Wydział Nauk Technicznych

UNIVERSITY OF WARMIA AND MAZURY IN OLSZTYN
The Faculty of Technical Sciences
POLAND, 10-957 Olsztyn, M. Oczapowskiego 11
tel.: (48)(89) 5-23-32-40, fax: (48)(89) 5-23-32-55
URL: http://www.uwm.edu.pl/edu/sobieski/ (in Polish)

MECHANIKA PŁYNÓW

Statyka Płynów

Wojciech Sobieski

Olsztyn, 2013-2015

Statyka Płynów

Statyka Płynów – dział Mechaniki Płynów zajmujący się opisem płynów (głównie cieczy) znajdujących się w równowadze względnej w stosunku do otoczenia.

Prawo Pascala

Prawo Pascala (1648) – jeżeli na płyn działają tylko siły powierzchniowe (nie uwzględnia się działania grawitacji), to ciśnienie w każdym punkcie płynu jest takie samo.

$$\sum F_{iz}=0$$ - warunek równowagi

$$F_1 \cdot \cos\alpha_1 - F_2 \cdot \cos\alpha_2 = 0$$

$$\left(p_1 \cdot dA_1\right) \cdot \cos\alpha_1 - \left(p_2 \cdot dA_2\right) \cdot \cos\alpha_2 = 0$$

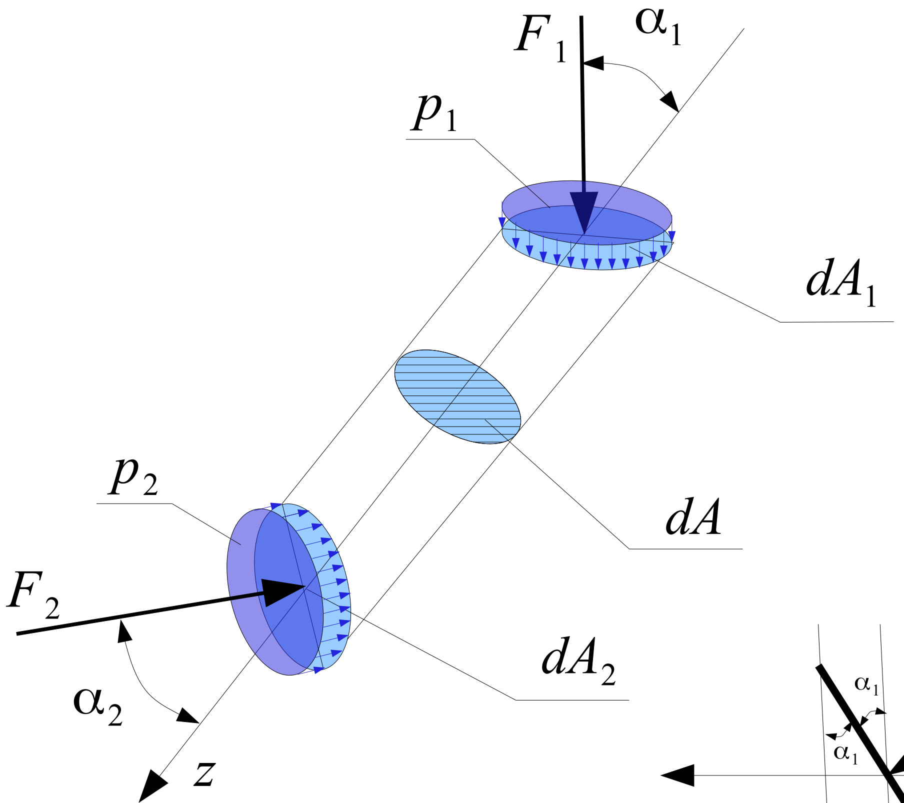
$$dA_1 \cdot \cos\alpha_1 = dA$$

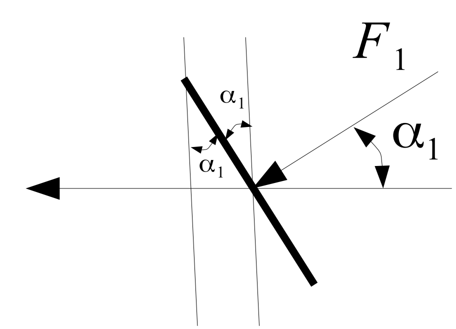
$$dA_2 \cdot \cos\alpha_2 = dA$$

$$p_1 \cdot dA - p_2 \cdot dA = 0$$

$$p_1 - p_2 = 0$$

$$p_1 = p_2 \longrightarrow \boxed{grad(p)=0}$$





Prawo Pascala

nie da się napompować
połowy dętki

rycina przedstawiająca eksperyment Pascala
w Rzymie (1648 – w Polsce rozpoczęło się
powstanie Chmielnickiego)

