



GEOMETRIA WYKREŚLNA

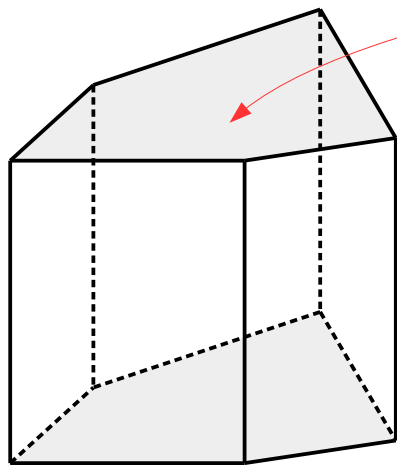
Wielościany – przekroje i przebicia.

Rodzaje wielościanów

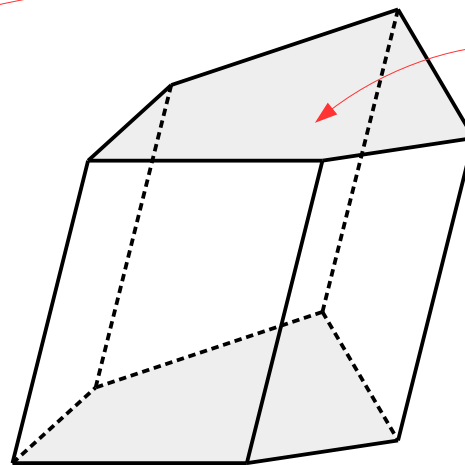
Wielościan – figura przestrzenna utworzona ze skończonej liczby wielokątów płaskich.

Gnaniastosłup – wielościan, którego wszystkie wierzchołki są położone na dwóch równoległych płaszczyznach i którego wszystkie krawędzie leżące poza tymi płaszczyznami są do siebie równoległe.

Prostopadłościan – gnaniastosłup, którego każda ściana jest prostokątem, a dowolne dwie ściany są równoległe, albo prostopadłe.



Gnaniastosłup prosty.



Gnaniastosłup pochyły.

krawędzie są prostopadłe do podstaw

krawędzie nie są prostopadłe do podstaw

Gnaniastosłup prawidłowy – gnaniastosłup prosty, w którym podstawy są wielokątami foremnymi (trójkątami równobocznymi, kwadratami, ...).

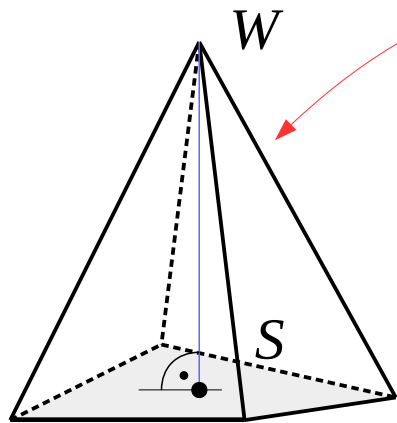
Rodzaje wielościanów

Wielościan – figura przestrzenna utworzona ze skończonej liczby wielokątów płaskich.

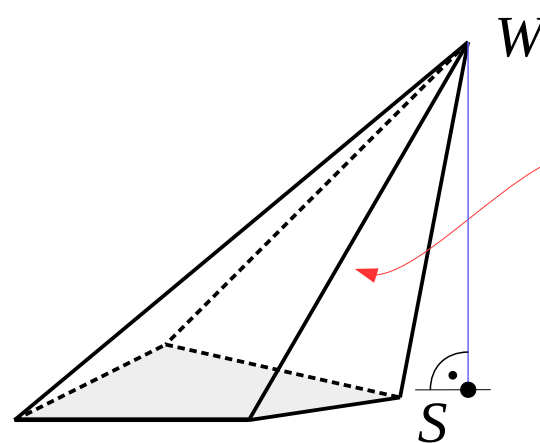
Ostrosłup – wielościan, którego wszystkie wierzchołki poza jednym leżą w jednej płaszczyźnie wyznaczając wielokąt zwany podstawą

Wysokość ostrosłupa – odległość od wierzchołka do płaszczyzny podstawy.

Spadek wysokości – punkt będący rzutem prostokątnym wierzchołka na płaszczyznę podstawy.



Ostrosłup prosty.



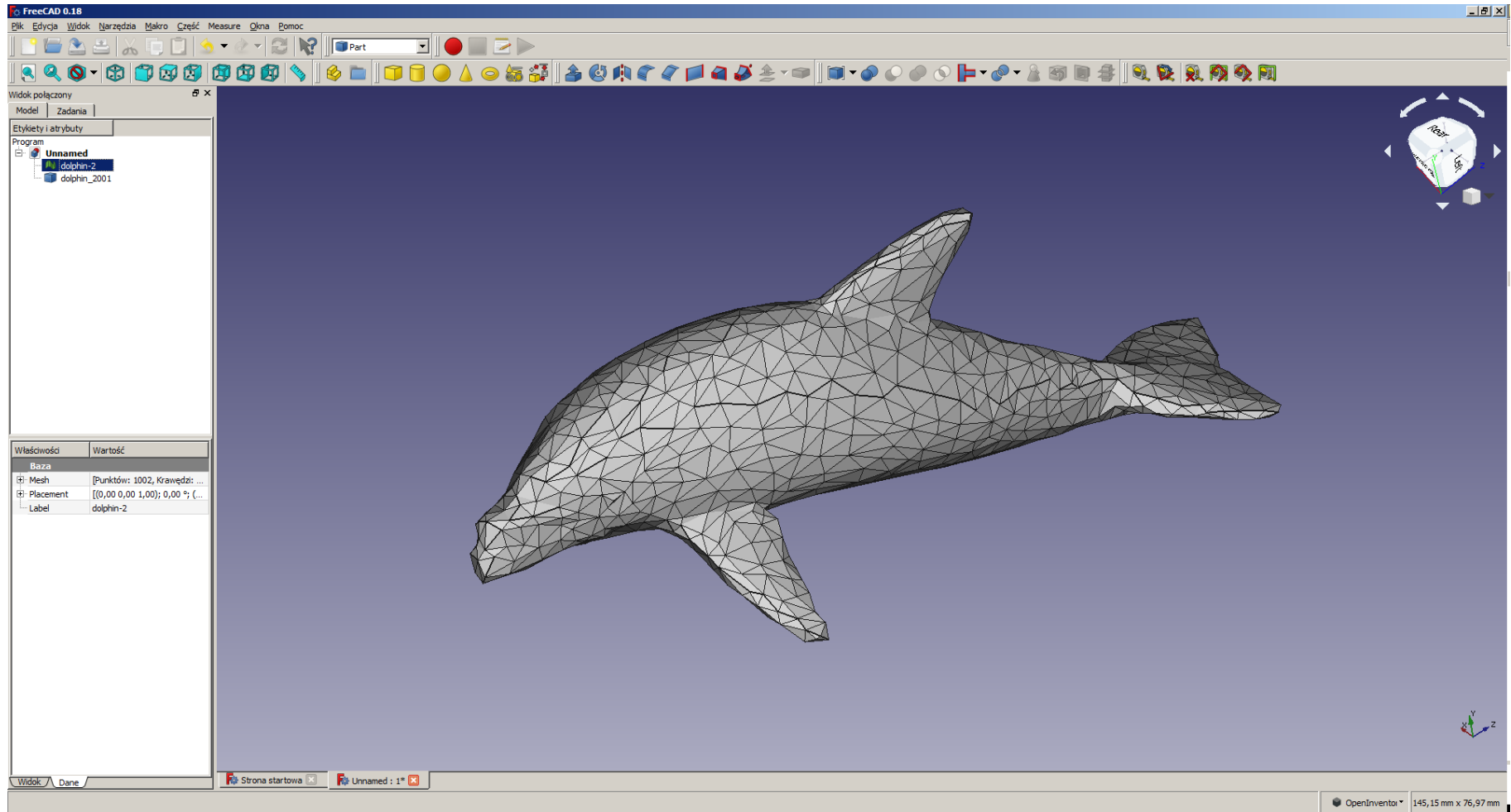
Ostrosłup pochyły.

krawędzie mają jednakową długość

krawędzie mają różną długość

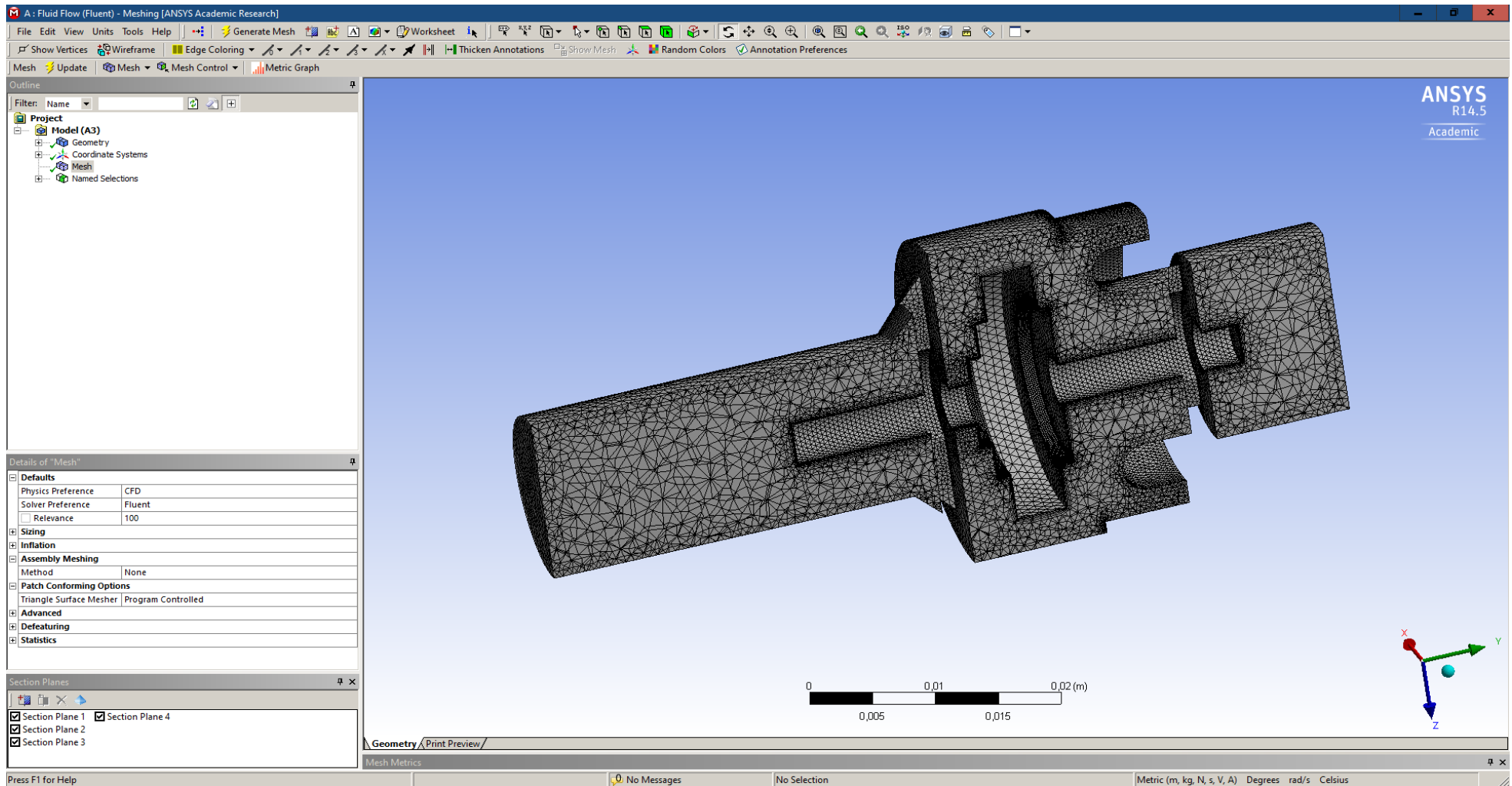
Ostrosłup prawidłowy – ostrosłup prosty, w którym podstawa jest wielokątem foremnym (trójkątem równobocznym, kwadratem, ...).

Współczesne zastosowania wielościanów



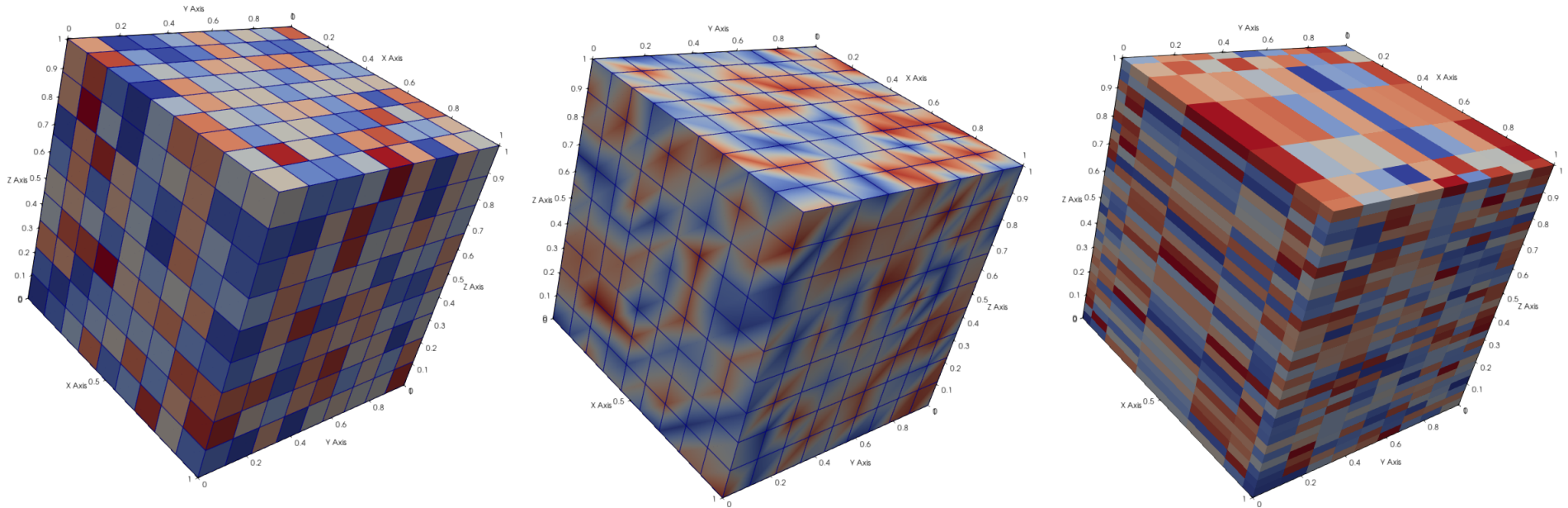
Przykład zastosowania wielościanu do opisu kształtu obiektu (format STL).

Współczesne zastosowania wielościanów

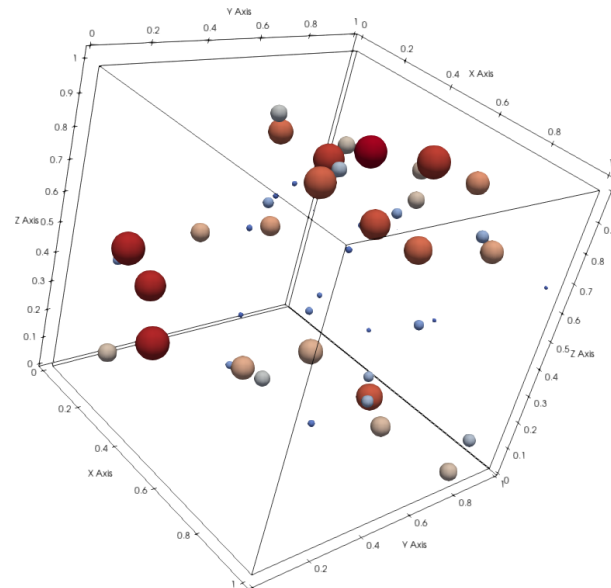


Przykłady zastosowania wielościanów w obliczeniowej mechanice płynów.

Współczesne zastosowania wielościanów



Przykłady zastosowania wielościanów do wizualizacji danych naukowych (format VTK).



Konstrukcje wielościanów

Narysować rzuty ostrosłupa prawidłowego o podstawie trójkątnej, o wysokości H i długości boku podstawy L .

Jeśli ostrosłup ma być prawidłowy, to:

- trójkąt podstawy musi być równoboczny,
- wszystkie krawędzie boczne muszą mieć taką samą długość.

Zauważmy, że zadanie nie precyzuje szczegółów ułożenia wielościanu!

Najkorzystniej będzie umieścić podstawę ostrosłupa na którejś z rzutni – wówczas:

- kształty i rozmiary trójkąta podstawy będą rzeczywiste na tej rzutni,
- wysokość ostrosłupa będzie rzeczywista na drugiej rzutni.

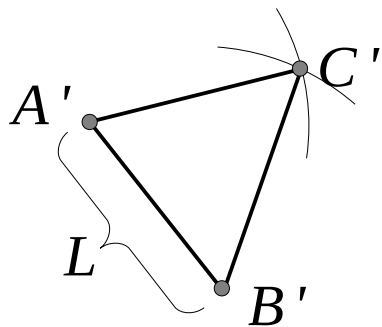
X

Konstrukcje wielościanów

Narysować rzuty ostrosłupa prawidłowego o podstawie trójkątnej, o wysokości H i długości boku podstawy L .

Narysujmy podstawę ostrosłupa na rzutni poziomej w dowolnym miejscu tak, aby spełnione były warunki (wymiały):

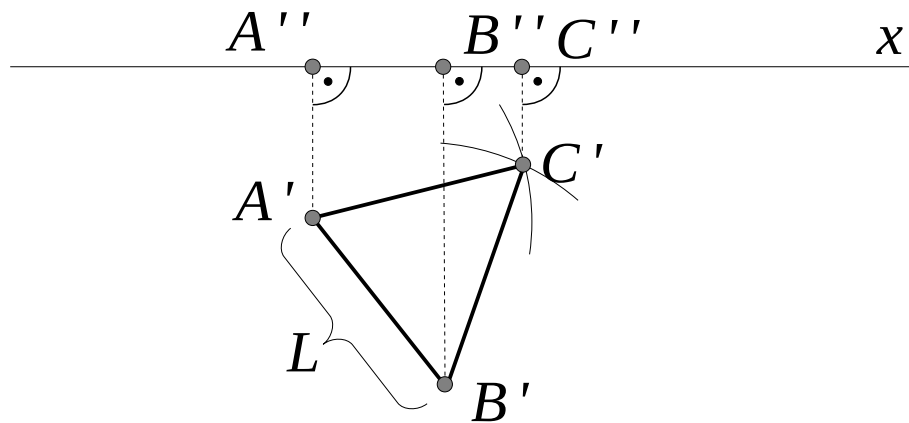
- rysujemy dowolny odcinek AB o długości L (najlepiej nie równoległy i nie prostopadły do osi x),
- rysujemy łuki o promieniu L z końców odcinka,
- tam gdzie łuki się przetną jest trzeci wierzchołek trójkąta równobocznego.



Konstrukcje wielościanów

Narysować rzuty ostrosłupa prawidłowego o podstawie trójkątnej, o wysokości H i długości boku podstawy L .

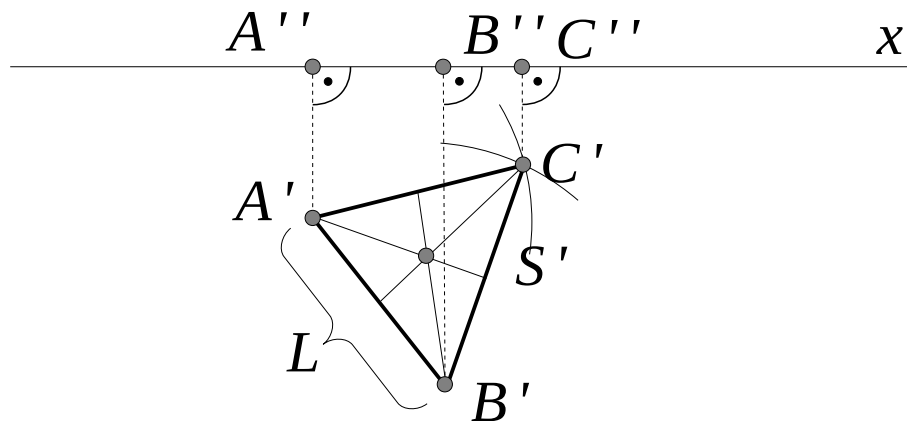
Wyznaczamy drugie rzuty wierzchołków podstawy.



Konstrukcje wielościanów

Narysować rzuty ostrosłupa prawidłowego o podstawie trójkątnej,
o wysokości H i długości boku podstawy L .

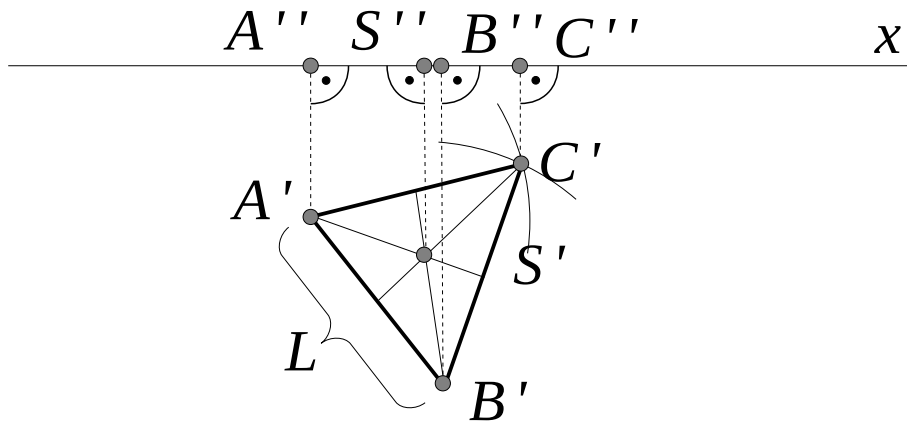
Wyznaczamy środek podstawy – można to zrobić rysując linie łączące środki boków trójkąta z naprzeciwległymi wierzchołkami.



Konstrukcje wielościanów

Narysować rzuty ostrosłupa prawidłowego o podstawie trójkątnej, o wysokości H i długości boku podstawy L .

Wyznaczamy drugi rzut punktu S wiedząc, że leży on na płaszczyźnie poziomej.

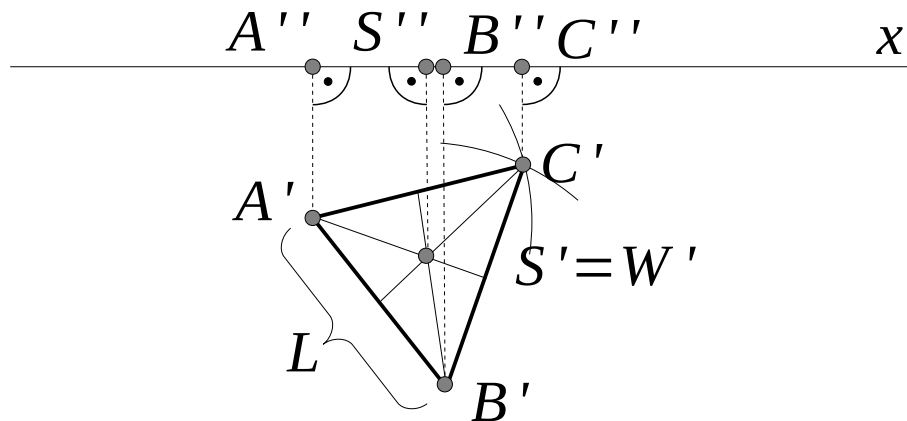


Konstrukcje wielościanów

Narysować rzuty ostrosłupa prawidłowego o podstawie trójkątnej, o wysokości H i długości boku podstawy L .

