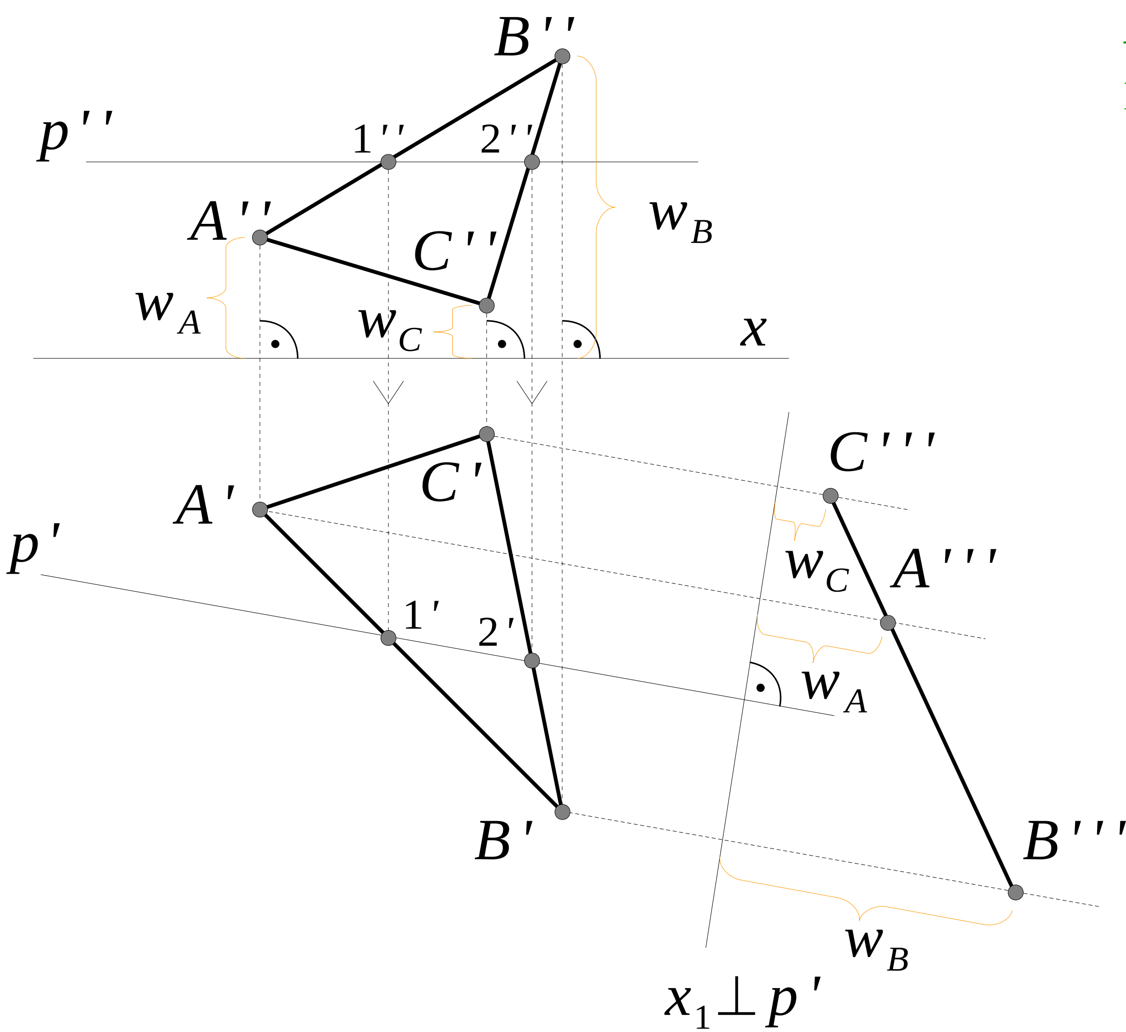
Wyznaczyć wartości kątów w trójkącie ABC.



- Wstawiamy nową oś układu odniesienia prostopadle do rzutu poziomego prostej poziomej (w domyśle do śladu poziomego płaszczyzny, na której ten trójkąt leży).

Transformacja figury płaskiej

Wyznaczyć wartości kątów w trójkącie ABC.