Prawo Eulera

Prawo Eulera (1755) – ciśnienie działające w dowolnym punkcie nieruchomego płynu nie zależy od orientacji elementu powierzchni przechodzącej przez ten punkt.

$$p_x \cdot dA_x - p \cdot dA \cdot \sin\alpha = 0$$

$$p_y \cdot dA_y - p \cdot dA \cdot \cos\alpha = 0$$

$$dA \cdot \sin\alpha = dA_x$$

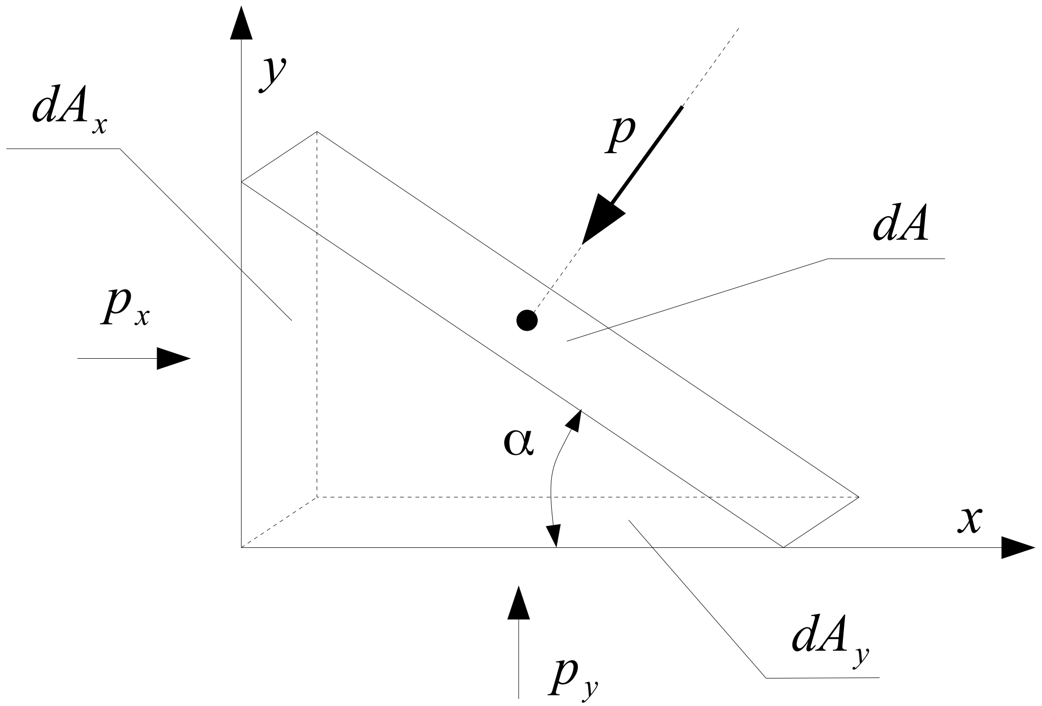
$$dA \cdot \cos\alpha = dA_y$$

$$p_x \cdot dA_x - p \cdot dA_x = 0$$

$$p_y \cdot dA_y - p \cdot dA_y = 0$$

$$p_x = p$$

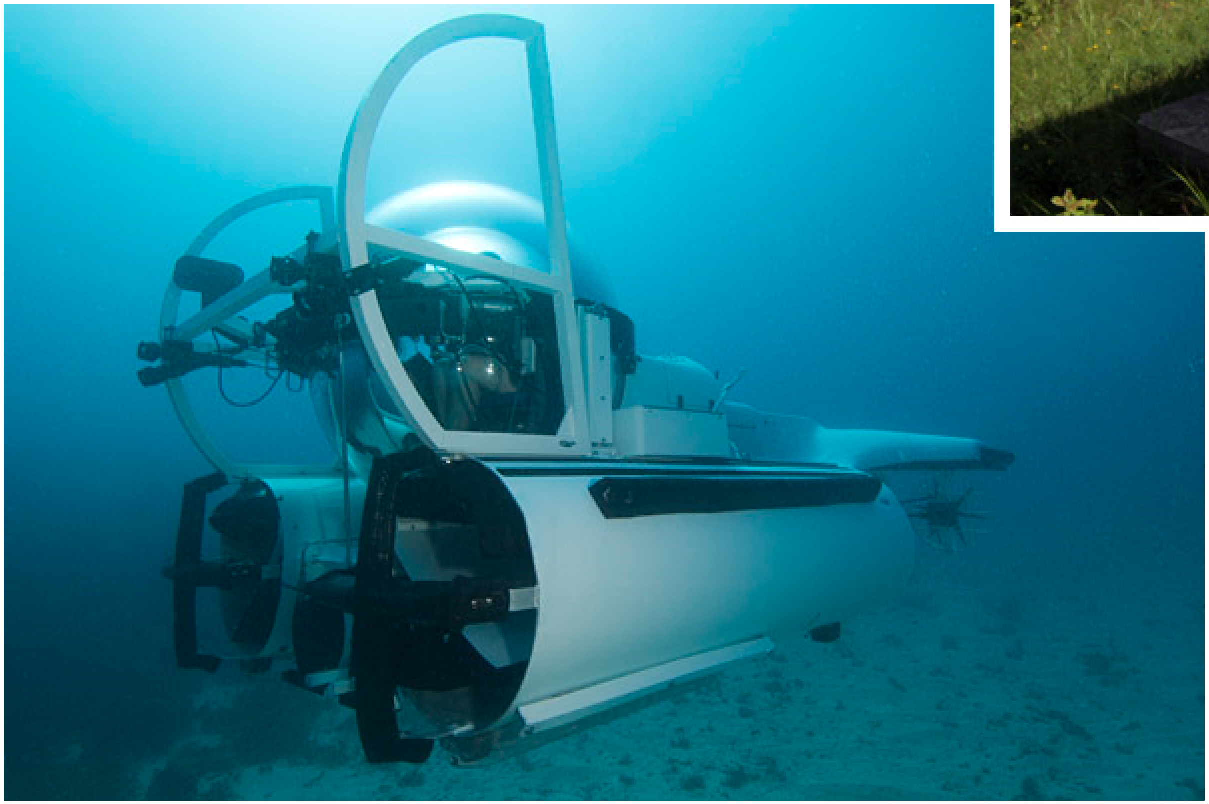
$$p_y = p$$



$$\boxed{p_x = p_y = p_z = p}$$

Prawo Eulera

wszystkie ścianki muszą wytrzymać to same ciśnienie



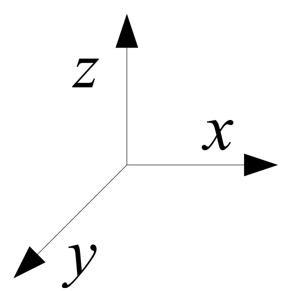
Równanie Hydrostatyki

Równanie hydrostatyki – równanie równowagi cieczy znajdującej się w spoczynku.

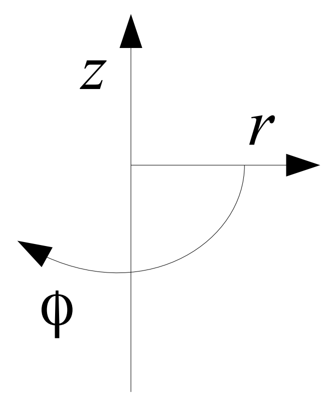
$$\boxed{\vec{F} = \frac{1}{\rho} \cdot grad(p)}$$

$\vec{F}$ - wypadkowa sił masowych [N]
(jeśli nie ma sił to równanie opisuje prawo Pascala)

$$\left.\begin{aligned} F_x &= \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \\ F_y &= \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} \\ F_z &= \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned}\right\}$$



układ kartezjański



układ cylindryczny

$$\left\{\begin{aligned} F_r &= \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial r} \\ F_\phi &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{r \partial \phi} \\ F_z &= \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned}\right.$$

Równanie powierzchni ekwipotencjalnej

Różniczkowe równanie hydrostatyki:

$$F_x \cdot dx + F_y \cdot dy + F_z \cdot dz = \frac{dp}{\rho}$$ - układ kartezjański