Ponieważ punkt S jest rzutem prostokątnym wierzchołka W na płaszczyznę podstawy, to:

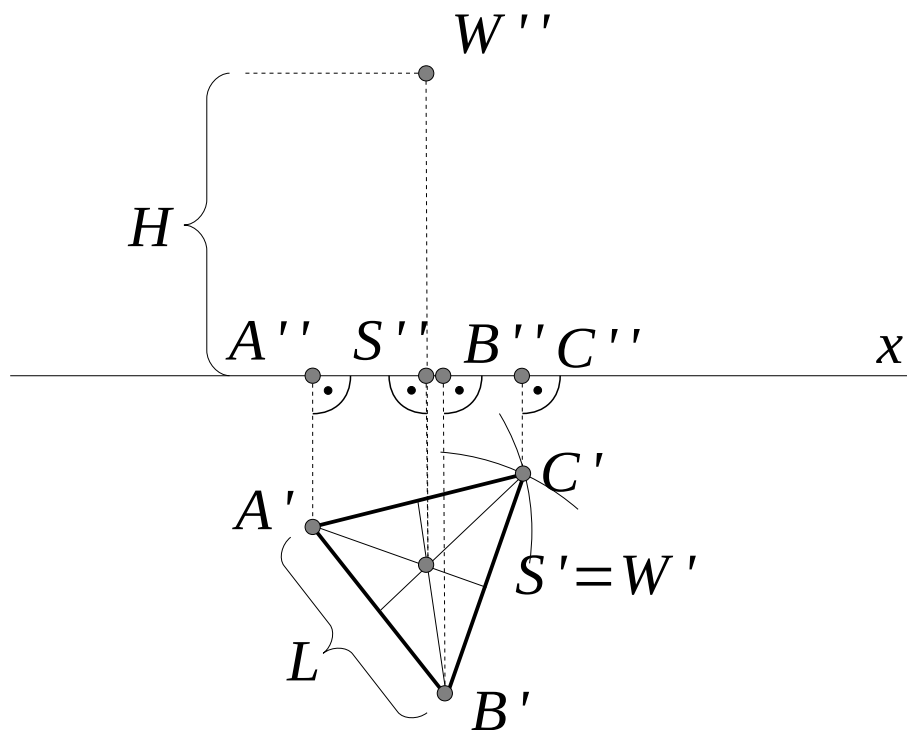
$$S' = W'$$



Konstrukcje wielościanów

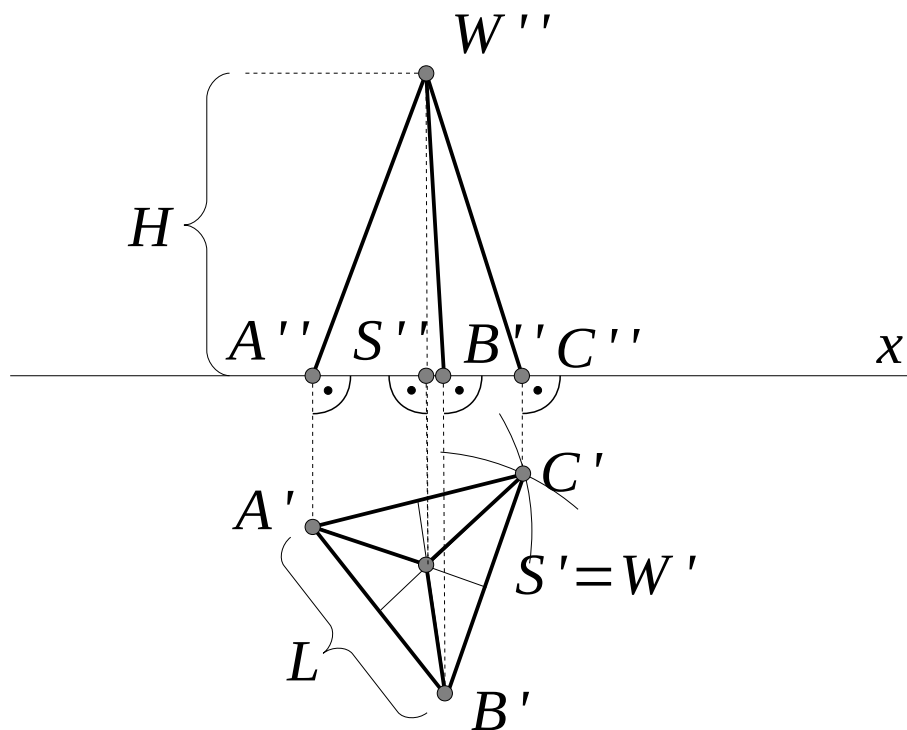
Narysować rzuty ostrosłupa prawidłowego o podstawie trójkątnej, o wysokości H i długości boku podstawy L .

Rzut W'' musi leżeć na tej samej odnoszącej co W' i musi posiadać wysokość równą H .



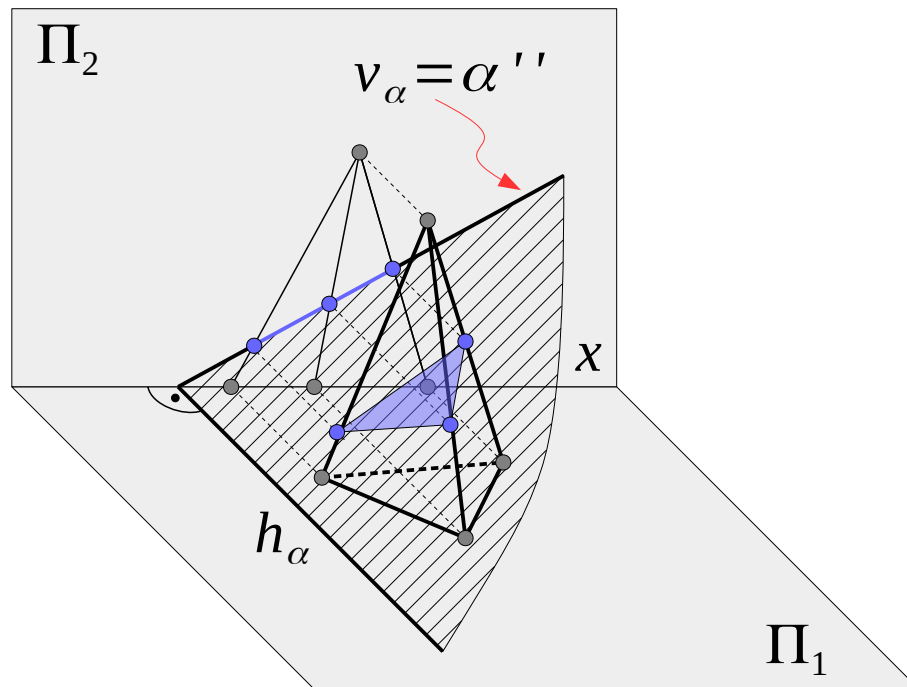
Konstrukcje wielościanów

Narysować rzuty ostrosłupa prawidłowego o podstawie trójkątnej, o wysokości H i długości boku podstawy L .



W ostatnim kroku dorysowujemy krawędzie wielościanu zwracając uwagę na ich widoczność lub niewidoczność – tu akurat wszystkie krawędzie są widoczne na obu rzutach.

Przekroje wielościanów płaszczyzną

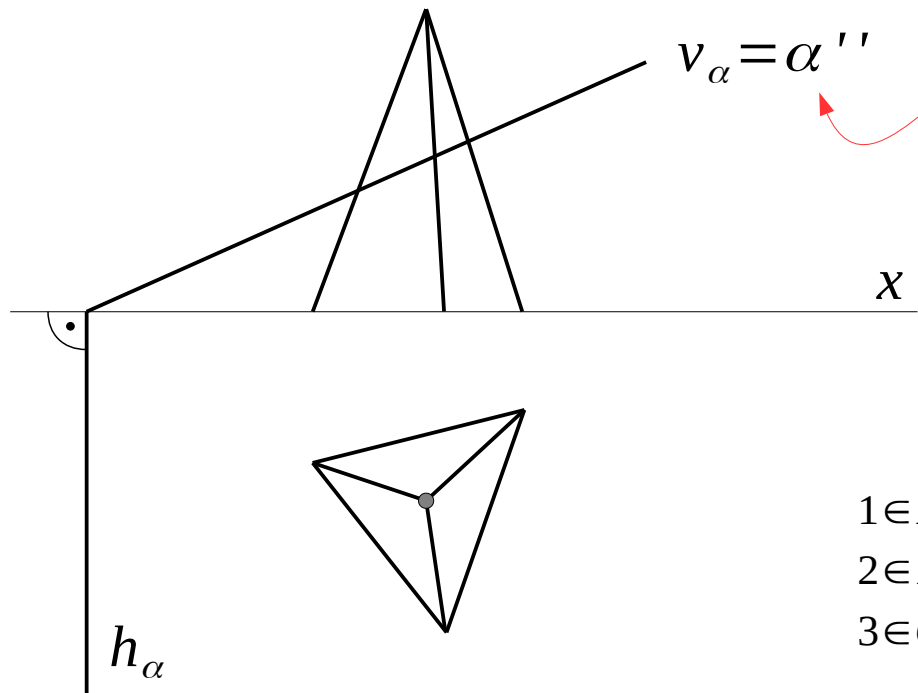


Jeżeli płaszczyzna tnąca wielościan jest płaszczyzną rzutującą (tu: pionowo-rzutującą), to rzuty wszystkich punktów leżących na tej płaszczyźnie – w tym punktów tworzących zarys figury przekroju – leżą na jednym ze śladów tej płaszczyzny (tu: na śladzie pionowym). Ponadto punkty te leżą na odpowiednich krawędziach wielościanu.

Zadanie redukuje się po postaci:
znaleźć drugi rzut punktu wiedząc, że leży on na danej prostej (tu: krawędzi bocznej).

Przekroje wielościanów płaszczyzną

Wyznaczyć przekrój ostrosłupa płaszczyzną α .

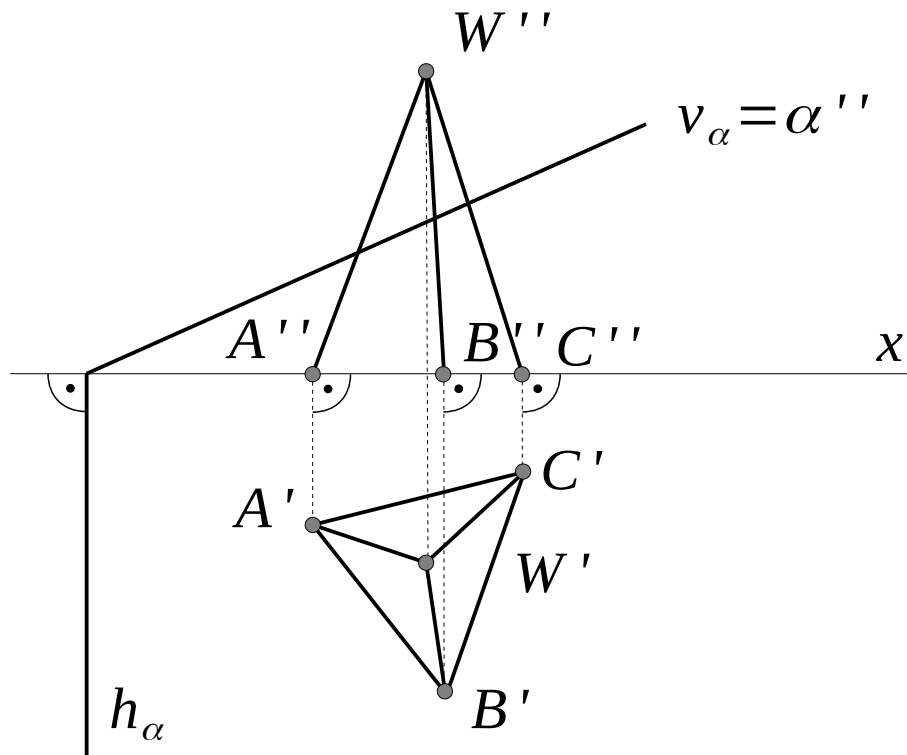


Zauważamy, że płaszczyzna tnąca jest płaszczyzną rzutującą (tu: pionowo-rzutującą) – rzut pionowy figury będącej zarysem przekroju musi leżeć na rzucie pionowym płaszczyzny.

Przekroje wielościanów płaszczyzną

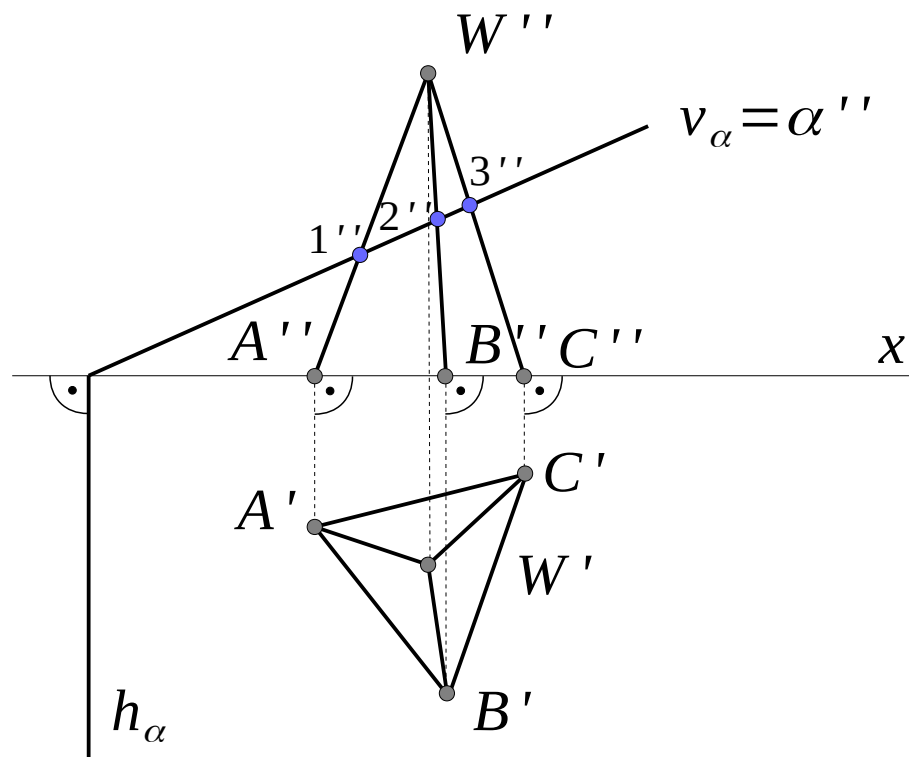
Wyznaczyć przekrój ostrosłupa płaszczyzną α .

Oznaczmy wszystkie wierzchołki wielościanu.



Przekroje wielościanów płaszczyzną

Wyznaczyć przekrój ostrosłupa płaszczyzną α .



Zaznaczmy rzut pionowy figury będącej zarysem przekroju – zwróćmy uwagę, który punkt leży na której krawędzi:

$1 \in AW$

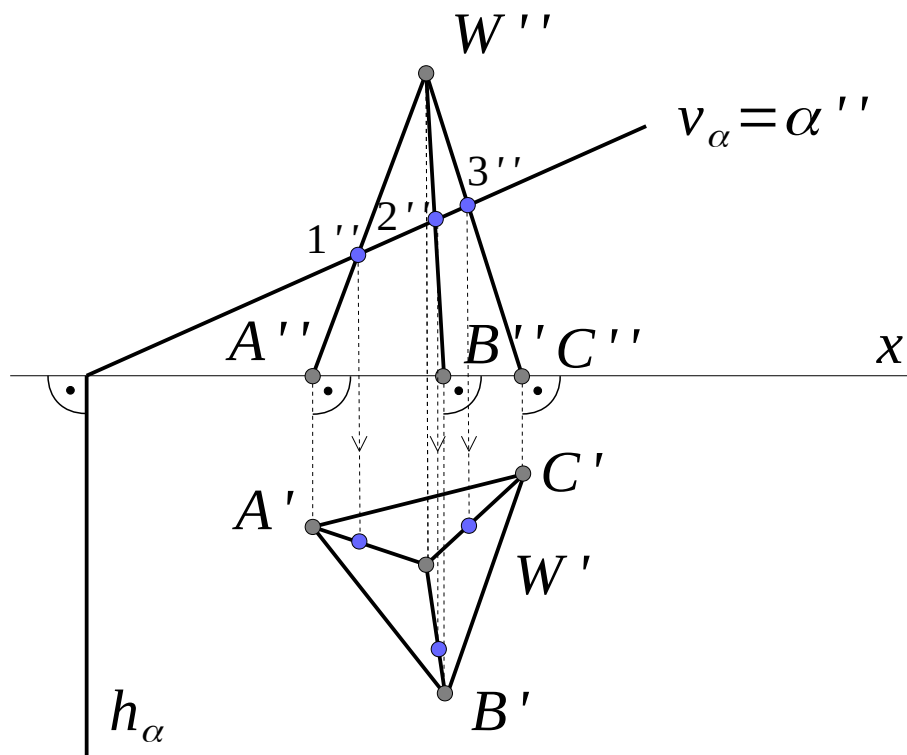
$2 \in BW$

$3 \in CW$

Przekroje wielościanów płaszczyzną

Wyznaczyć przekrój ostrosłupa płaszczyzną α .

Znajdźmy drugie rzuty tych punktów, wiedząc, na których krawędziach one leżą.



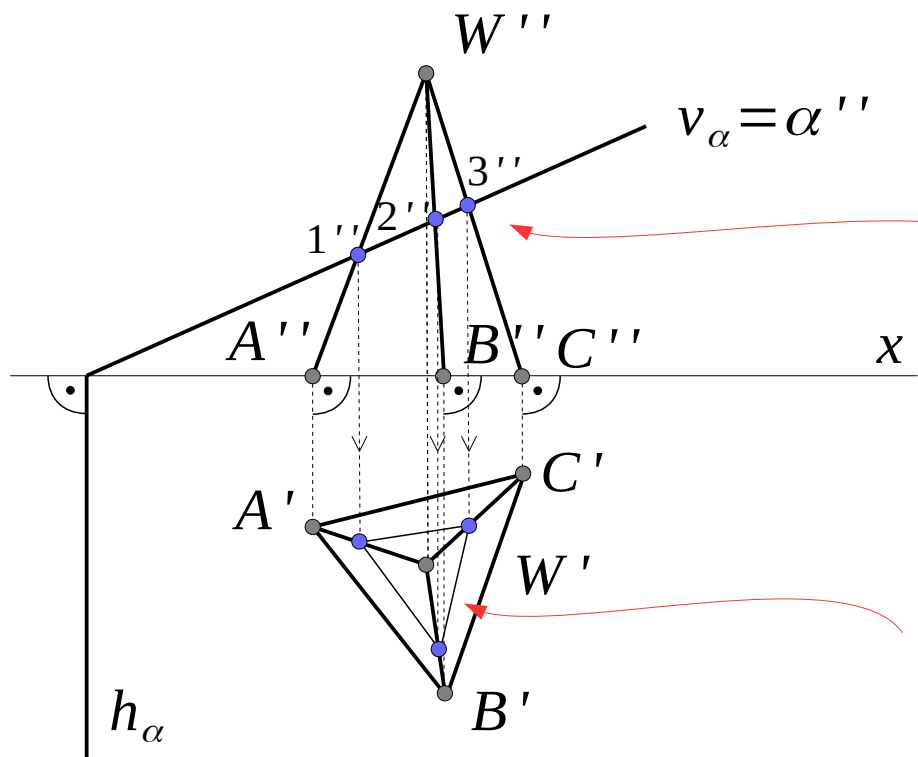
$1 \in AW$

$2 \in BW$

$3 \in CW$

Przekroje wielościanów płaszczyzną

Wyznaczyć przekrój ostrosłupa płaszczyzną α .

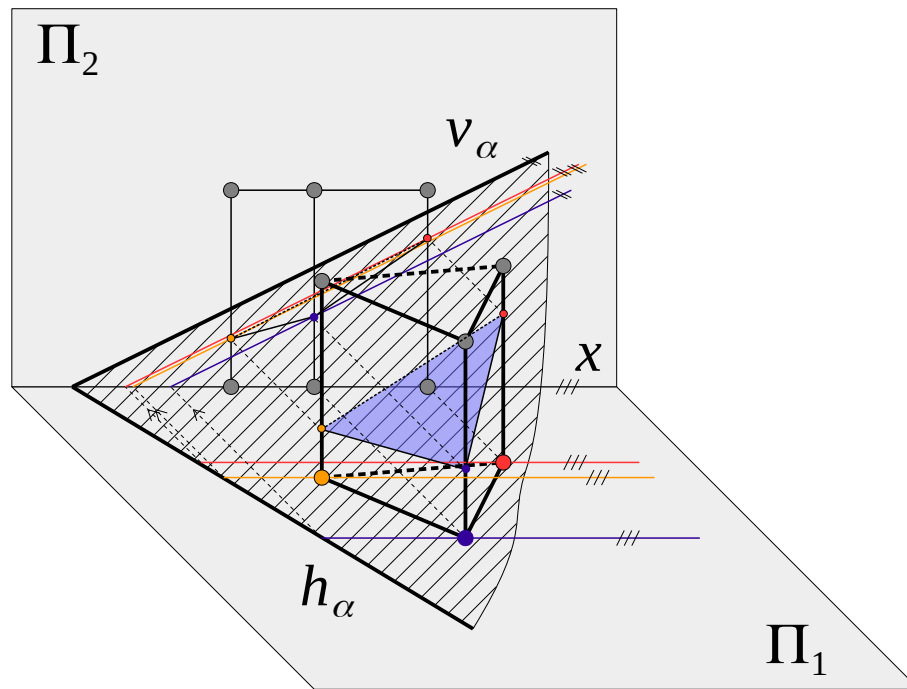


Zaznaczmy krawędzie figury będącej zarysem przekroju wielościanu.

Tu nie da się pokazać, które linie są widoczne, a które nie, bo i tak wszystko się na siebie nakłada.

Tu wszystkie krawędzie są widoczne.

Przekroje wielościanów płaszczyzną



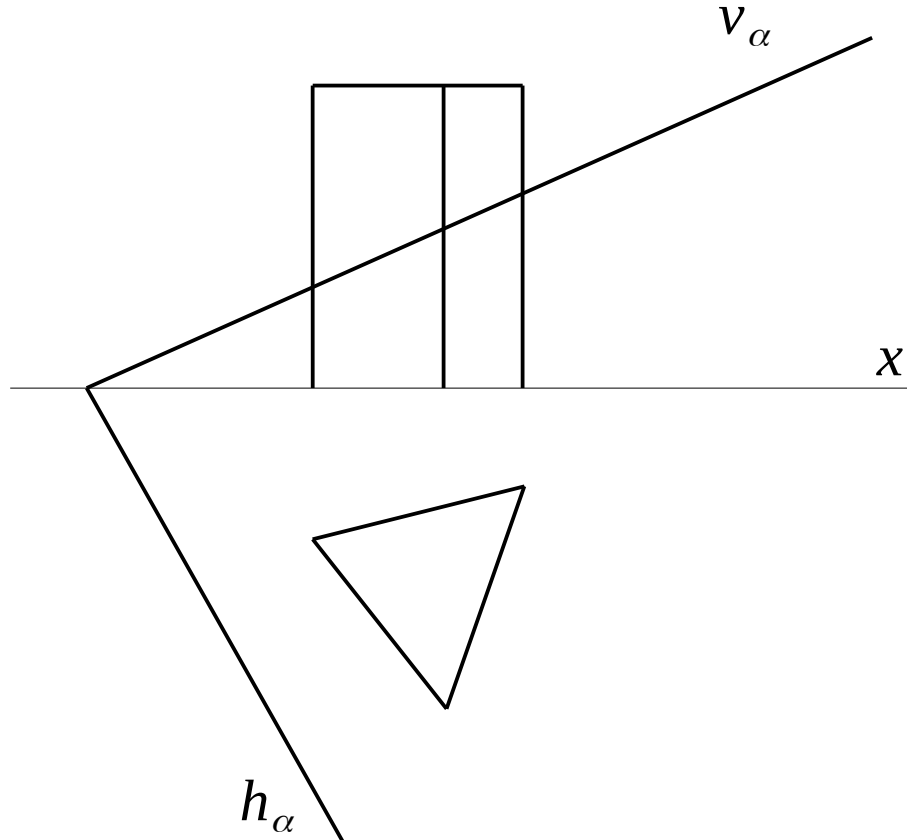
Jeżeli wielościan jest rzutujący, tzn. jego krawędzie są prostopadłe do którejś z rzutni, to rzuty wszystkich punktów leżących na tych samych krawędziach – na te same właśnie rzutni – pokryją się.

Zadanie redukuje się do postaci:
znaleźć drugi rzut punktu wiedząc, że leży on na danej płaszczyźnie.

Aby nie zaciemniać rysunku pominięto oznaczenia, a poszczególne proste szczególne (tu: czołowe) oraz leżące na nich punkty zaznaczono kolorami.