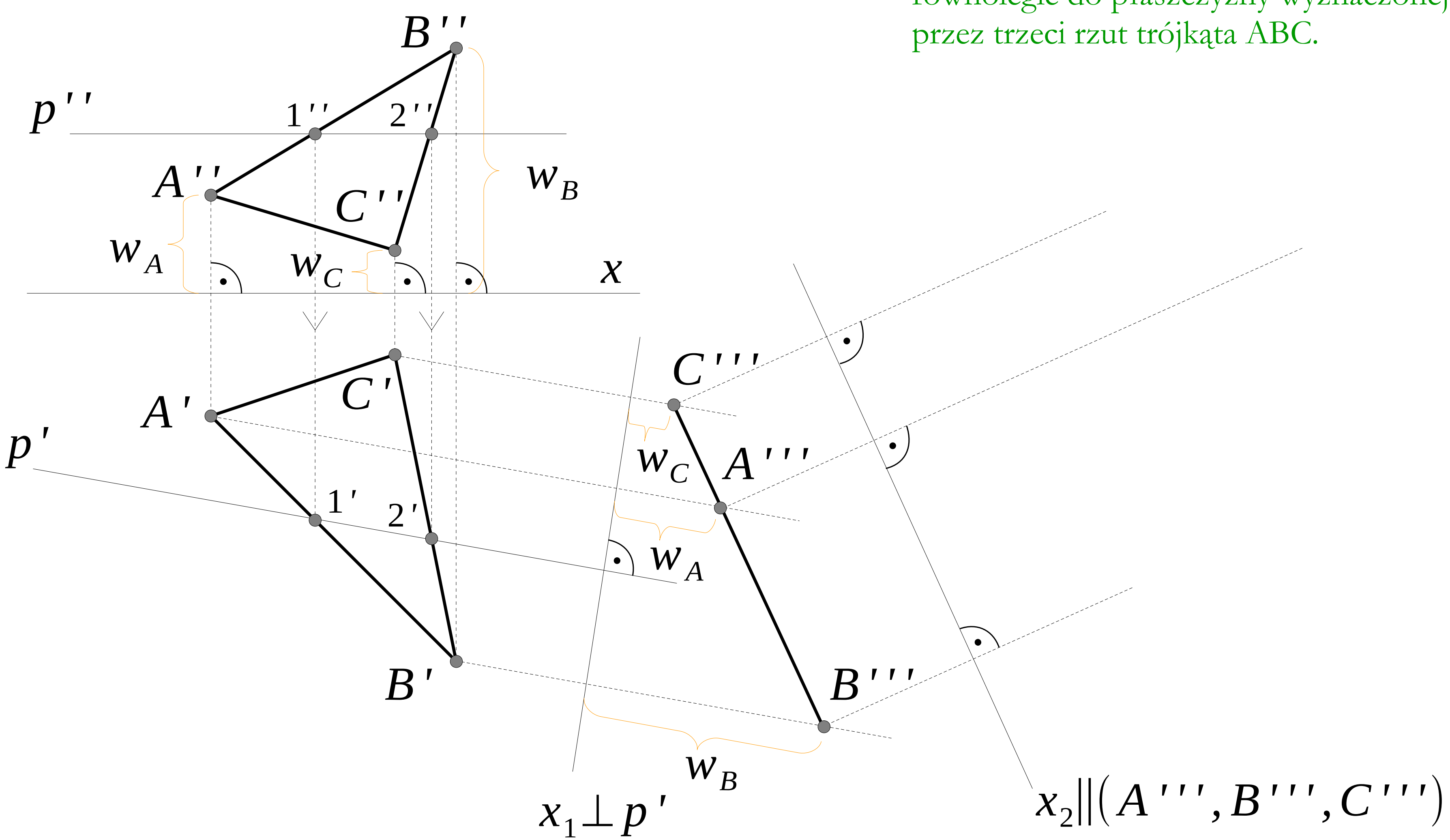


- Odmierzamy odpowiednie wymiary i wyznaczamy trzecie rzuty punktów A, B i C – jeżeli konstrukcja jest prawidłowa, punkty ułożą się w jednej linii.

Transformacja figury płaskiej

Wyznaczyć wartości kątów w trójkącie ABC.