Przekroje wielościanów płaszczyzną

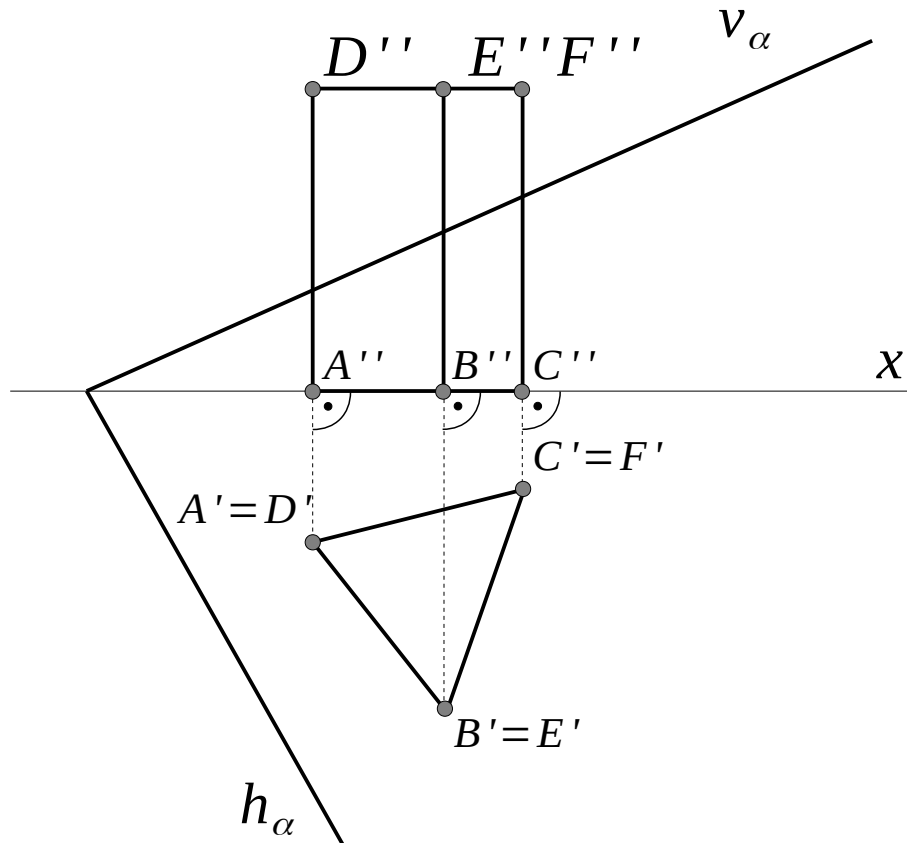
Wyznaczyć przekrój ostrosłupa płaszczyzną α .



Zauważmy, że krawędzie boczne wielościanu są prostopadłe do jednej z rzutni (tu: rzutni poziomej) – jeden z rzutów figury będącej zarysem przekroju (tu: rzut poziomy) pokryje się z rzutem (tu: poziomym) podstaw.

Przekroje wielościanów płaszczyzną

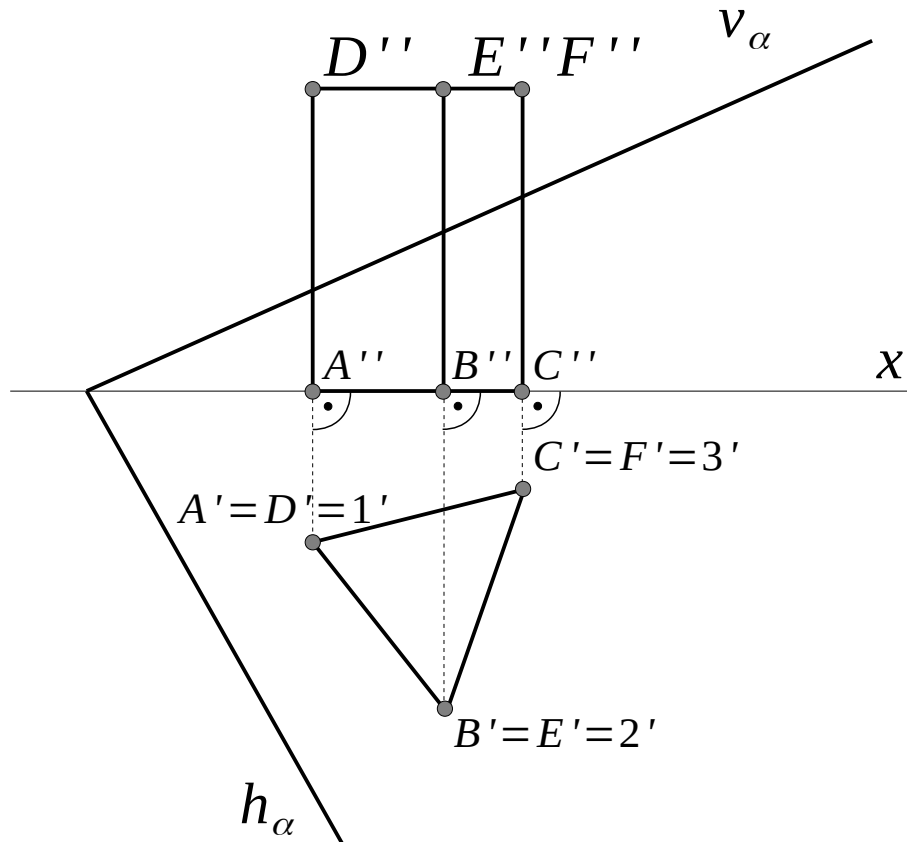
Wyznaczyć przekrój ostrosłupa płaszczyzną α .



Oznaczmy wszystkie wierzchołki wielościanu.

Przekroje wielościanów płaszczyzną

Wyznaczyć przekrój ostrosłupa płaszczyzną α .



Zaznaczmy rzut poziomy figury będącej zarysem przekroju – zwróćmy uwagę, który punkt leży na której krawędzi:

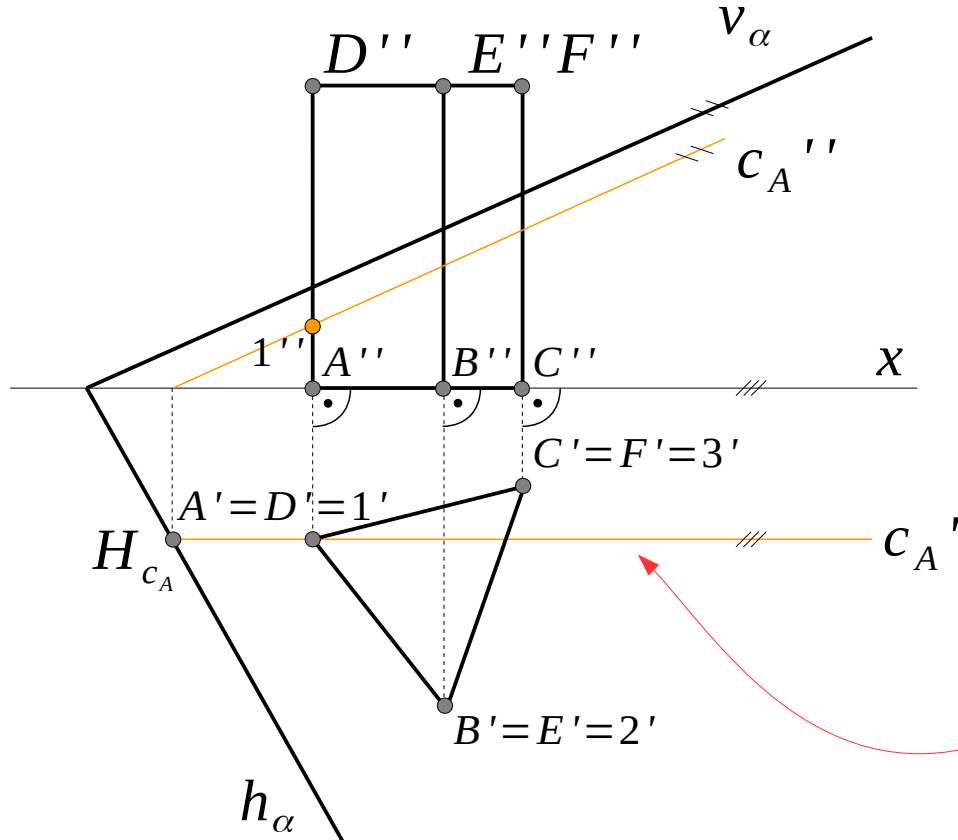
$1 \in AD$

$2 \in BE$

$3 \in CF$

Przekroje wielościanów płaszczyzną

Wyznaczyć przekrój ostrosłupa płaszczyzną α .



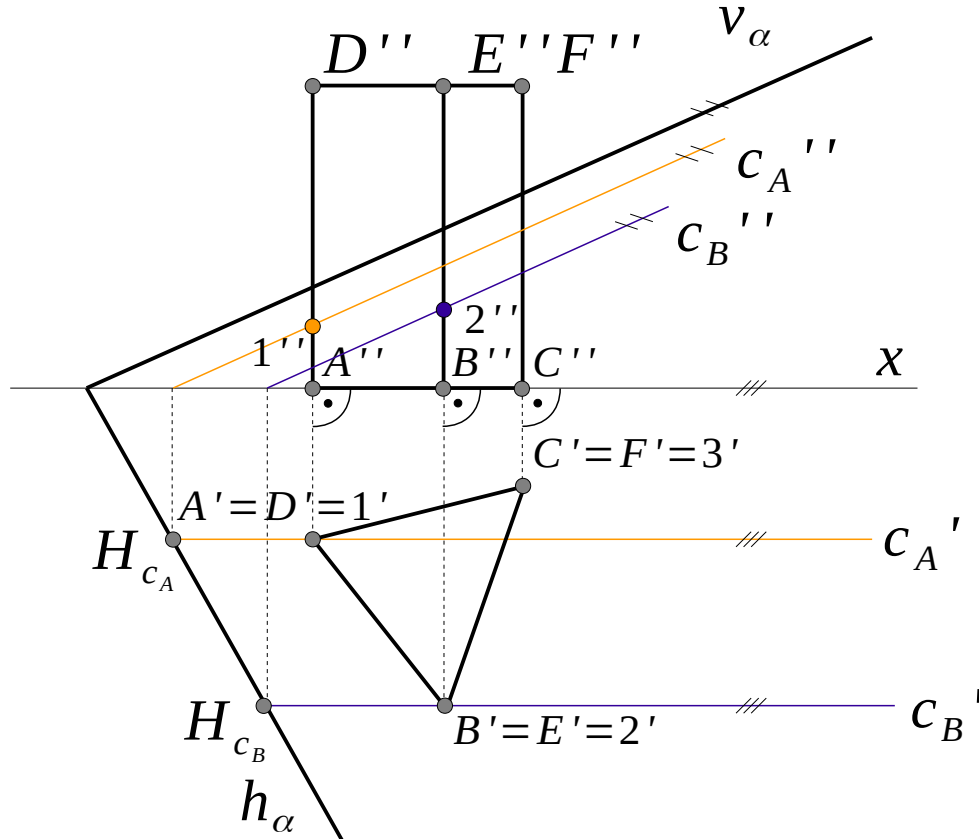
Znajdźmy drugi rzut punktu 1, wiedzając że leży on na płaszczyźnie α .

$$1 \in AD$$

Do wyznaczenia drugiego rzutu punktu leżącego na płaszczyźnie najwygodniej jest zastosować prostą szczególną: poziomą lub czołową. Nie ma znaczenia, którą z nich wybierzemy.

Przekroje wielościanów płaszczyzną

Wyznaczyć przekrój ostrosłupa płaszczyzną α .

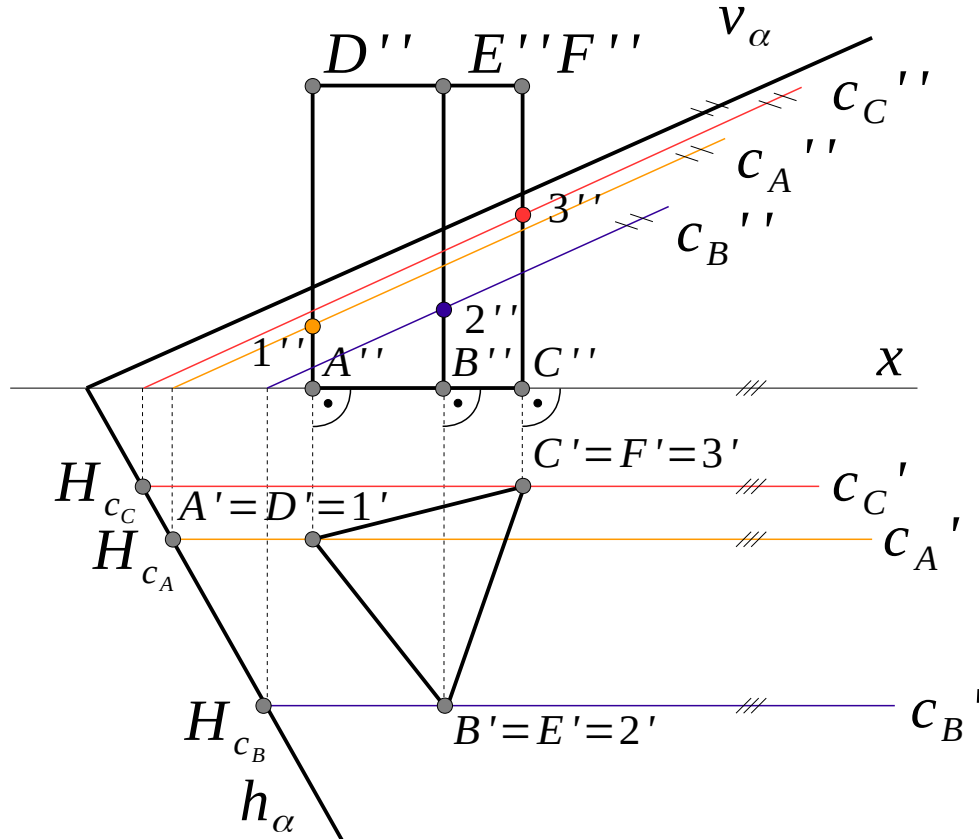


Znajdźmy drugi rzut punktu 2, wiedzając że leży on na płaszczyźnie α .

$$2 \in BE$$

Przekroje wielościanów płaszczyzną

Wyznaczyć przekrój ostrosłupa płaszczyzną α .

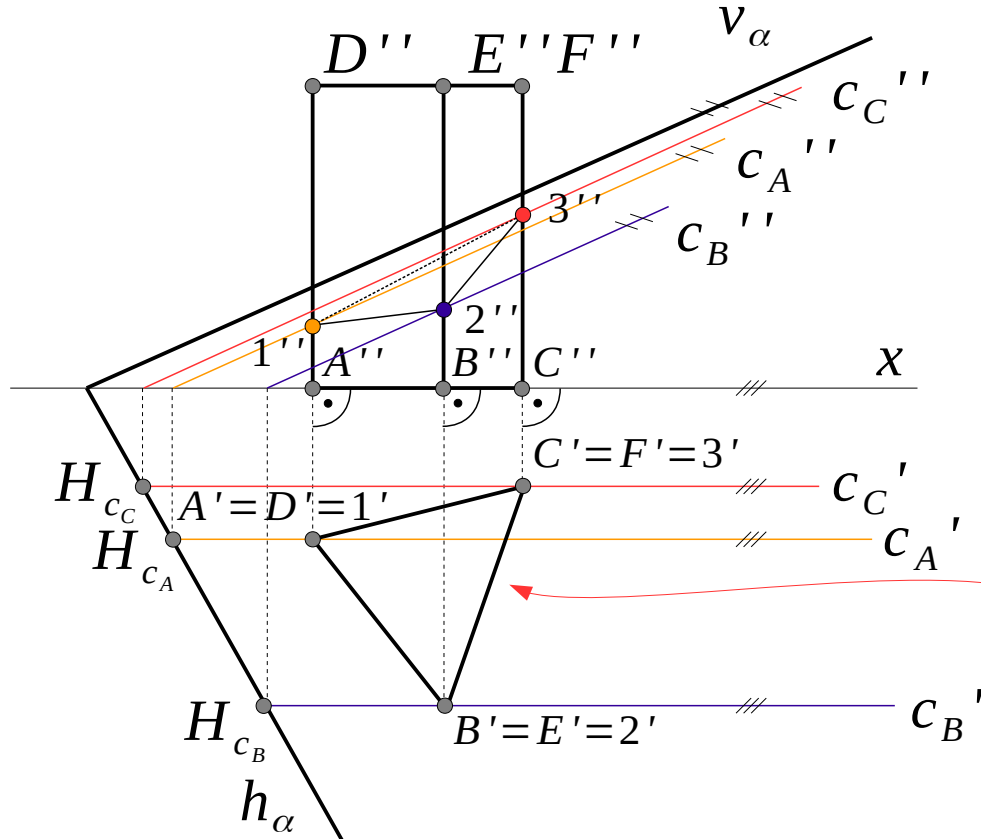


Znajdźmy drugi rzut punktu 3, wiedzac że leży on na płaszczyźnie α .

$$3 \in CF$$

Przekroje wielościanów płaszczyzną

Wyznaczyć przekrój ostrosłupa płaszczyzną α .

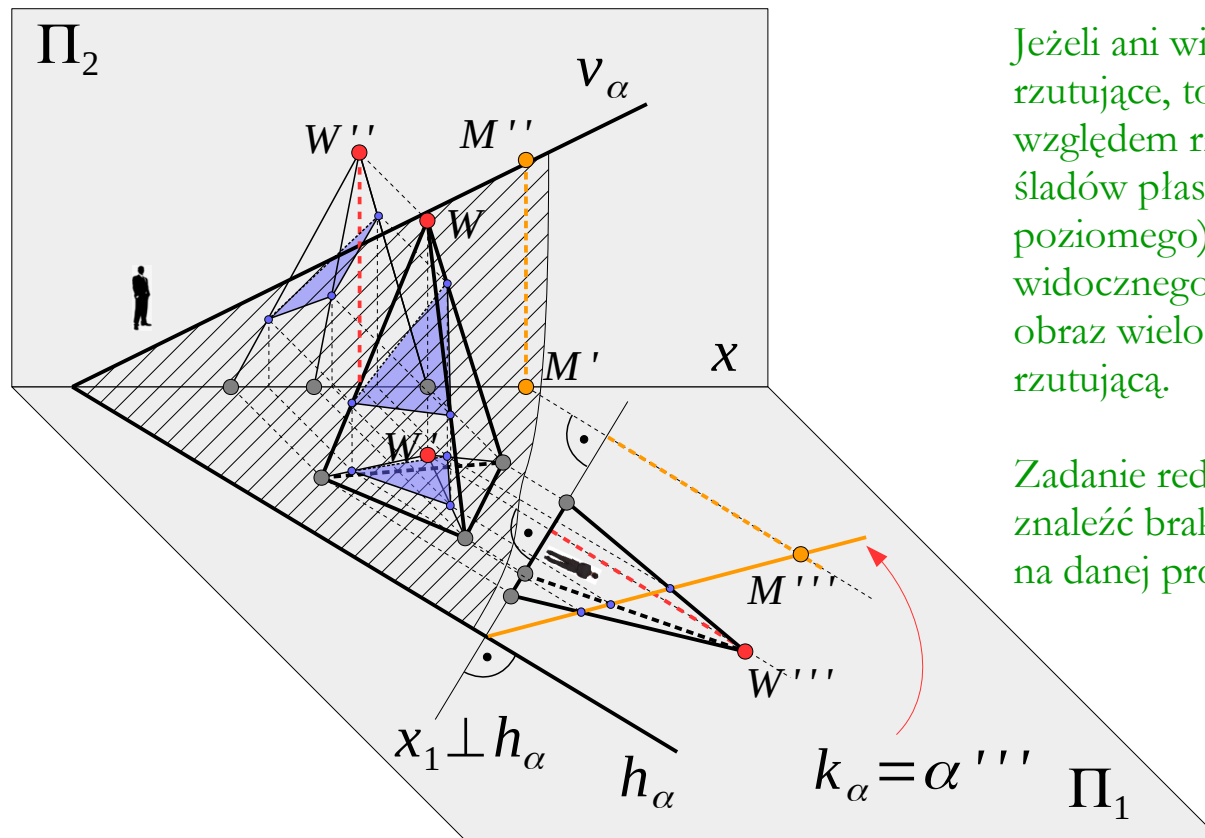


Zaznaczymy krawędzie figury będącej zarysem przekroju wielościanu.

- 1''-2'' – krawędź widoczna
- 2''-3'' – krawędź widoczna
- 3''-1'' – krawędź niewidoczna

Tu nie da się pokazać, które linie są widoczne, a które nie, bo i tak wszystko się na siebie nakłada.

Przekroje wielościanów płaszczyzną

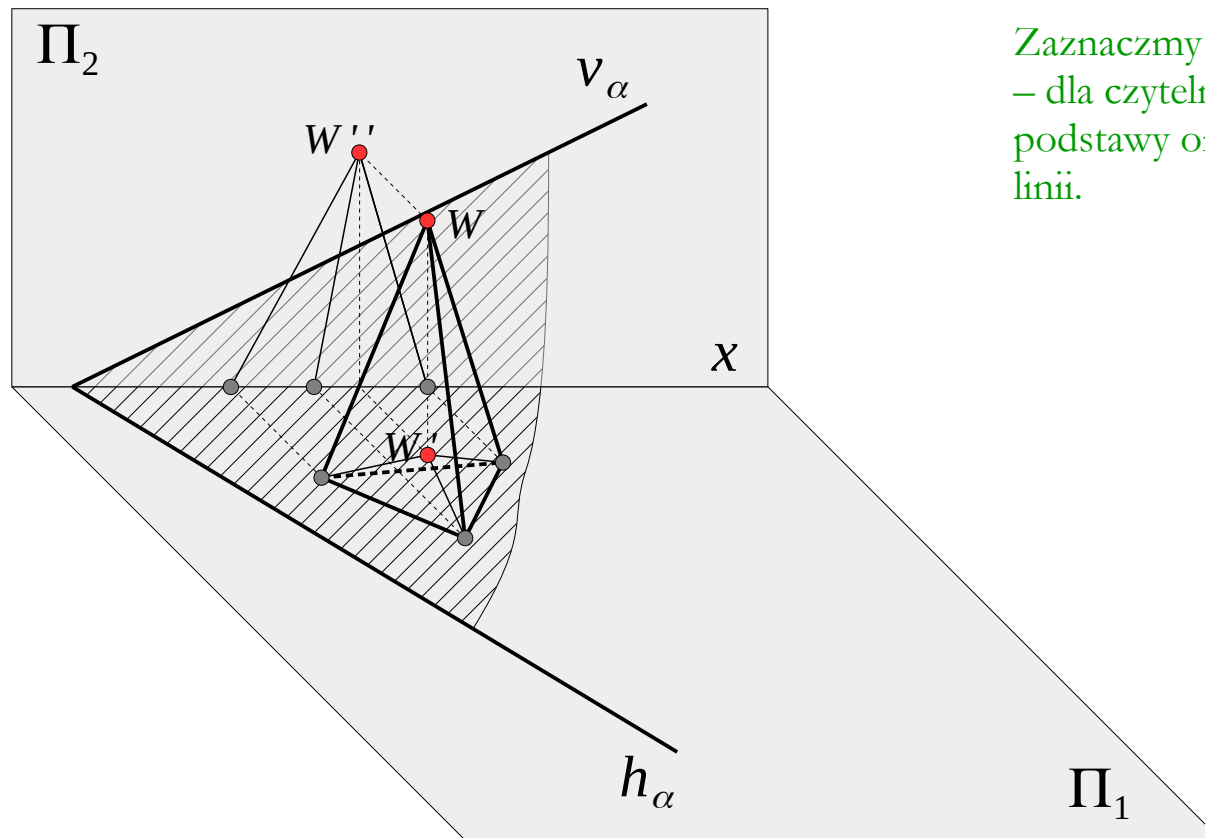


Jeżeli ani wielościan ani płaszczyzna krojąca nie są rzutujące, to trzeba zastosować transformację względem rzutni prostopadłej do któregoś ze śladów płaszczyzny tnącej (tu: względem śladu poziomego) – w efekcie, patrząc z za pleców widocznego na rysunku obserwatora, uzyska się obraz wielościanu przecinanego płaszczyzną rzutującą.

Zadanie redukuje się po postaci:
znaleźć brakujący rzut punktu wiedząc, że leży on na danej prostej (tu: krawędzi bocznej).