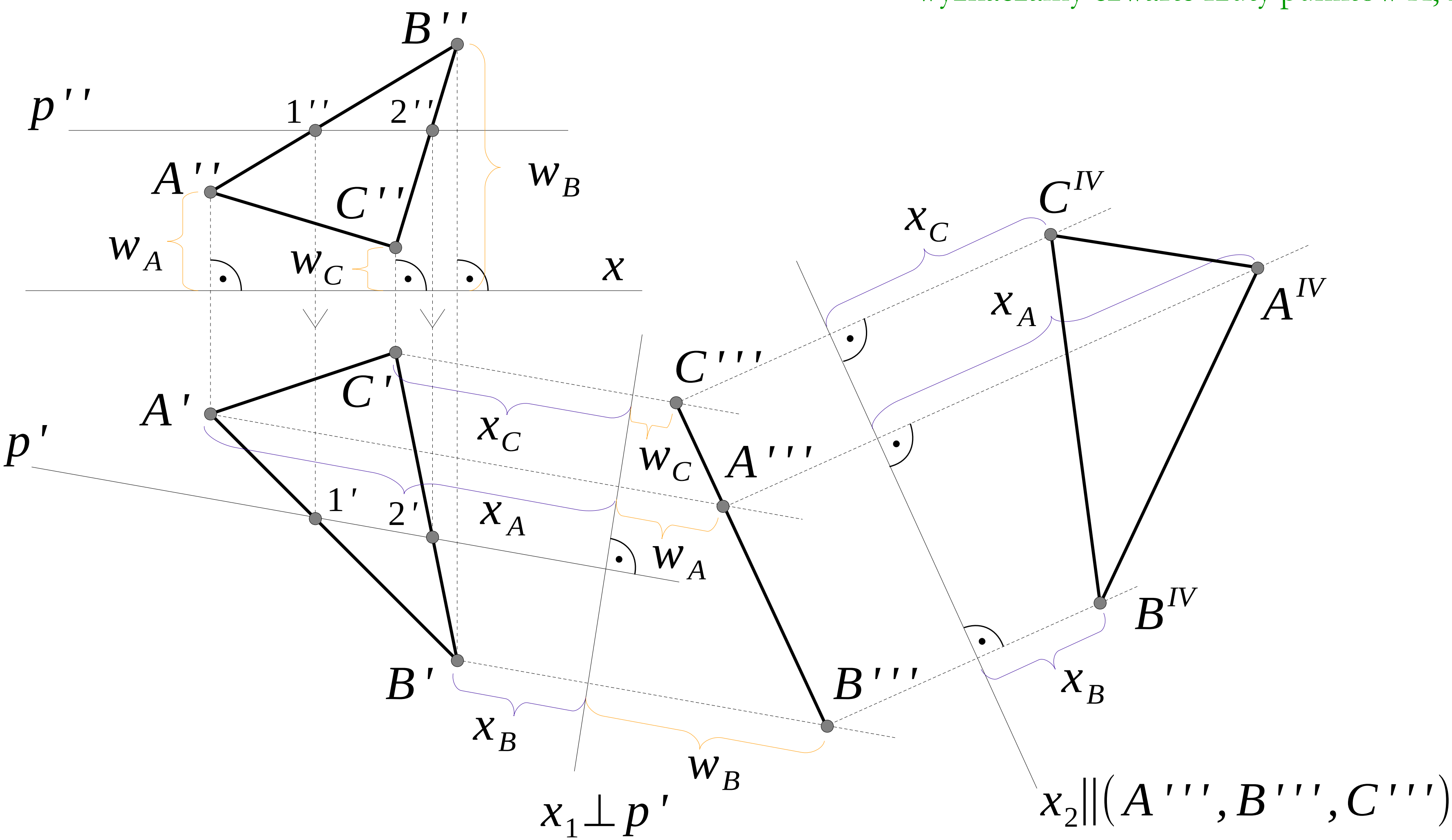
- Wstawiamy nową oś układu odniesienia równolegle do płaszczyzny wyznaczonej przez trzeci rzut trójkąta ABC.



Transformacja figury płaskiej

Wyznaczyć wartości kątów w trójkącie ABC.