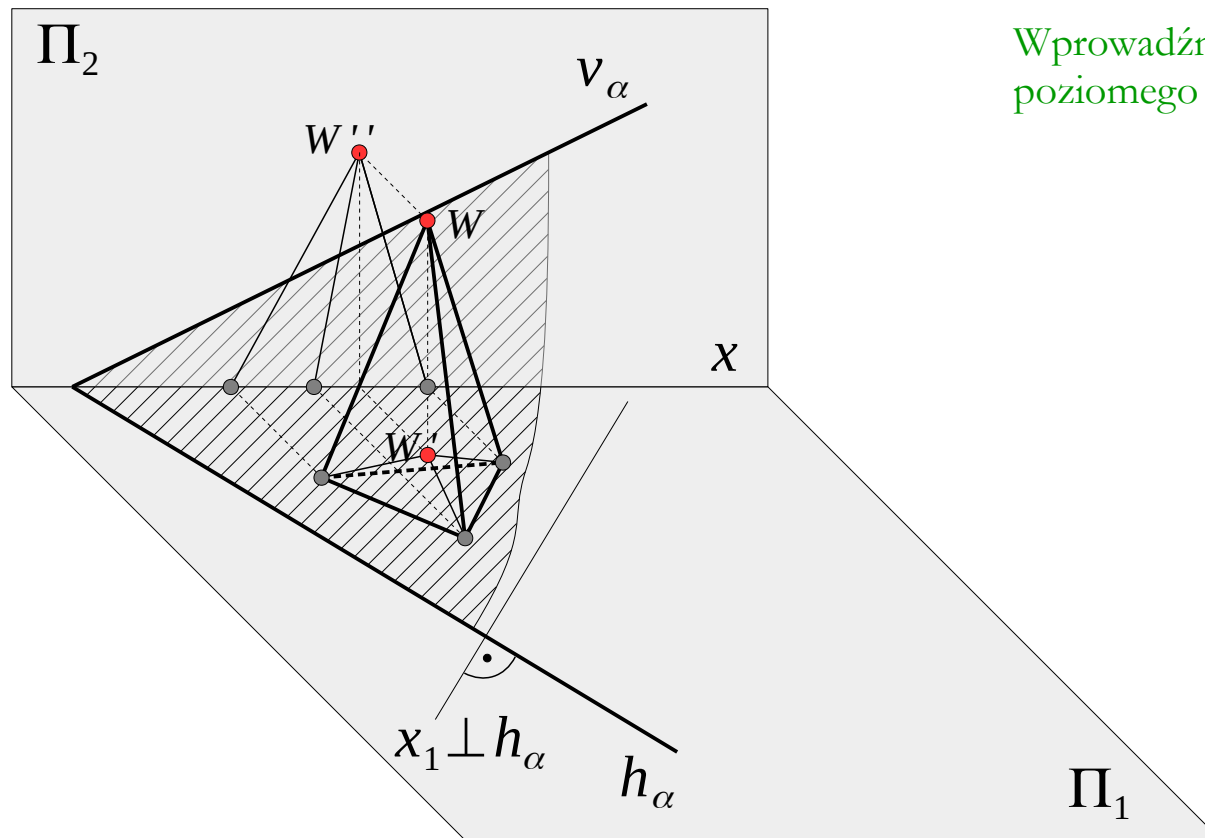
Jak powstał ten rysunek?

Przekroje wielościanów płaszczyzną



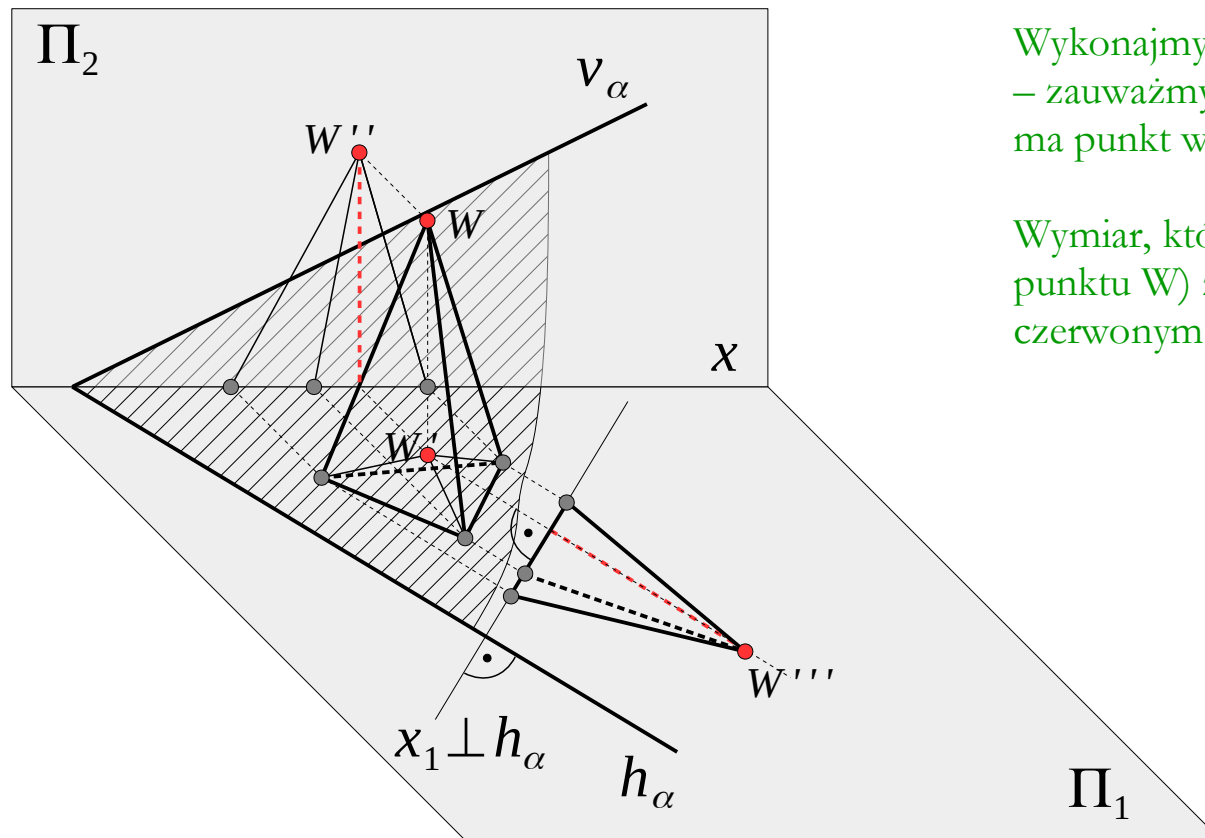
Zaznaczmy sam wielościan oraz jego rzuty
– dla czytelności pominiemy nazwy wierzchołków
podstawy oraz symbole oznaczające prostopadłość
linii.

Przekroje wielościanów płaszczyzną



Wprowadźmy nową rzutnię, prostopadłą do śladu poziomego płaszczyzny tnącej.

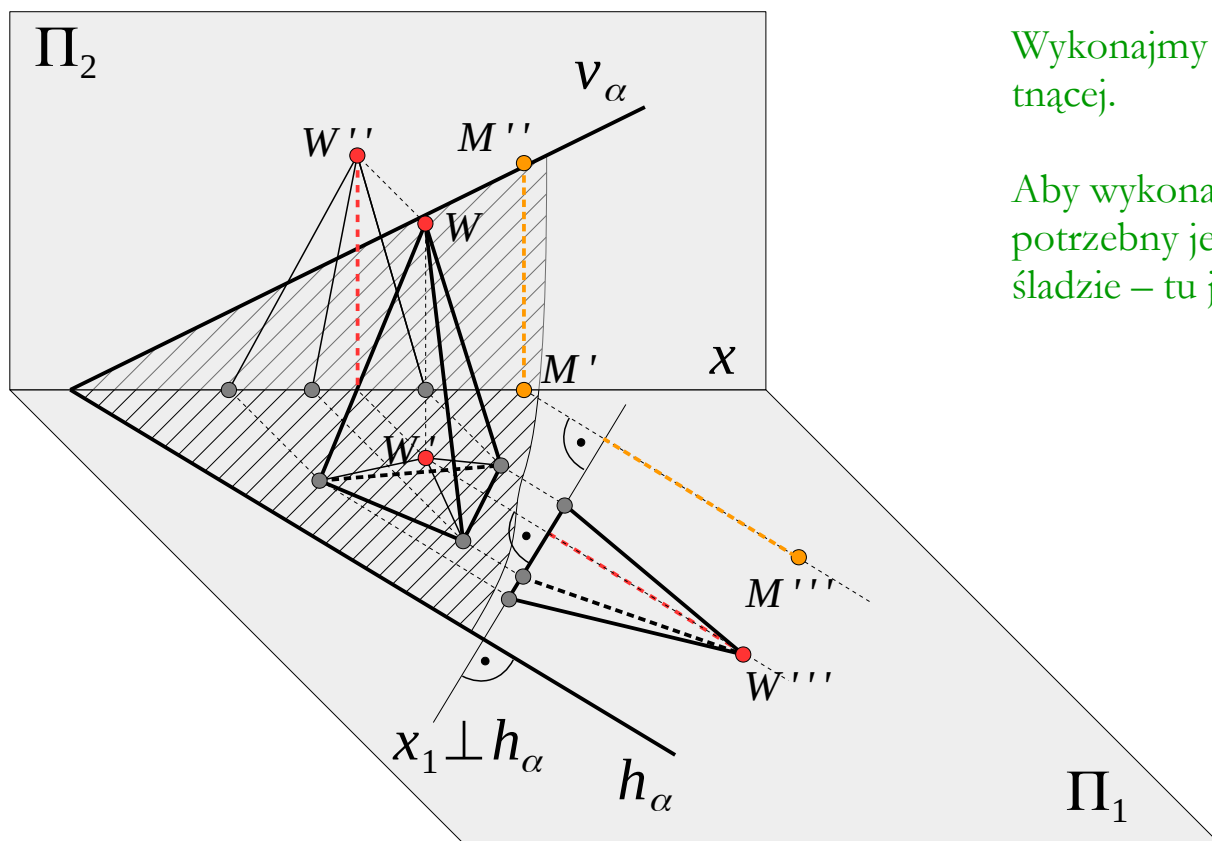
Przekroje wielościanów płaszczyzną



Wykonajmy transformację wielościanu – zauważmy, że największe znaczenie ma punkt wierzchołkowy.

Wymiar, który przenosimy (wysokość punktu W) zaznaczony jest kolorem czerwonym.

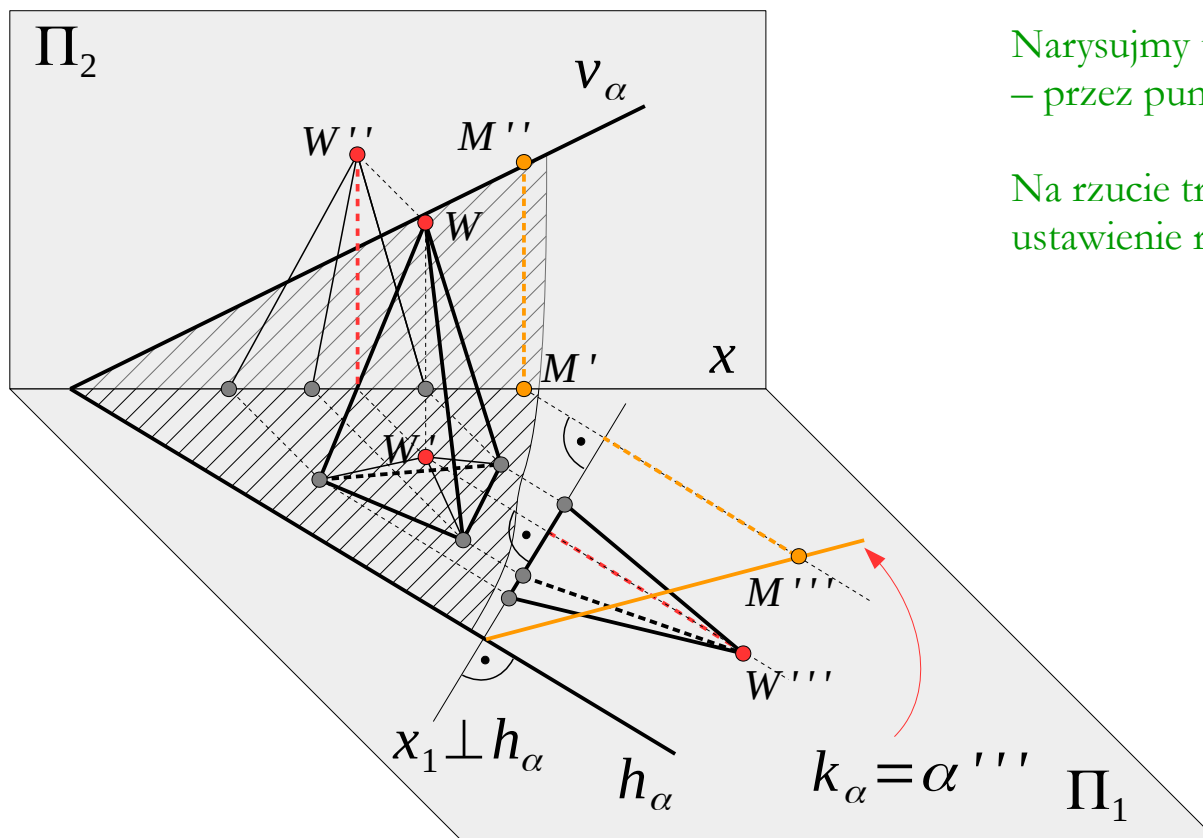
Przekroje wielościanów płaszczyzną



Wykonajmy transformację płaszczyzny tnącej.

Aby wykonać transformację płaszczyzny, potrzebny jest jakiś punkt leżący na śladzie – tu jest to punkt M .

Przekroje wielościanów płaszczyzną



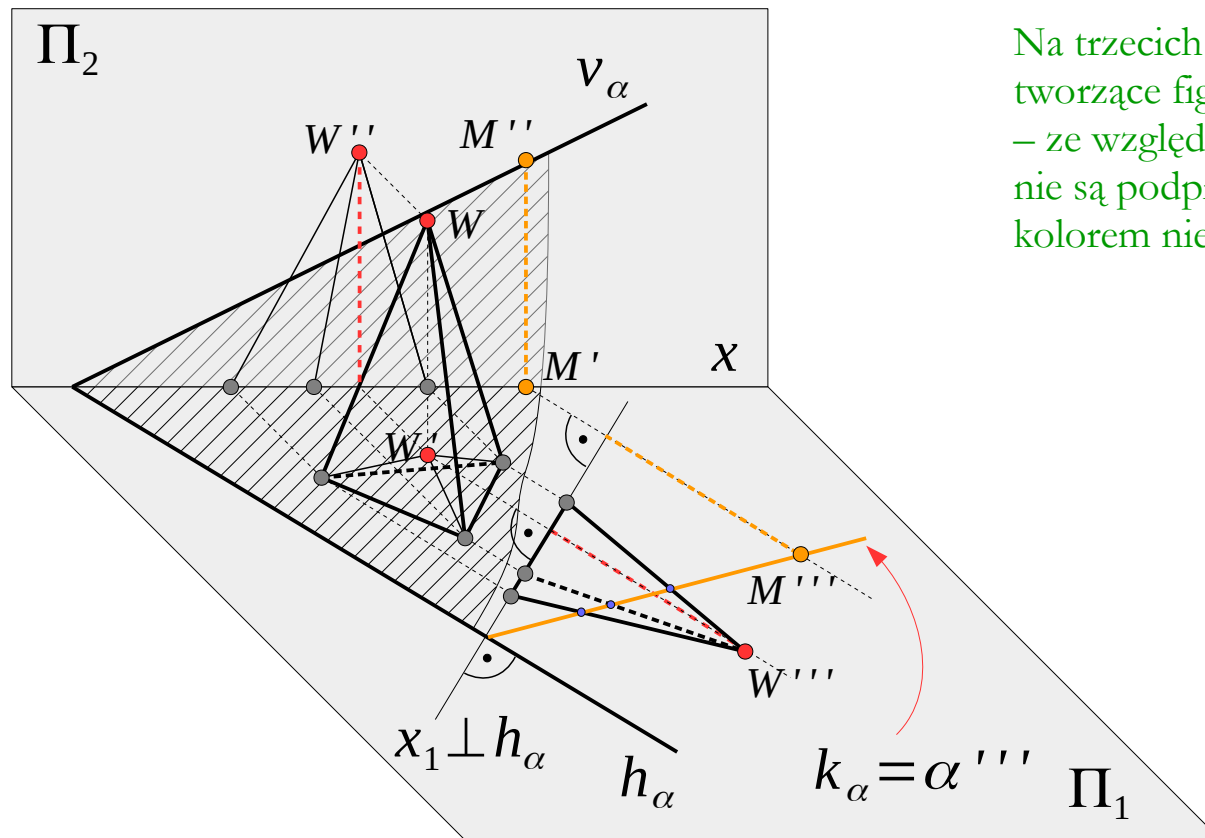
Narysujmy trzeci ślad płaszczyzny tnącej
– przez punkt M oraz nowy węzeł.

Na rzucie trzecim płaszczyzna tnąca ma
ustawienie rzutujące!

$$k_\alpha = \alpha'''$$

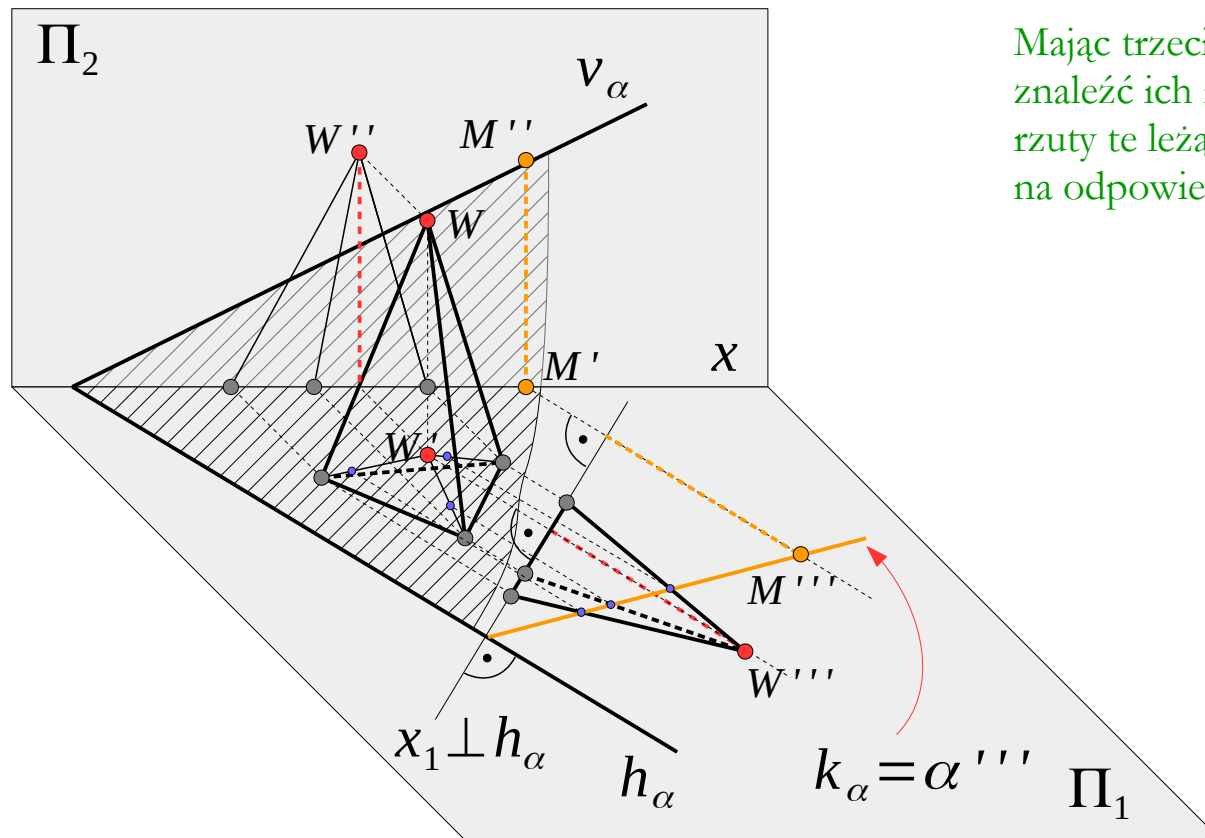
$$k_\alpha = \alpha''' \quad \Pi_1$$

Przekroje wielościanów płaszczyzną



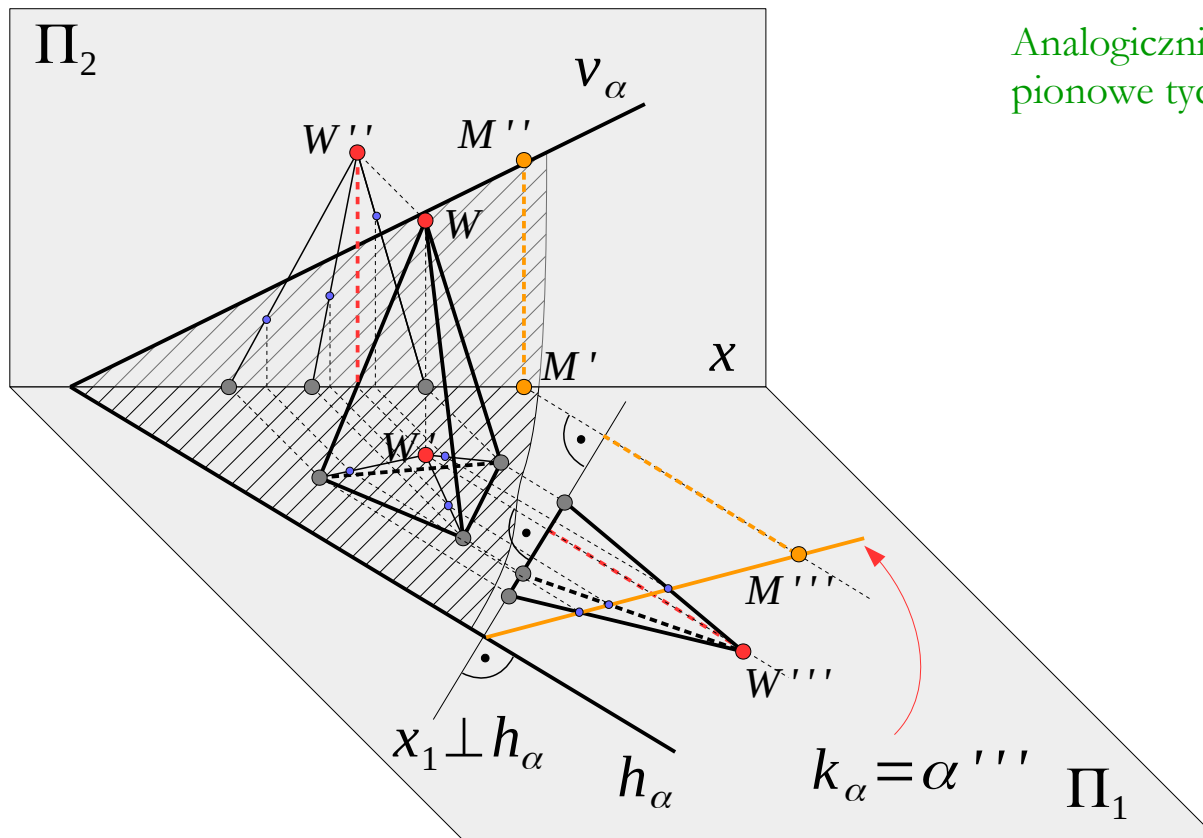
Na trzecich rzutach zaznaczmy punkty tworzące figurę będącą zarysem przekroju – ze względu na brak miejsca punkty te nie są podpisane, tylko oznaczone kolorem niebieskim.

Przekroje wielościanów płaszczyzną



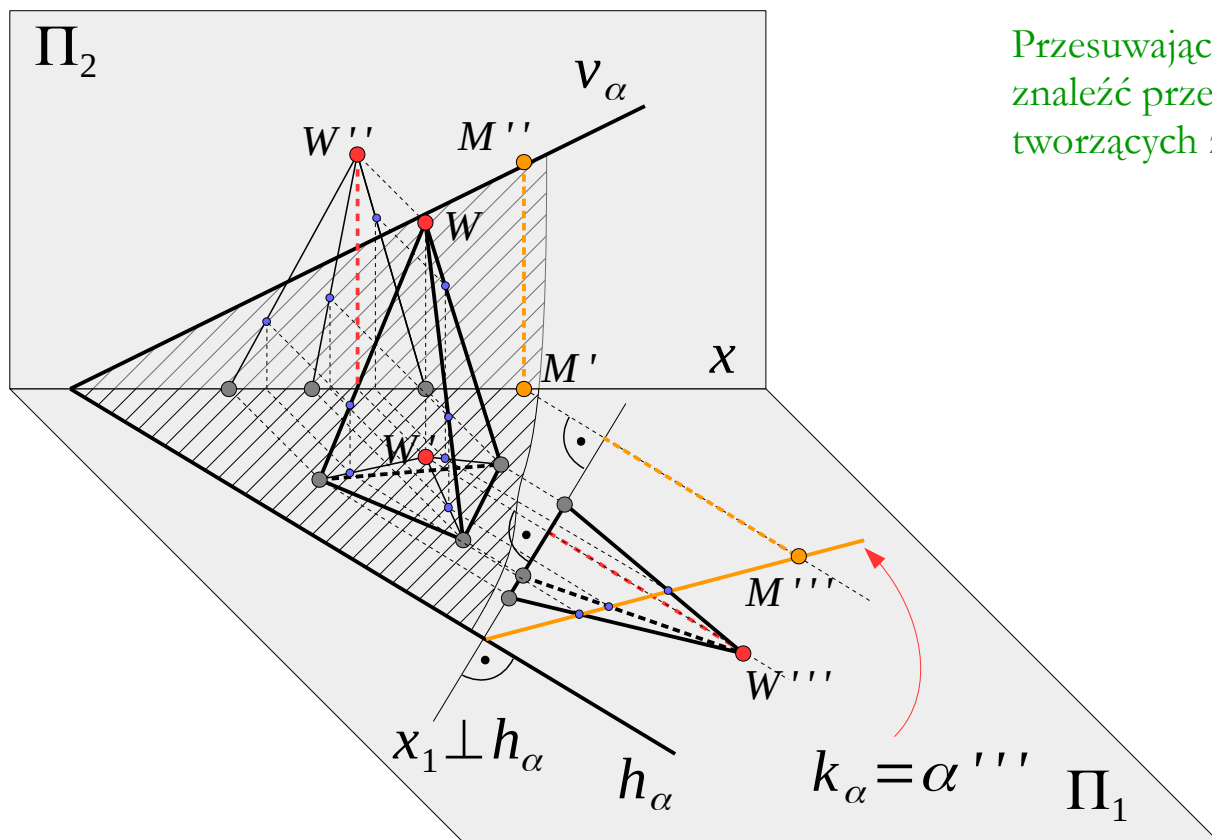
Mając trzecie rzuty punktów można znaleźć ich rzuty poziome, wiedząc że rzuty te leżą na jednych odnoszących oraz na odpowiednich krawędziach wielościanu.

Przekroje wielościanów płaszczyzną



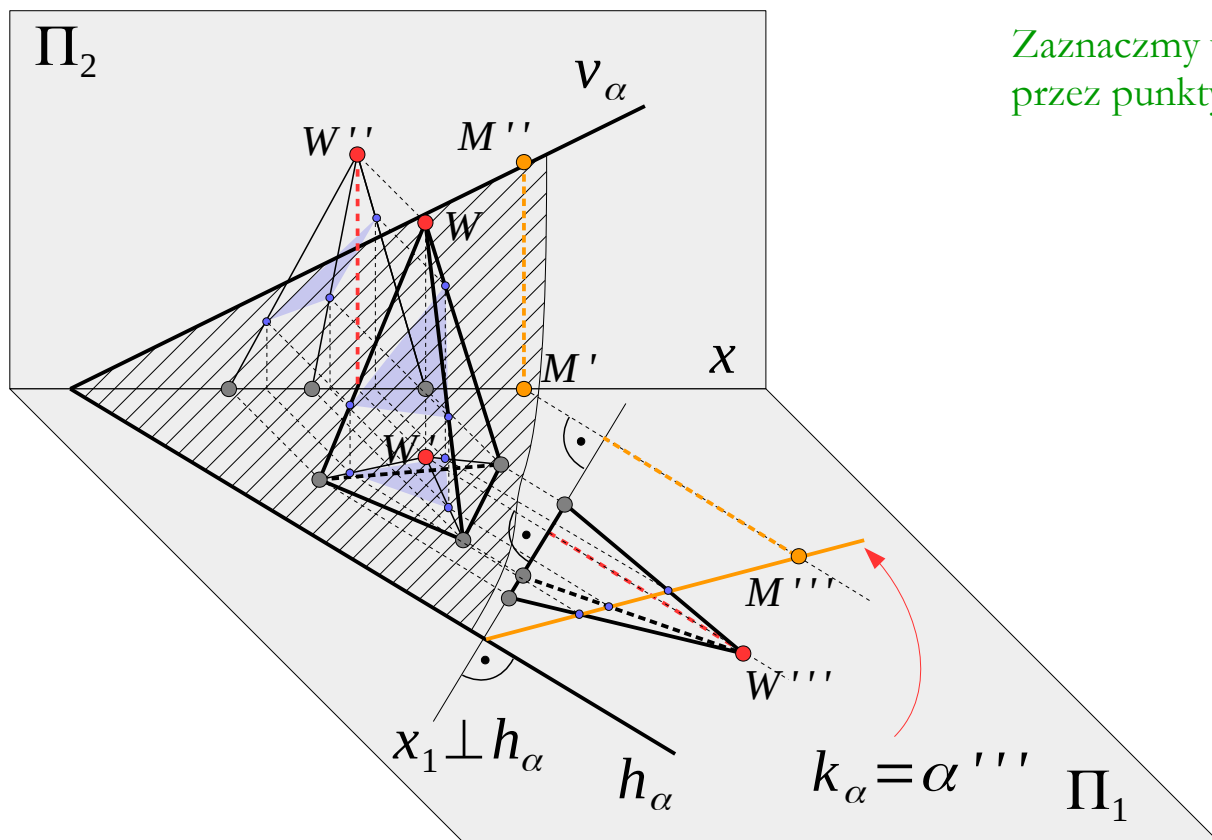
Analogicznie można znaleźć rzuty pionowe tych samych punktów.

Przekroje wielościanów płaszczyzną



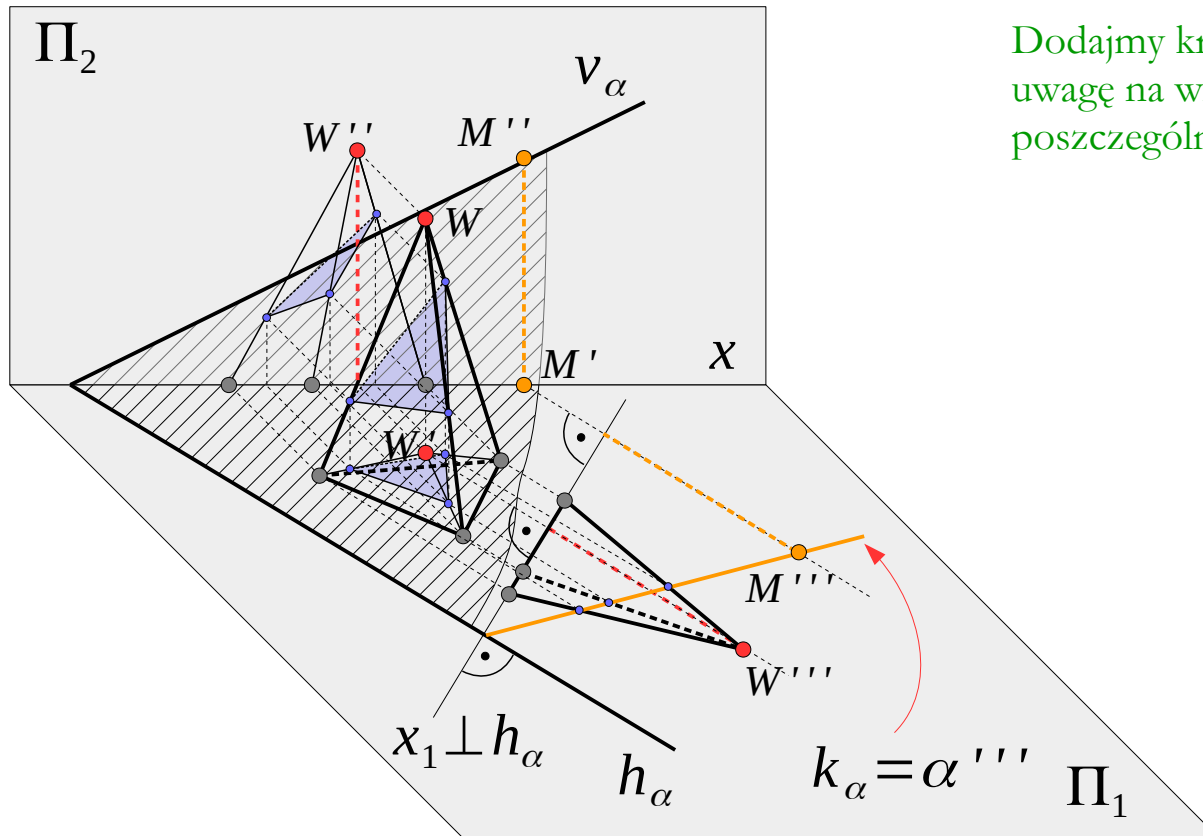
Przesuwając odpowiednie odnoszące można znaleźć przestrzenne położenie punktów tworzących zarys figury przecięcia.

Przekroje wielościanów płaszczyzną



Zaznaczmy wyraźnie figurę wyznaczoną przez punkty pomocnicze.

Przekroje wielościanów płaszczyzną

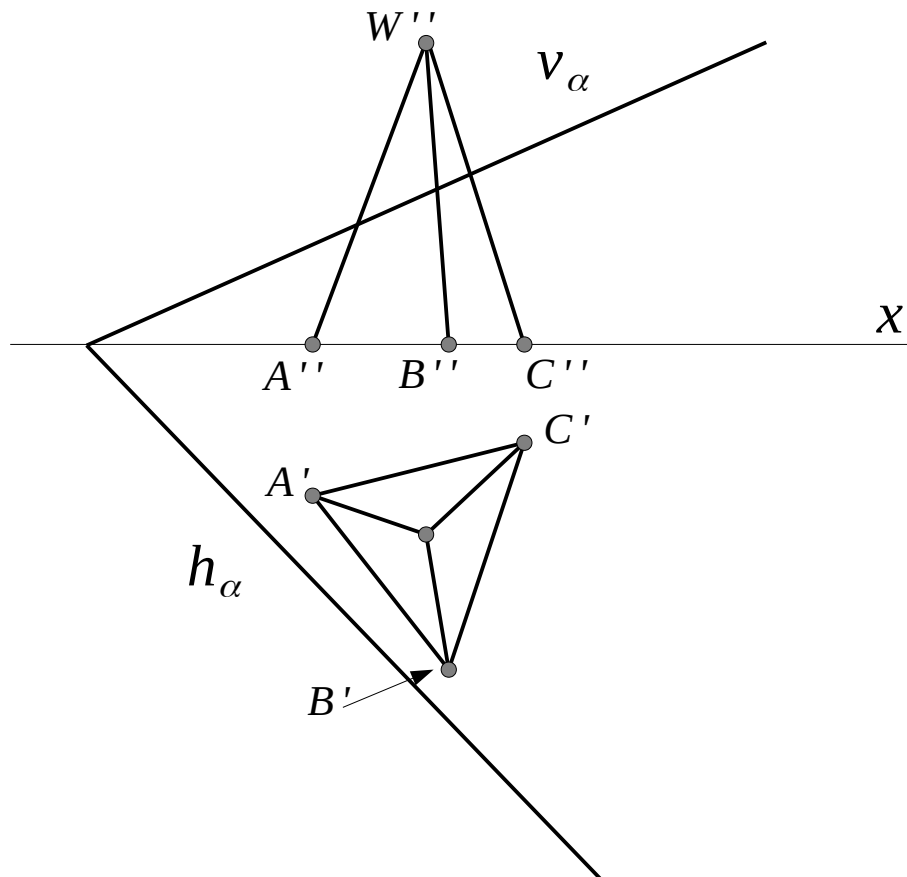


Dodajmy krawędzie figury zwracając uwagę na widoczność lub niewidoczność poszczególnych linii.

Przekroje wielościanów płaszczyzną

Wyznaczyć przekrój ostrosłupa płaszczyzną α .

Powtórzmy konstrukcję na układzie dwóch rzutni:

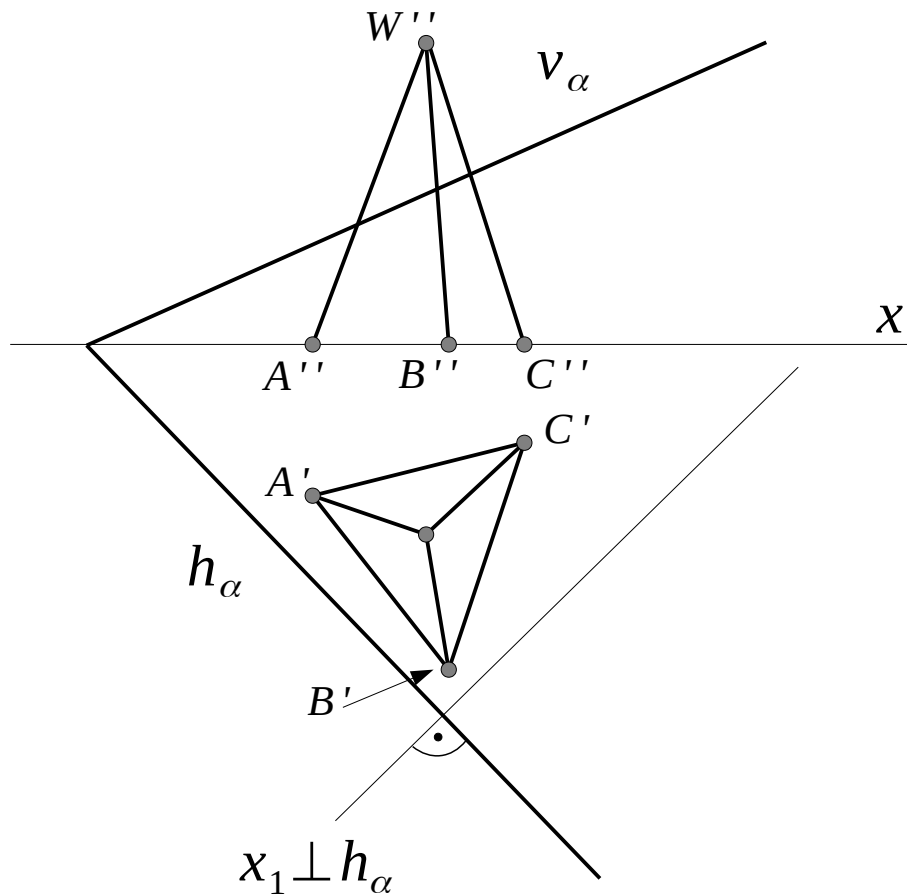


Przekroje wielościanów płaszczyzną

Wyznaczyć przekrój ostrosłupa płaszczyzną α .

Powtórzmy konstrukcję na układzie dwóch rzutni:

- wstawmy płaszczyznę transformacji.

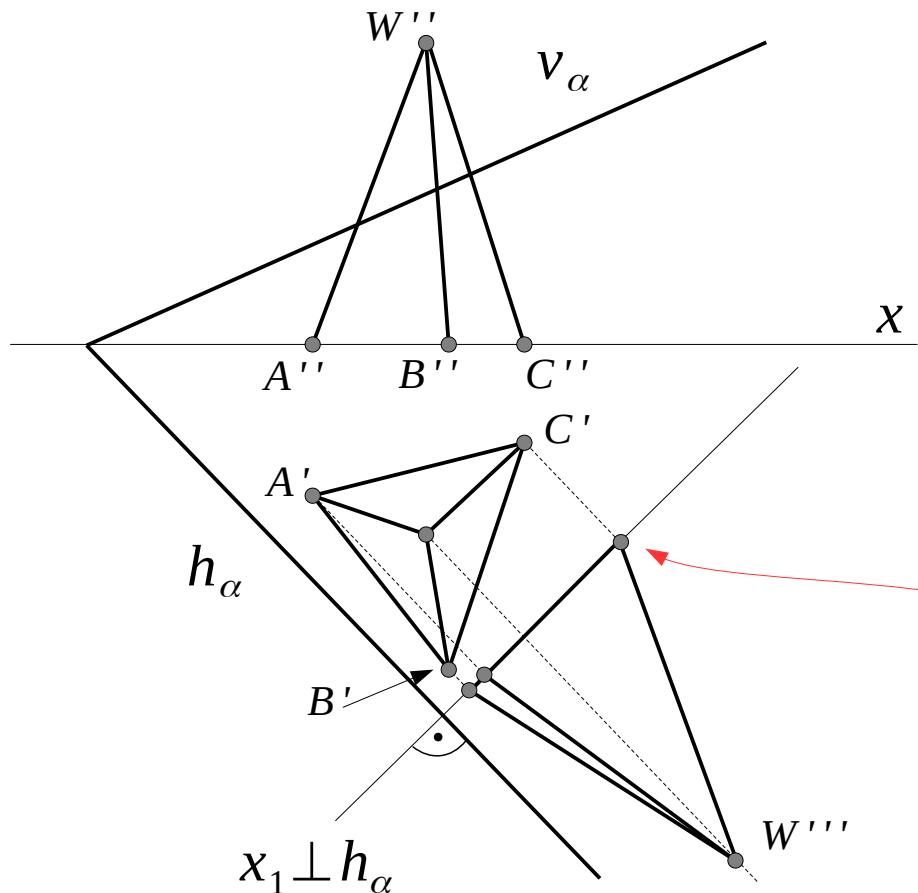


Przekroje wielościanów płaszczyzną

Wyznaczyć przekrój ostrosłupa płaszczyzną α .

Powtórzmy konstrukcję na układzie dwóch rzutni:

- wykonajmy transformację wielościanu.



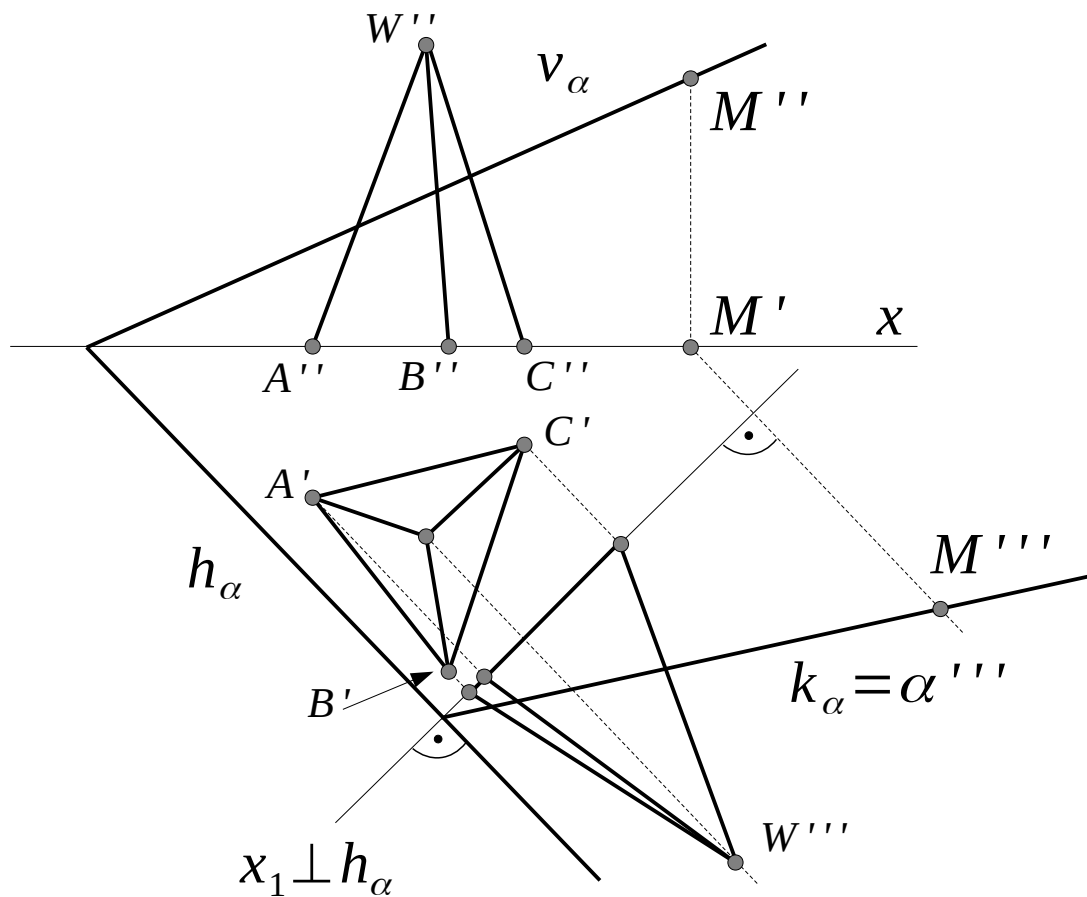
Dla czytelności rysunku pominięte zostały oznaczenia trzecich rzutów punktów podstawy ostrosłupa oraz symbole prostokątności linii.

Przekroje wielościanów płaszczyzną

Wyznaczyć przekrój ostrosłupa płaszczyzną α .

Powtórzmy konstrukcję na układzie dwóch rzutni:

- wykonajmy transformację płaszczyzny.

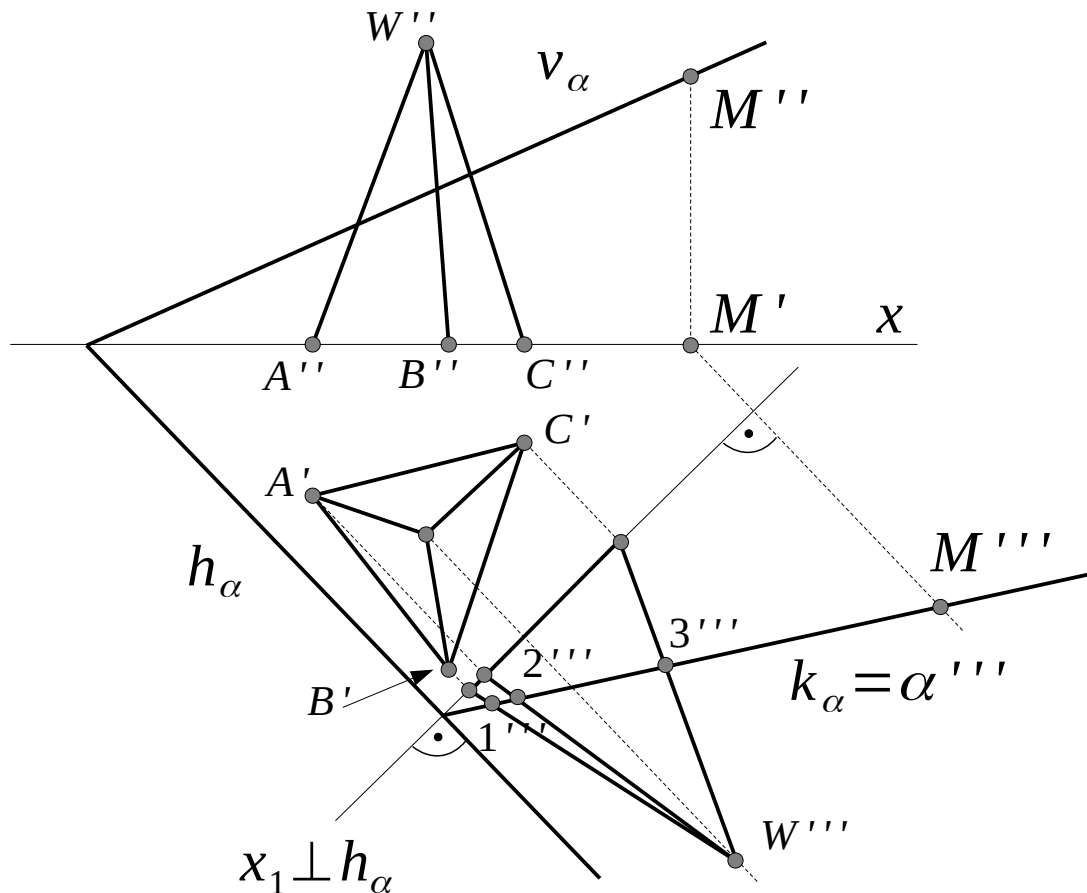


Przekroje wielościanów płaszczyzną

Wyznaczyć przekrój ostrosłupa płaszczyzną α .