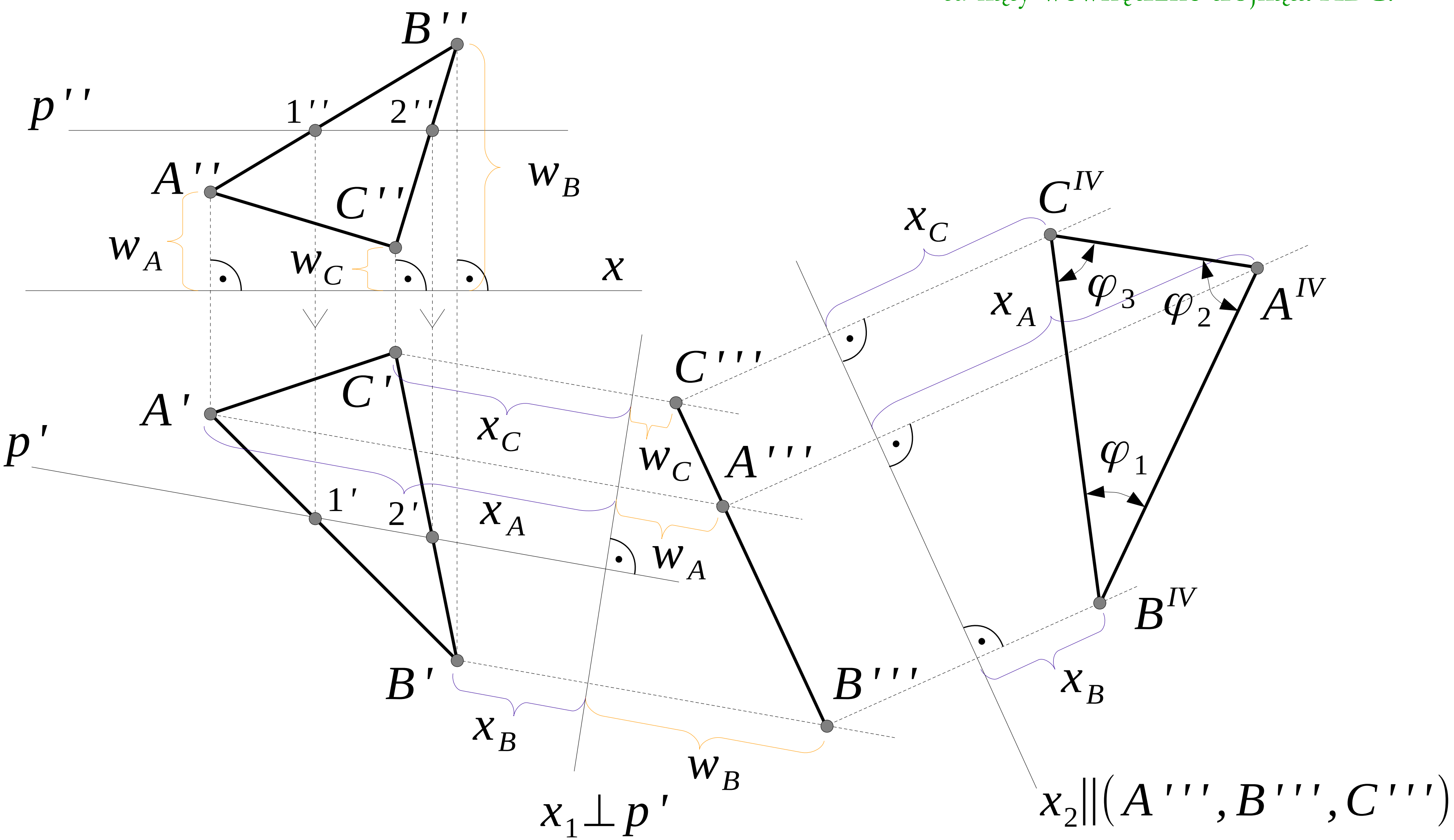
- Odmierzamy odpowiednie wymiary i wyznaczamy czwarte rzuty punktów A, B i C.



Transformacja figury płaskiej

Wyznaczyć wartości kątów w trójkącie ABC.

- Zaznaczamy odpowiednie wymiary – tu kąty wewnętrzne trójkąta ABC.



Podsumowanie

Zagadnienia:

Transformacja punktu, odcinka, prostej i płaszczyzny, transformacja figury płaskiej.

UNIVERSITY OF WARMIA AND MAZURY IN OLSZTYN
The Faculty of Technical Sciences
POLAND, 10-957 Olsztyn, M. Oczapowskiego 11
tel.: (48)(89) 5-23-32-40, fax: (48)(89) 5-23-32-55
URL: http://www.uwm.edu.pl/edu/sobieski/ (in Polish)

Dziękuję za uwagę

Wojciech Sobieski

Olsztyn, 2021