Powtórzmy konstrukcję na układzie dwóch rzutni:

- zaznaczmy przekrój ostrosłupa na rzucie trzecim.

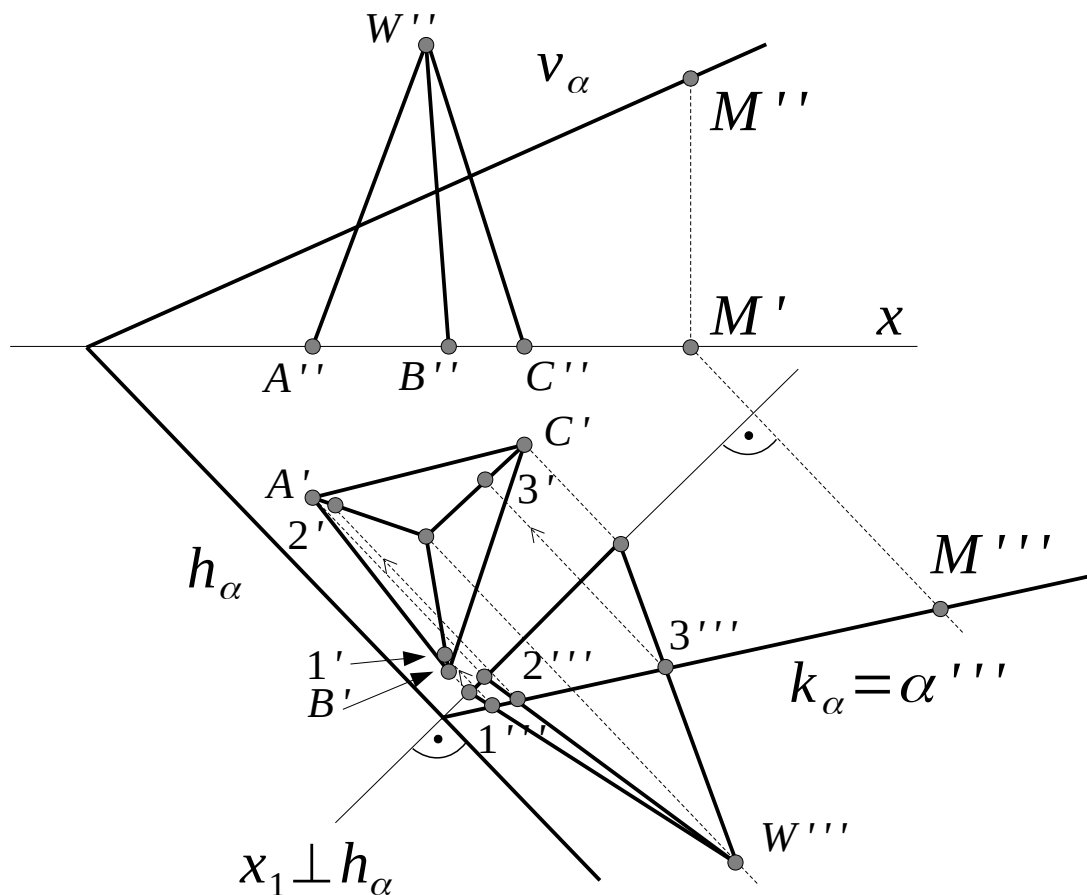


Przekroje wielościanów płaszczyzną

Wyznaczyć przekrój ostrosłupa płaszczyzną α .

Powtórzmy konstrukcję na układzie dwóch rzutni:

- znajdźmy rzuty poziome punktów przekroju.

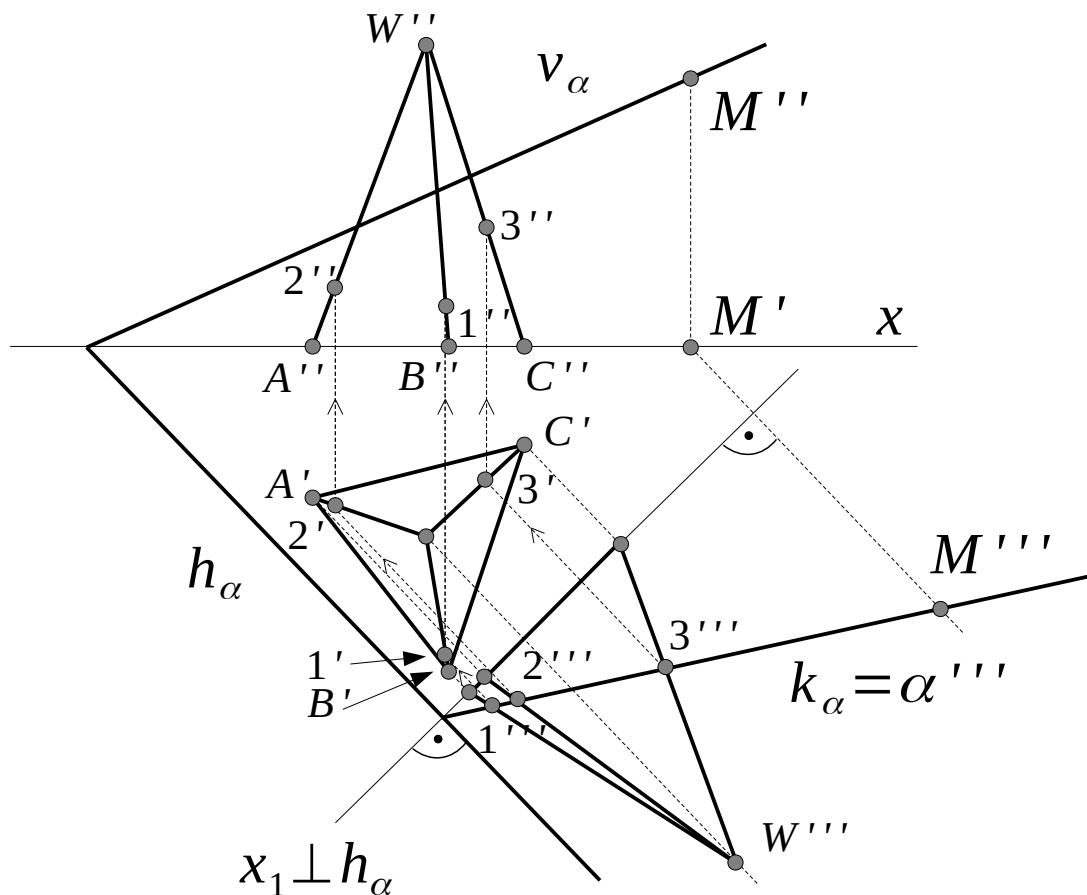


Przekroje wielościanów płaszczyzną

Wyznaczyć przekrój ostrosłupa płaszczyzną α .

Powtórzmy konstrukcję na układzie dwóch rzutni:

- znajdźmy rzuty pionowe punktów przekroju.

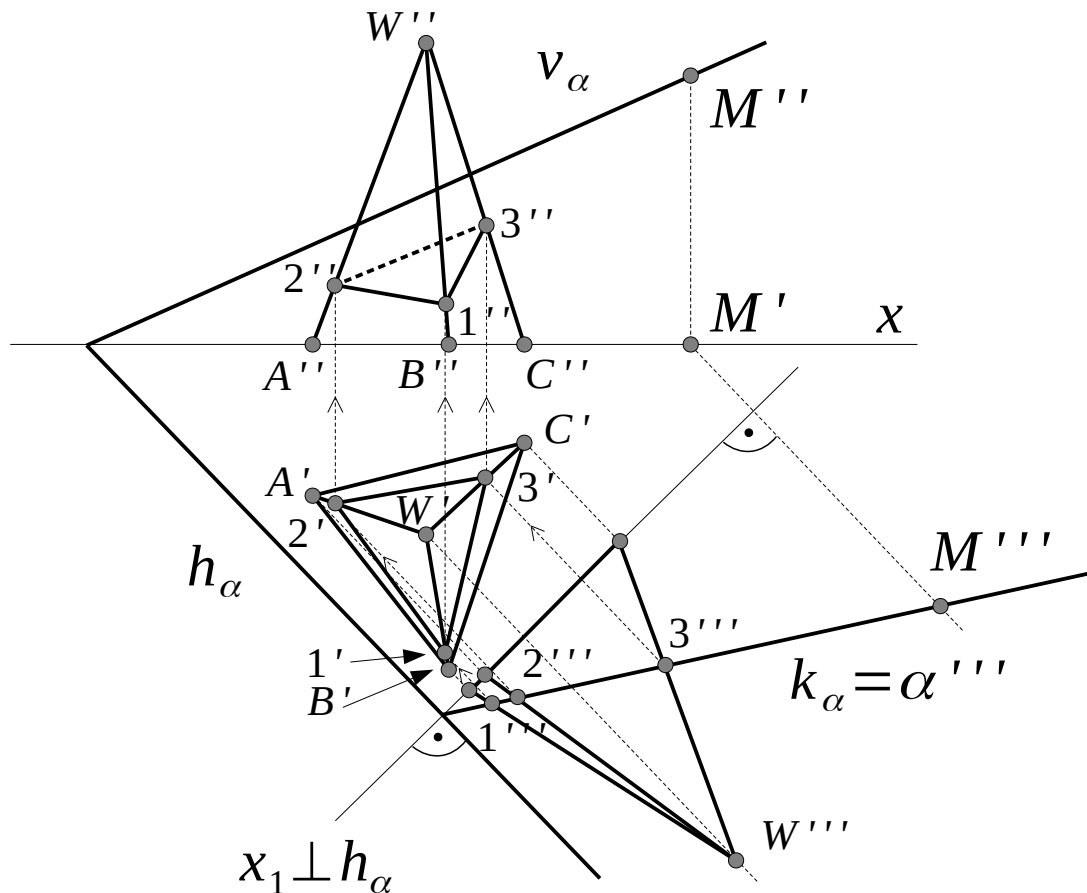


Przekroje wielościanów płaszczyzną

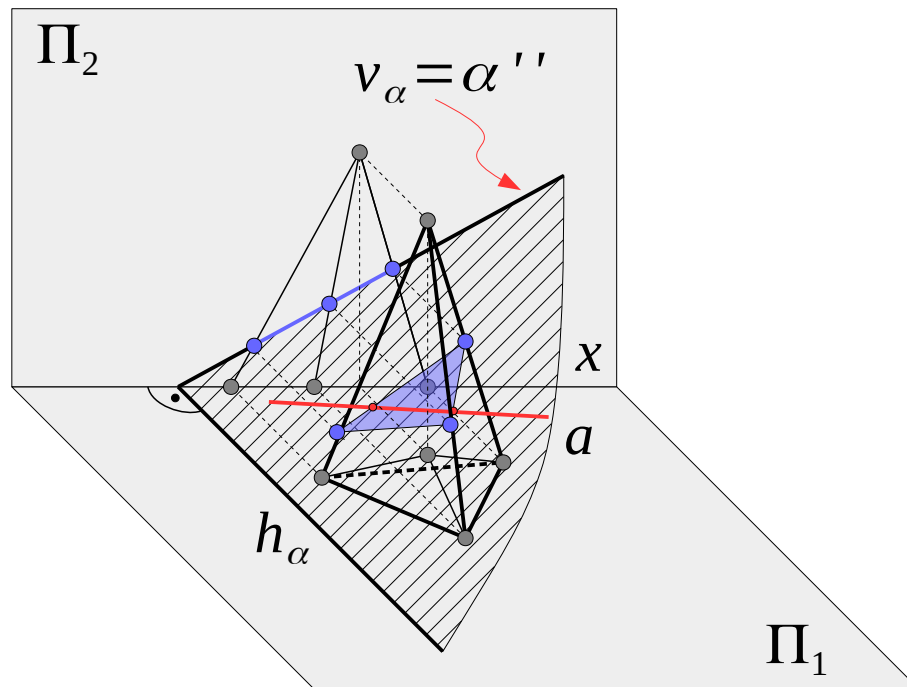
Wyznaczyć przekrój ostrosłupa płaszczyzną α .

Powtórzmy konstrukcję na układzie dwóch rzutni:

- zaznaczymy zarys przekroju na rzucie poziomym i pionowym zwracając uwagę na widoczność lub niewidoczność linii.



Przebiecia wielościanów prostą



Wielościan wypukły – wielościan leżący po jednej stronie każdej z płaszczyzn, na których leżą ściany tego wielościanu.

Uniwersalną metodą wyznaczania punktów przebiecia wielościanu prostą jest:

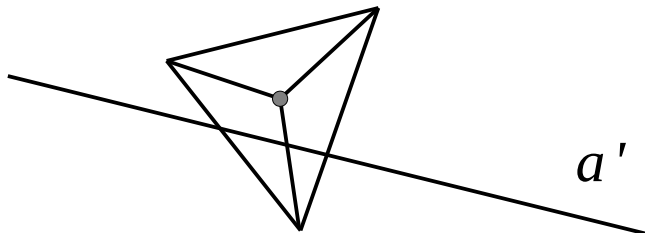
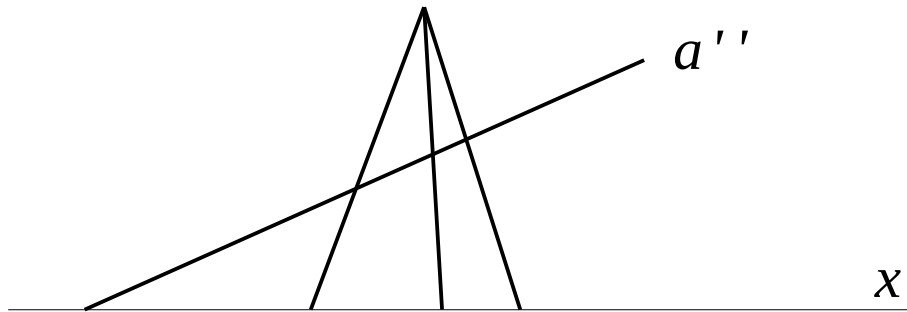
- wstawienie płaszczyzny rzutującej przechodzącej przez wybrany rzut prostej przebijającej,
- wyznaczenie przekroju wielościanu płaszczyzną tnącą,
- wyznaczenie punktów wspólnych przekroju oraz prostej przebijającej.

Nie zostało jeszcze powiedziane, że na wykładach zajmujemy się zasadniczo tzw. wielościanami wypukłymi!

Wielościany wklęsłe mogą mieć różną liczbę punktów przebiecia!

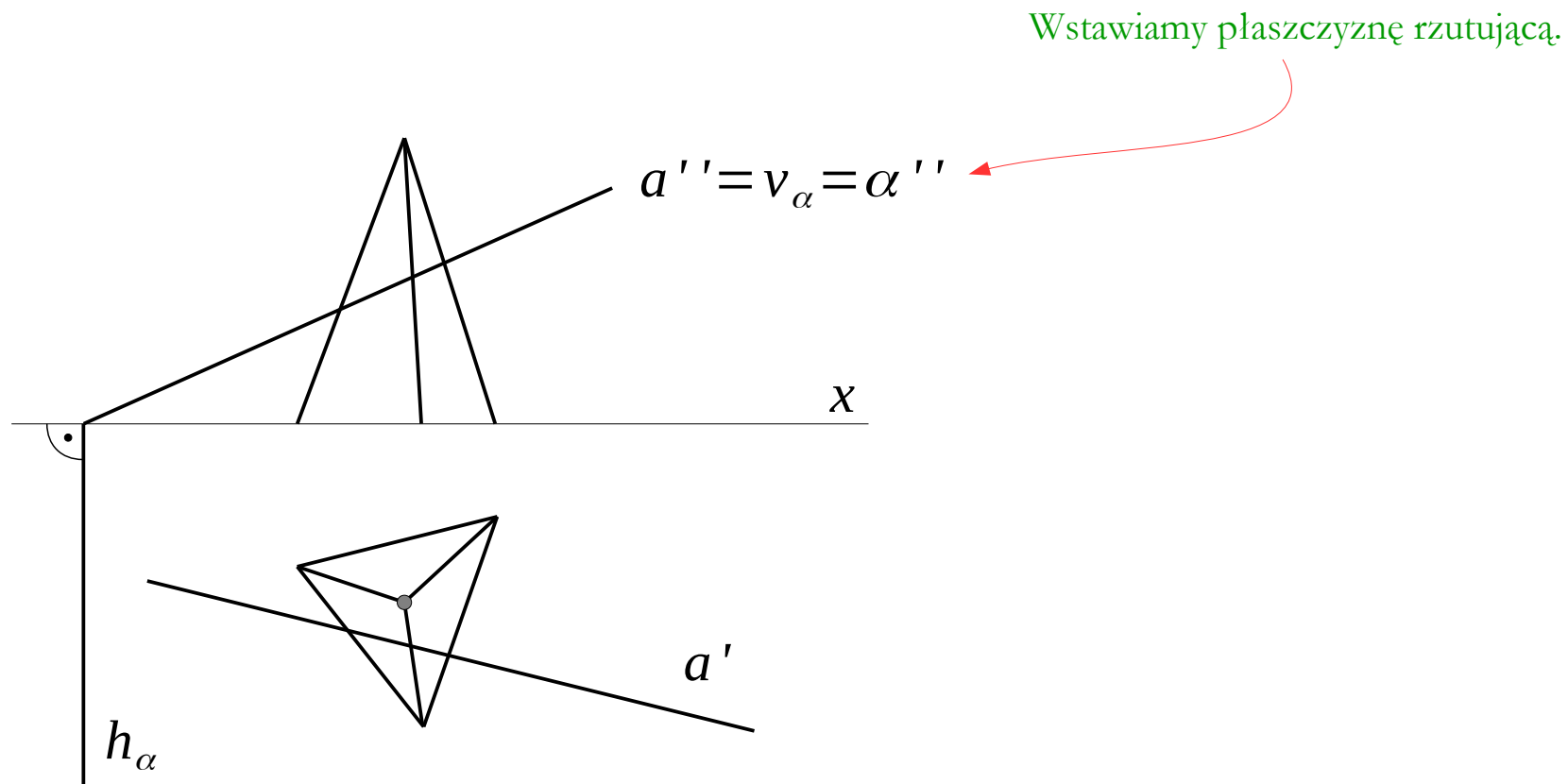
Przebicia wielościanów prostą

Wyznaczyć punkty przebiecia ostrosłupa prostą a .



Przebiecia wielościanów prostą

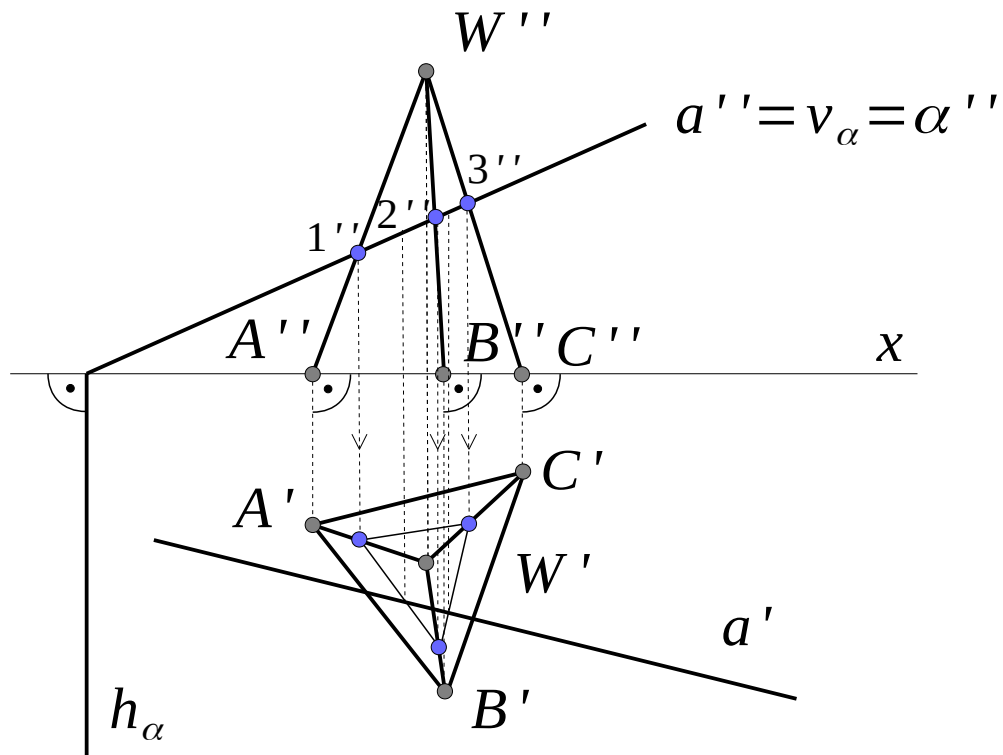
Wyznaczyć punkty przebiecia ostrosłupa prostą a .



Przebiecia wielościanów prostą

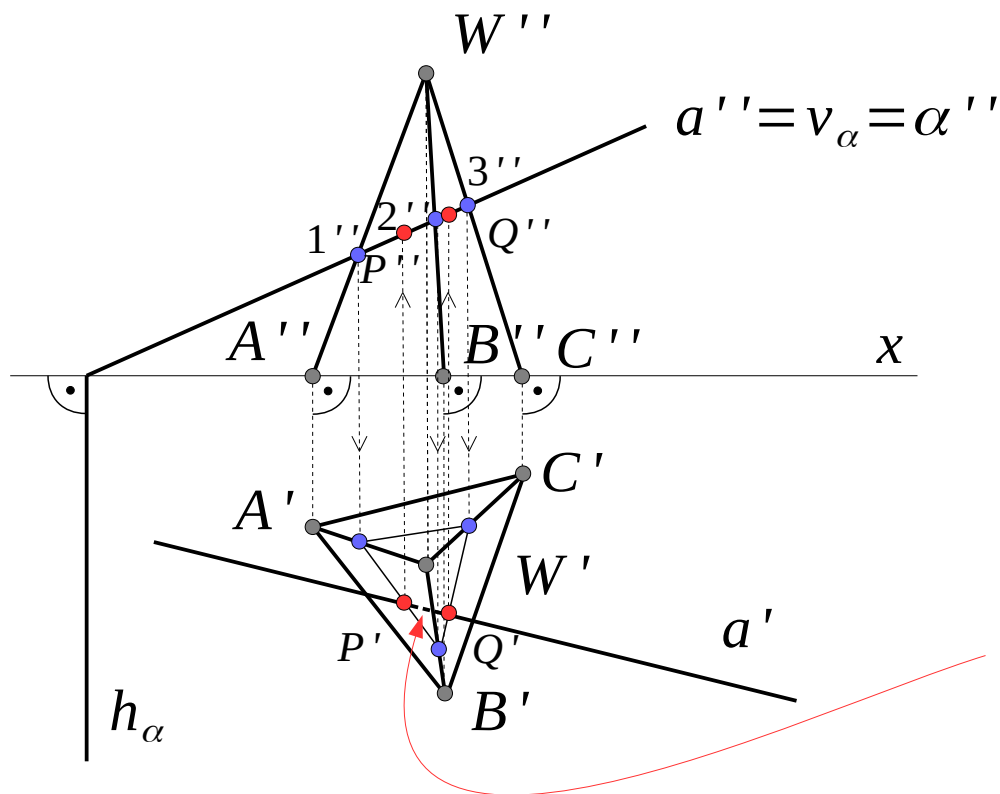
Wyznaczyć punkty przebiecia ostrosłupa prostą a .

Wyznaczamy przekrój – dowolną metodą.



Przebiecia wielościanów prostą

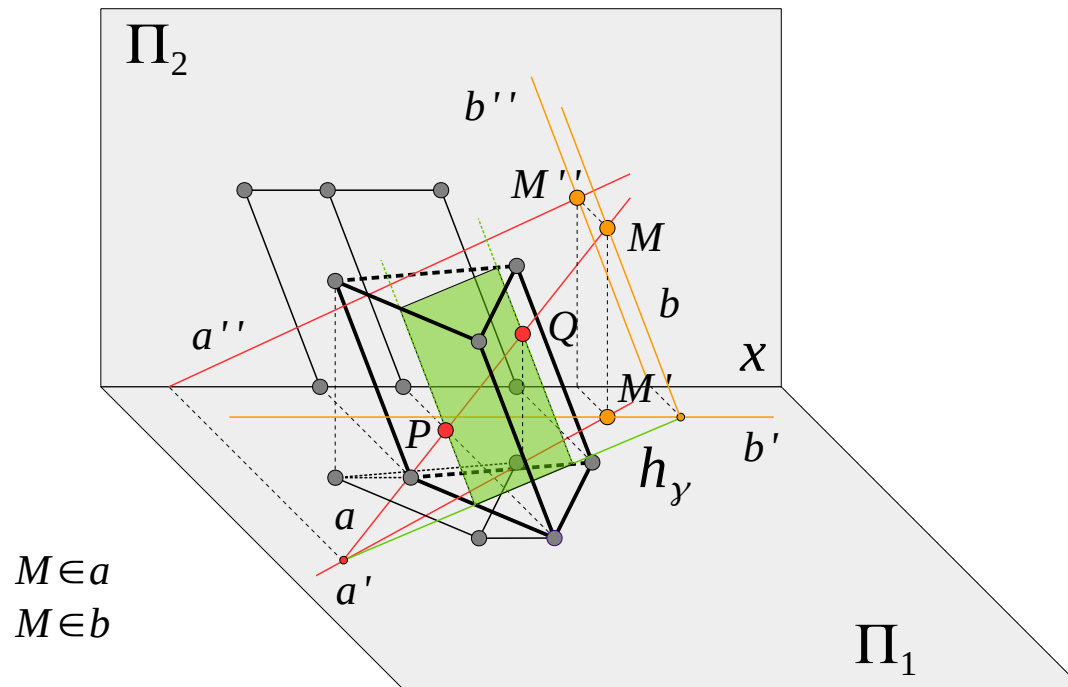
Wyznaczyć punkty przebiecia ostrosłupa prostą a .



Zaznaczamy punkty wspólnego przekroju i prostej – jest to zawsze możliwe na jednym z rzutów (tu: na rzucie poziomym).

Warto podkreślić, które linie są niewidoczne.

Przebiecia wielościanów prostą



$M \in a$
 $M \in b$

Inna metoda wyznaczenia punktów przebiecia polega na wstawieniu „specjalnej” płaszczyzny.

W przypadku graniastosłupa płaszczyznę, o której mowa wyznacza się na podstawie dwóch prostych:

- prostej przebijającej (tu: a),
- prostej (tu: b) równoległej do krawędzi bocznych graniastosłupa i mającej punkt wspólny (tu: M) z prostą przebijającą.

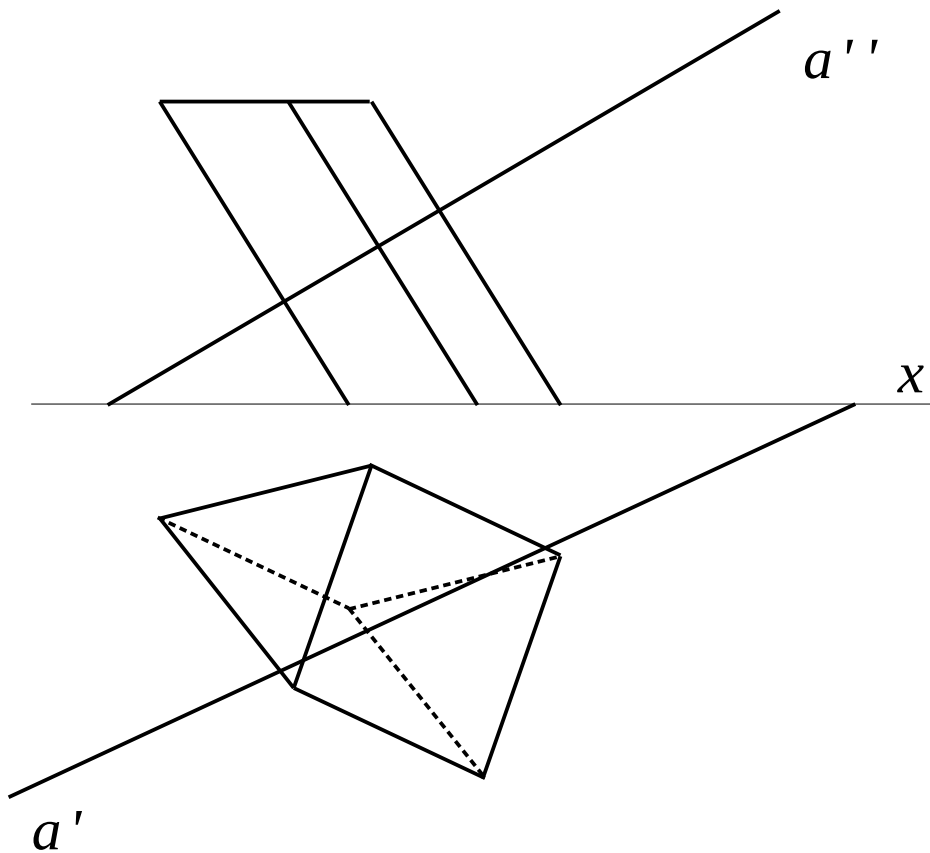
Płaszczyzna utworzona przez proste a i b jest równoległa do krawędzi bocznych wielościanu.

Zauważmy, że przekrojem jest czworokąt, którego dwa boki muszą być równoległe do krawędzi bocznych wielościanu!

Aby nie zaciemniać rysunku, pominięto na nim wiele oznaczeń – nazwy części punktów oraz symbole prostokątności odnoszących.

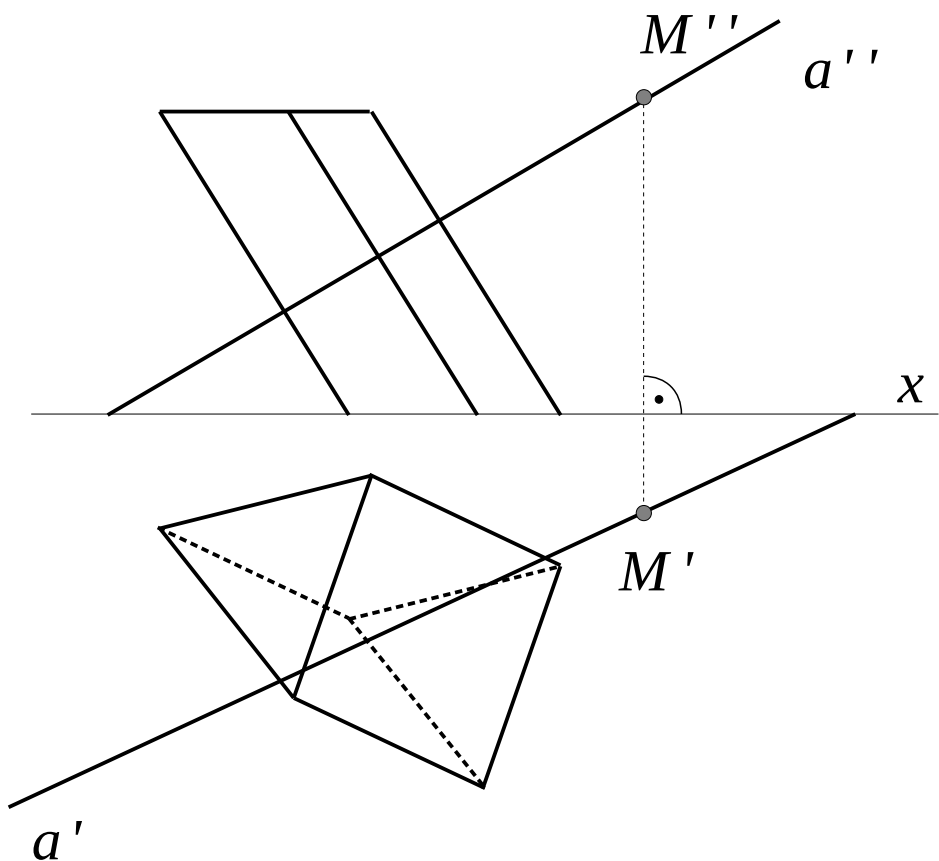
Przebiecia wielościanów prostą

Wyznaczyć punkty przebiecia wielościanu prostą a .



Przebiecia wielościanów prostą

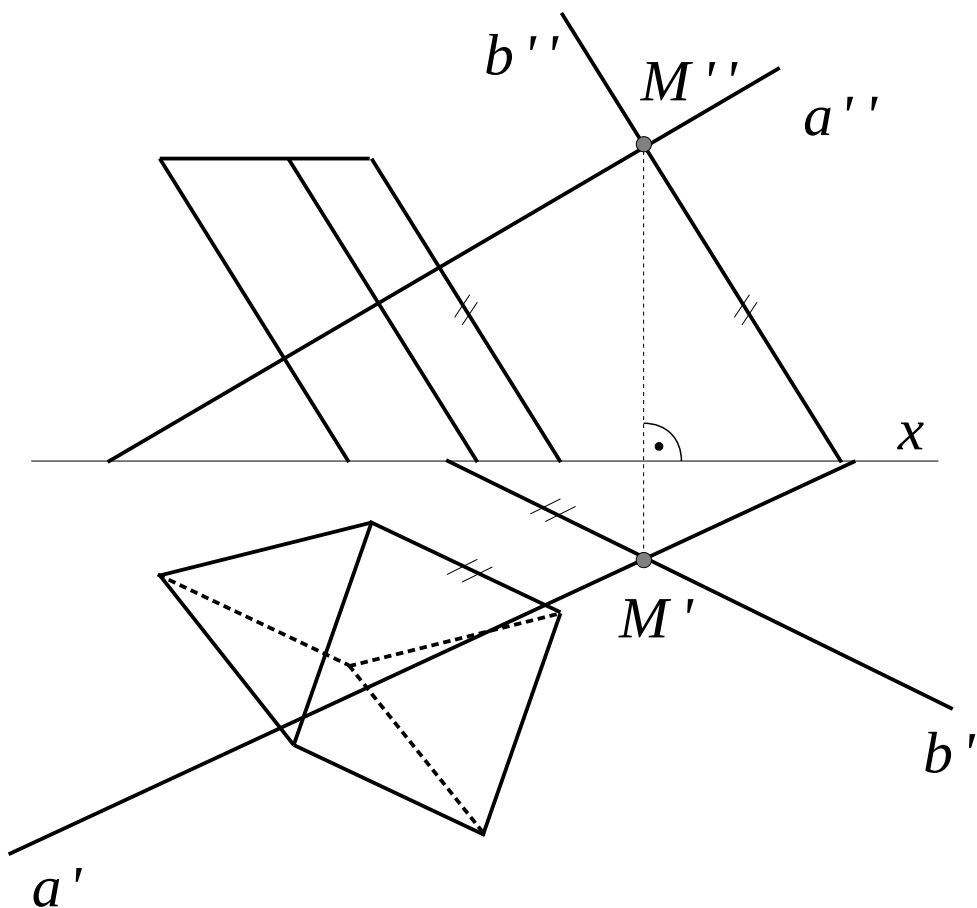
Wyznaczyć punkty przebiecia wielościanu prostą a .



Wstawmy dowolny punkt na prostej przebijającej – tu: punkt M .

Przebicia wielościanów prostą

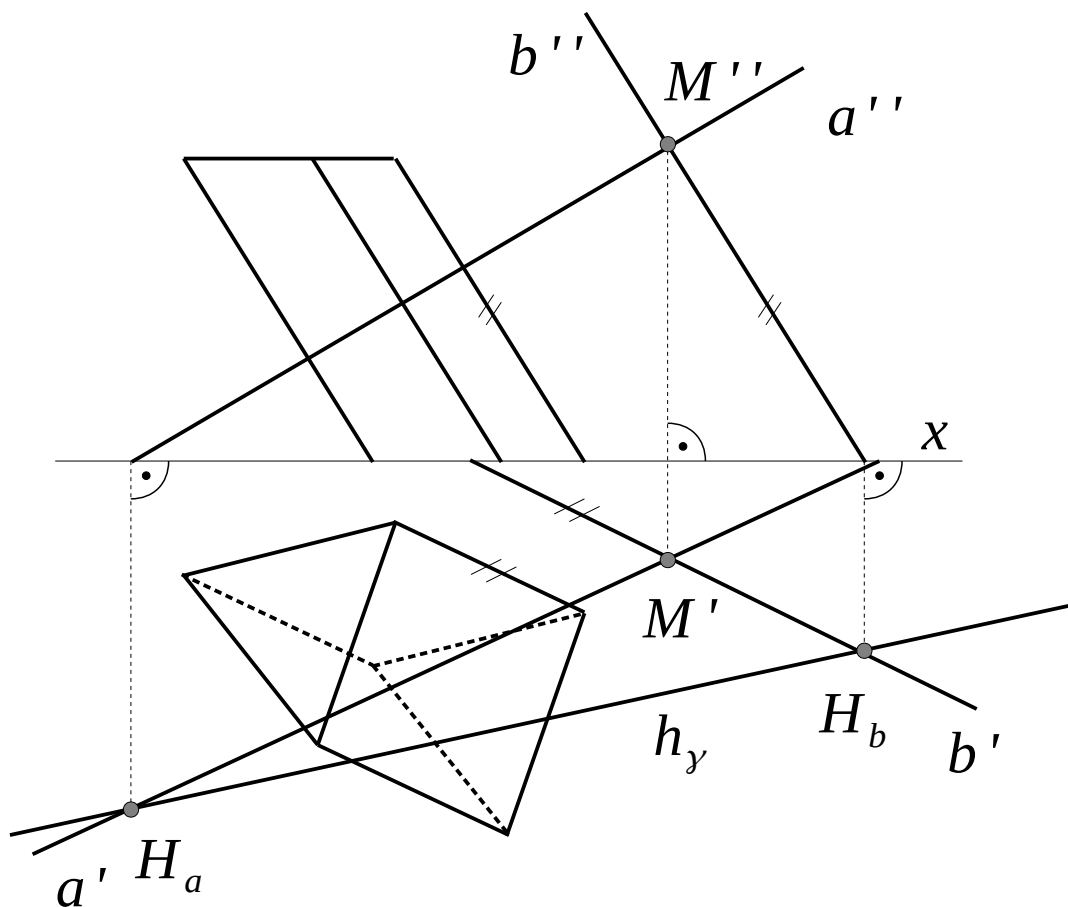
Wyznaczyć punkty przebicia wielościanu prostą a .



Przez punkt M wstawmy prostą równoległą do krawędzi bocznych graniastosłupa.

Przebiecia wielościanów prostą

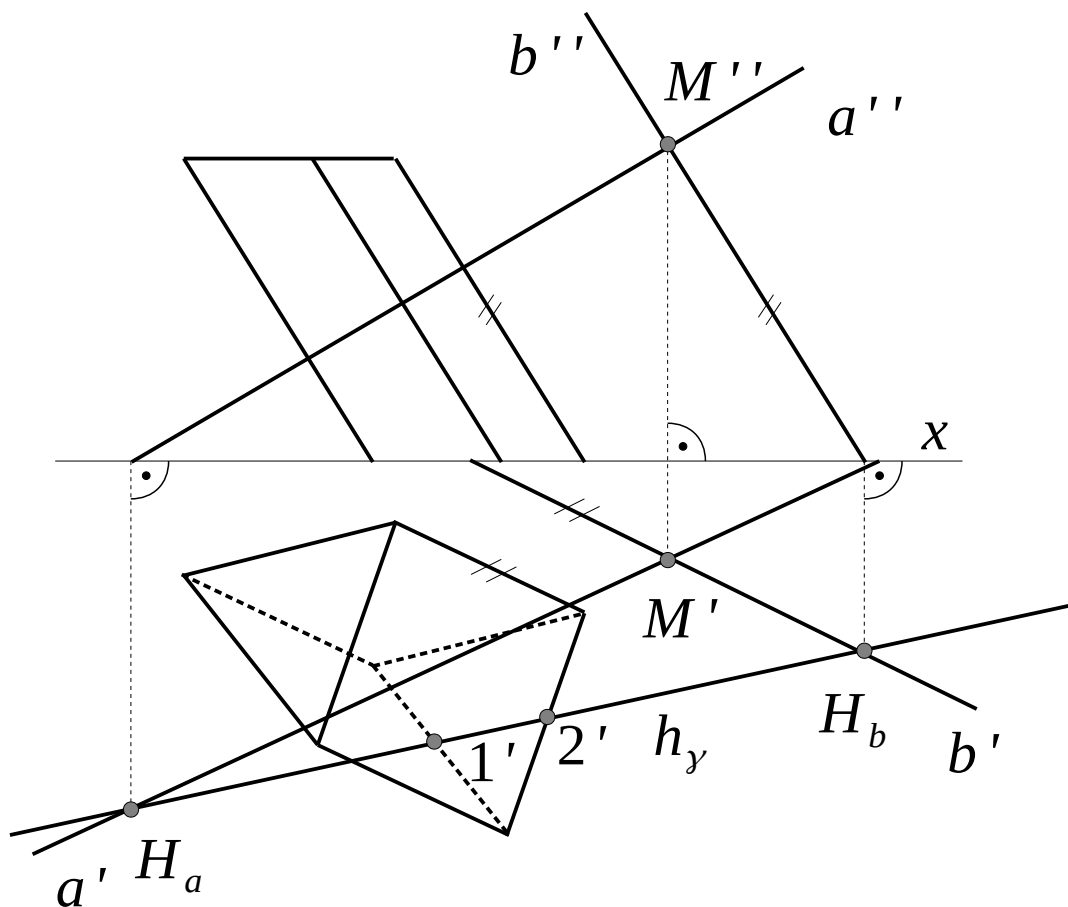
Wyznaczyć punkty przebiecia wielościanu prostą a .



Wyznamy ślad poziomy płaszczyzny utworzonej przez proste a i b .

Przebiecia wielościanów prostą

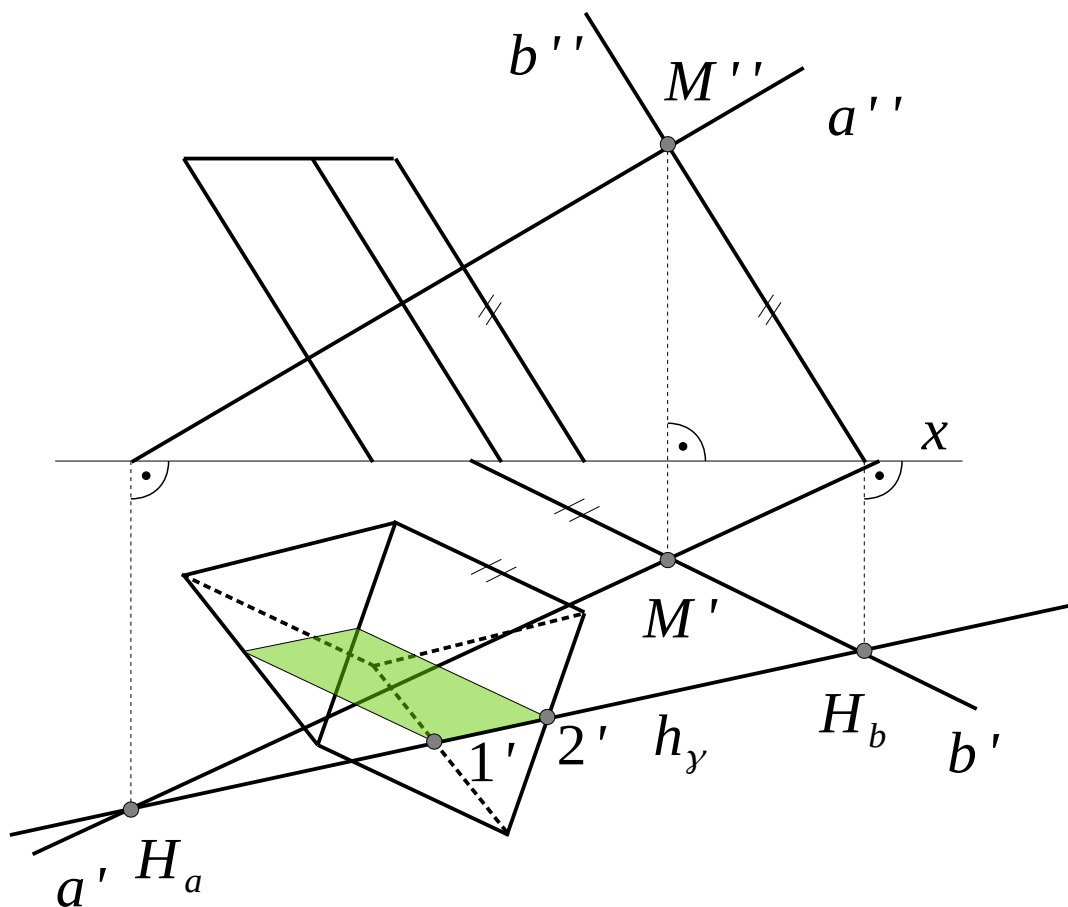
Wyznaczyć punkty przebiecia wielościanu prostą a .



Zaznaczmy punkty, w których ślad przecina rzut podstawy leżący na tej samej rzutni.

Przebiecia wielościanów prostą

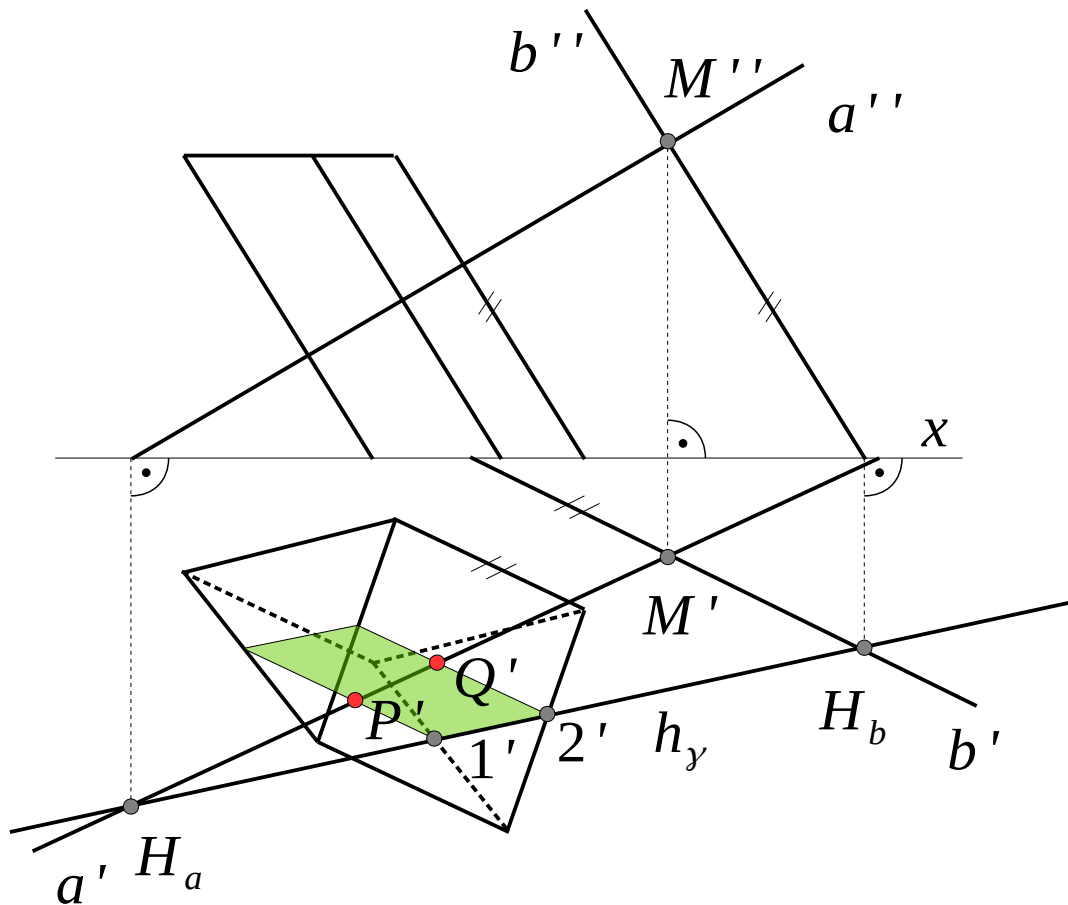
Wyznaczyć punkty przebiecia wielościanu prostą a .



Zaznaczmy przekrój wielościanu płaszczyzną tnącą.

Przebiecia wielościanów prostą

Wyznaczyć punkty przebiecia wielościanu prostą a .

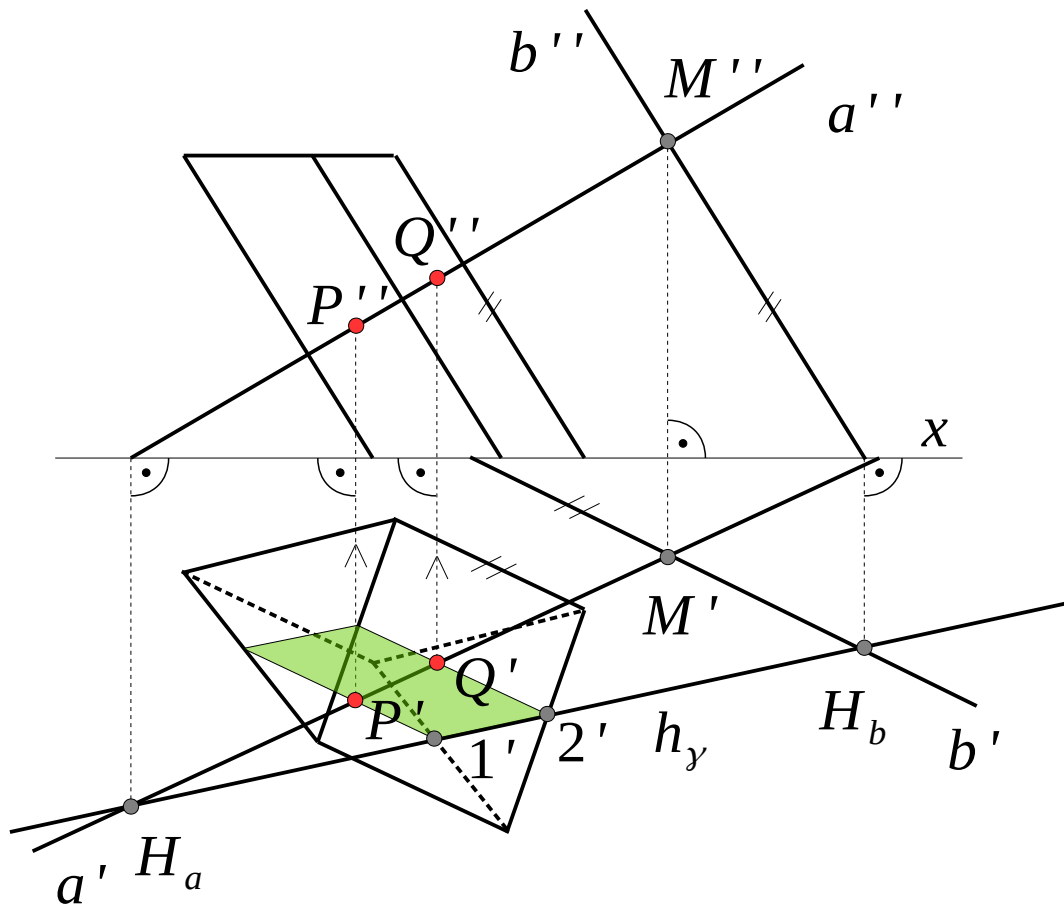


Zaznaczamy punkty, w których prosta wchodzi i wychodzi w zarys figury przekroju.

UWAGA: jeśli nie ma takich punktów to znaczy, że prosta nie przebija wielościanu.

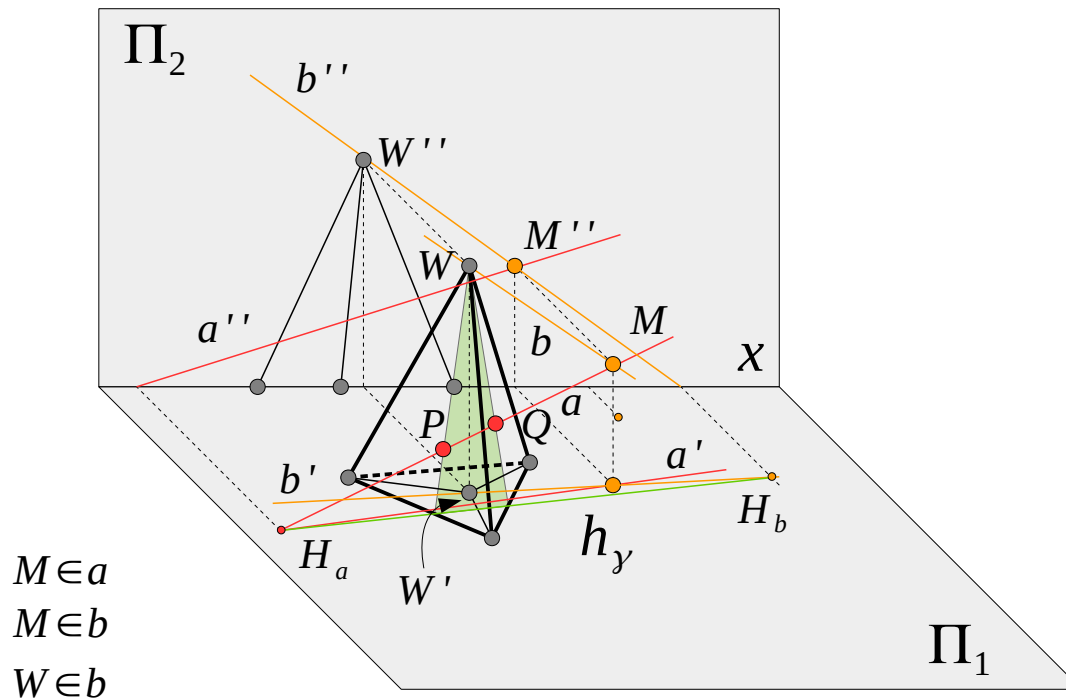
Przebiecia wielościanów prostą

Wyznaczyć punkty przebiecia wielościanu prostą a .



Zaznaczamy drugie rzuty punktów przebiecia wiedząc, że leżą one na prostej przebijającej.

Przebiecia wielościanów prostą



Inna metoda wyznaczenia punktów przebiecia polega na wstawieniu „specjalnej” płaszczyzny.

W przypadku ostrosłupa płaszczyznę, o której mowa wyznacza się na podstawie dwóch prostych:

- prostej przebijającej (tu: a),
- prostej (tu: b) przechodzącej przez wierzchołek i mającej punkt wspólny (tu: M) z prostą przebijającą.

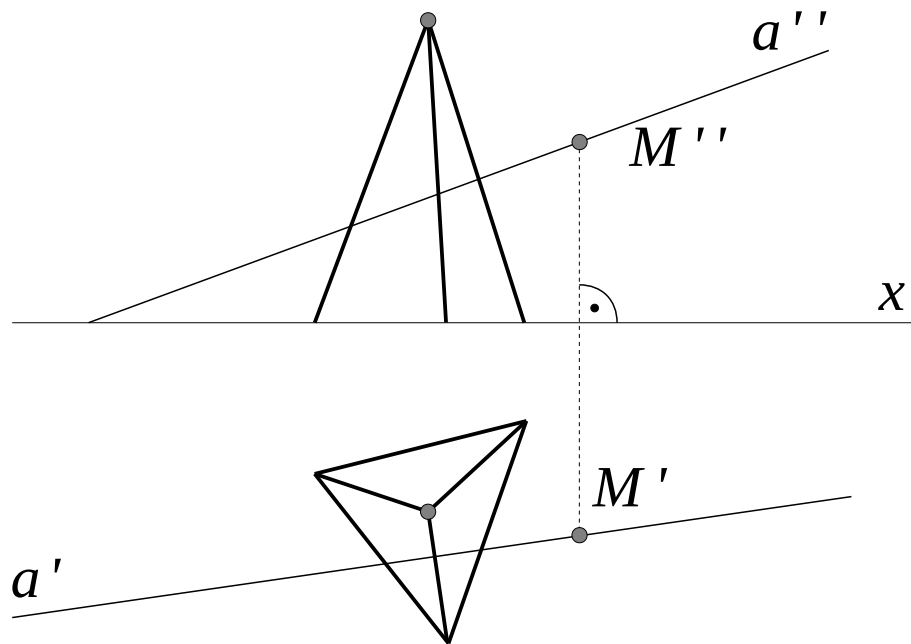
Zauważmy, że przekrojem jest trójkąt łączący podstawę z wierzchołkiem.

Aby nie zaciemniać rysunku, pominięto na nim wiele oznaczeń – nazwy części punktów oraz symbole prostokątności odnoszących.

Przebiecia wielościanów prostą

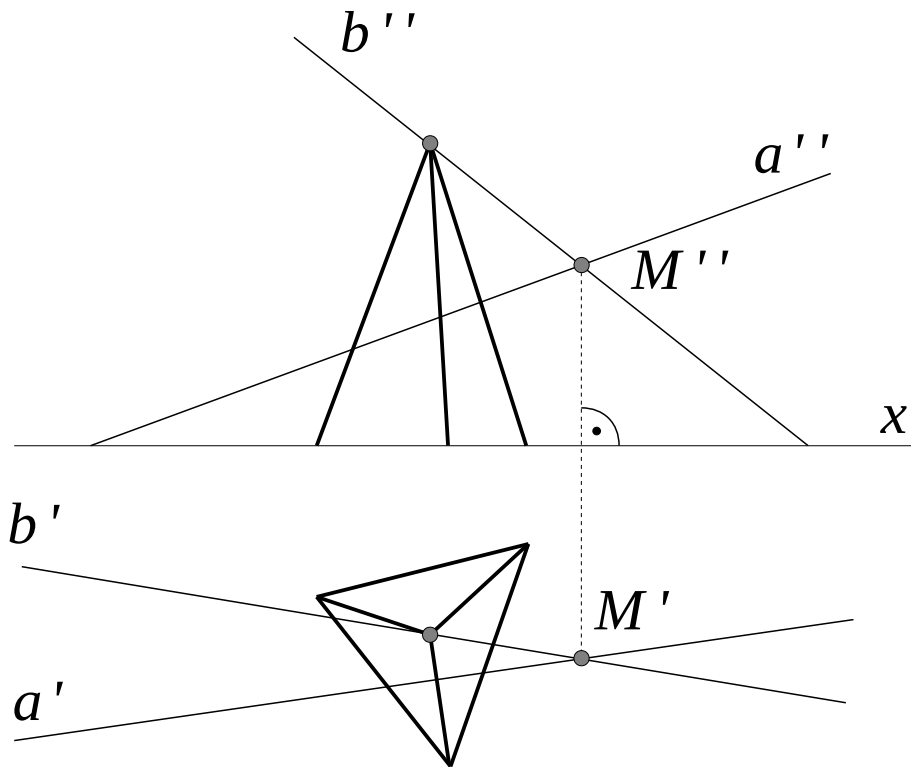
Wyznaczyć punkty przebiecia ostrosłupa prostą a .

Wstawmy dowolny punkt na prostej przebijającej – tu: punkt M .



Przebicia wielościanów prostą

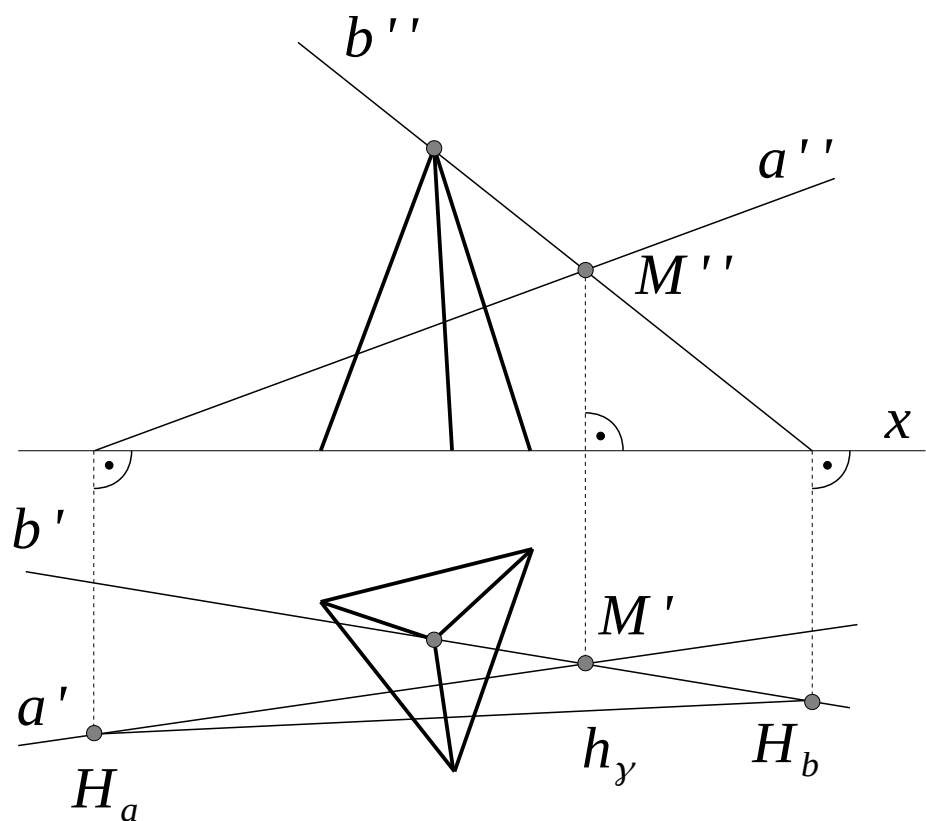
Wyznaczyć punkty przebiecia ostrosłupa prostą a .



Przez punkt M wstawmy prostą przechodzącą przez wierzchołek ostrosłupa.

Przebiecia wielościanów prostą

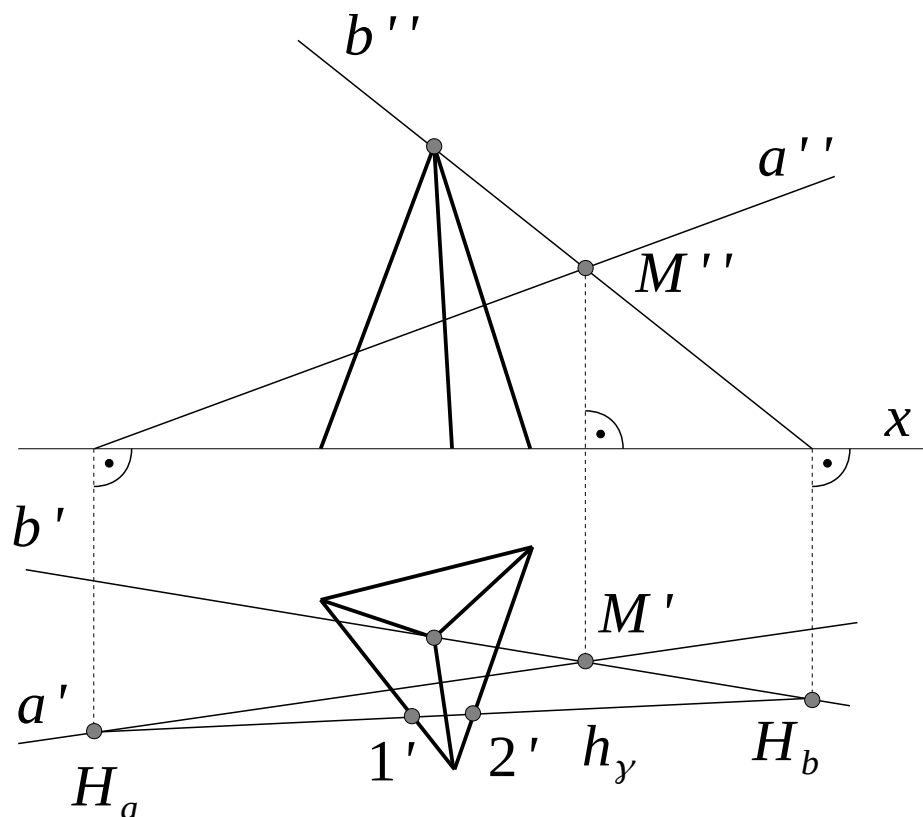
Wyznaczyć punkty przebiecia ostrosłupa prostą a.



Wyznaczmy ślad poziomy płaszczyzny utworzonej przez proste a i b.

Przebiecia wielościanów prostą

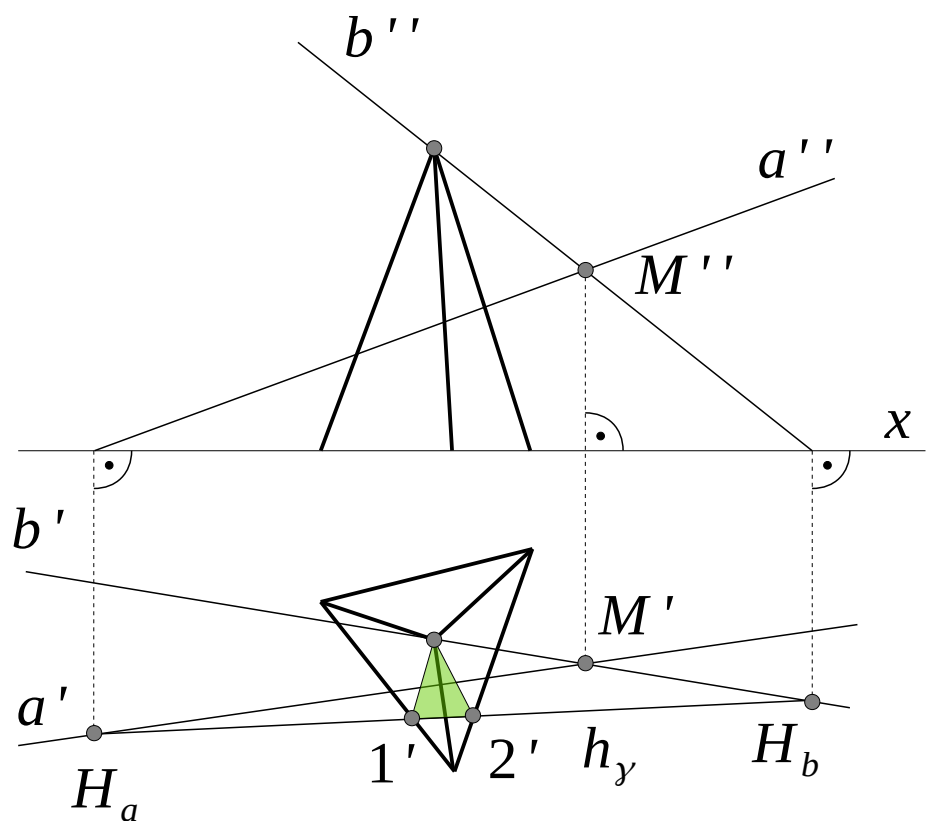
Wyznaczyć punkty przebiecia ostrosłupa prostą a .



Zaznaczmy punkty, w których ślad przecina rzut podstawy leżący na tej samej rzutni.

Przebiecia wielościanów prostą

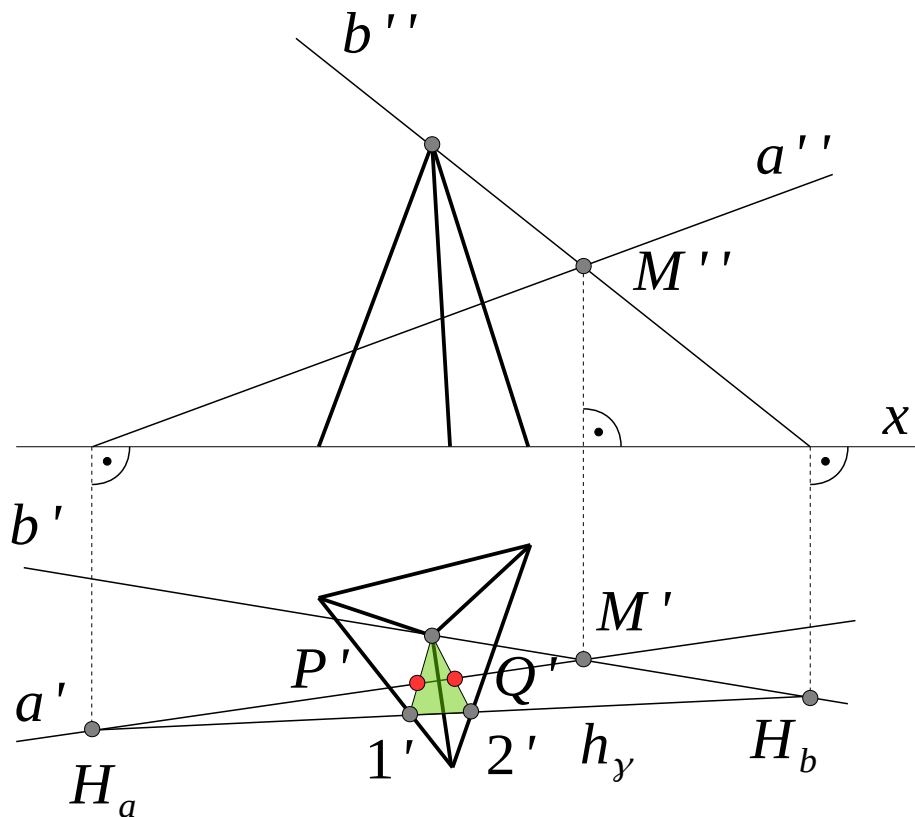
Wyznaczyć punkty przebiecia ostrosłupa prostą a .



Zaznaczmy przekrój wielościanu płaszczyzną tnącą.

Przebiecia wielościanów prostą

Wyznaczyć punkty przebiecia ostrosłupa prostą a .

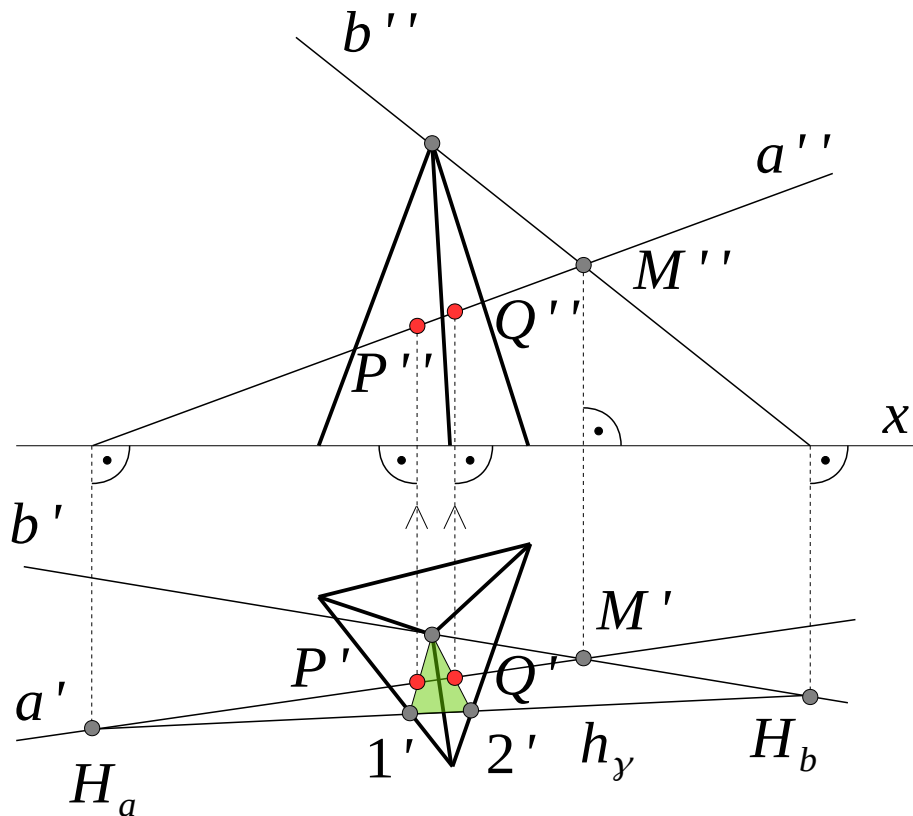


Zaznaczamy punkty, w których prosta wchodzi i wychodzi w zarys figury przekroju.

UWAGA: jeśli nie ma takich punktów to znaczy, że prosta nie przebija wielościanu.

Przebiecia wielościanów prostą

Wyznaczyć punkty przebiecia ostrosłupa prostą a .



Zaznaczamy drugie rzuty punktów przebiecia wiedząc, że leżą one na prostej przebijającej.

Podsumowanie

Zagadnienia:

Rodzaje wielościanów, współczesne zastosowania wielościanów, konstrukcje wielościanów, przekroje wielościanów płaszczyzną, przebicia wielościanów prostą.

UNIVERSITY OF WARMIA AND MAZURY IN OLSZTYN
The Faculty of Technical Sciences
POLAND, 10-957 Olsztyn, M. Oczapowskiego 11
tel.: (48)(89) 5-23-32-40, fax: (48)(89) 5-23-32-55
URL: <http://www.uwm.edu.pl/edu/sobieski/> (in Polish)



Dziękuję za uwagę

Wojciech Sobieski

Olsztyn, 2021