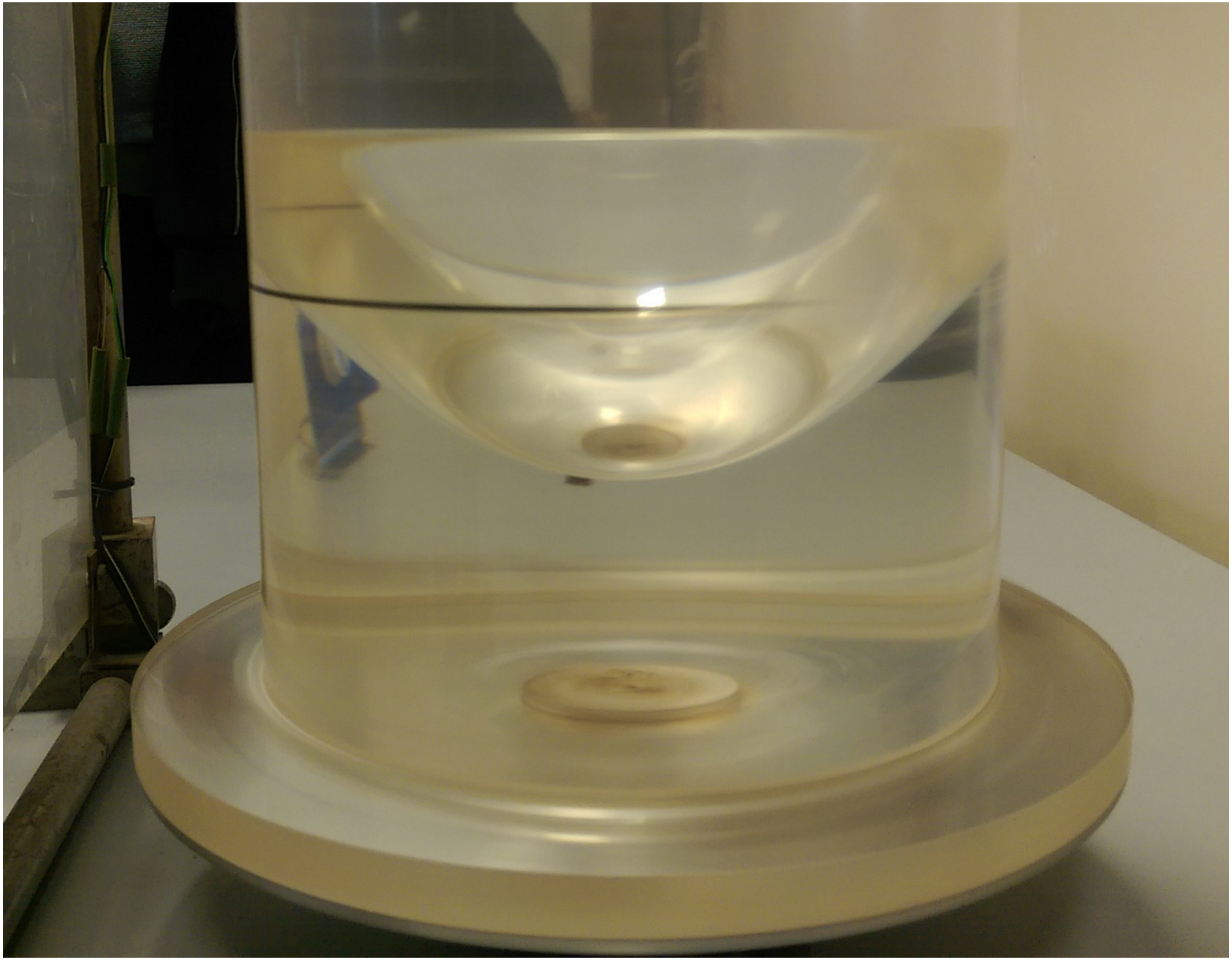
$$F_r \cdot dr + F_\phi \cdot r \cdot d\phi + F_z \cdot dz = \frac{dp}{\rho}$$ - układ cylindryczny

Jeśli *dp = 0* to uzyska się równanie tzw. powierzchni ekwipotencjalnej, czyli takiej na której panuje takie samo ciśnienie:

$$F_x \cdot dx + F_y \cdot dy + F_z \cdot dz = 0$$ - układ kartezjański

$$F_r \cdot dr + F_\phi \cdot r \cdot d\phi + F_z \cdot dz = 0$$ - układ cylindryczny

Równanie powierzchni ekwipotencjalnej



Stanowisko
do badania
równowagi
względnej
w naczyniu
wirującym

Ciśnienie statyczne

Różniczkowe równanie hydrostatyki:

$$F_x \cdot dx + F_y \cdot dy + F_z \cdot dz = \frac{dp}{\rho}$$

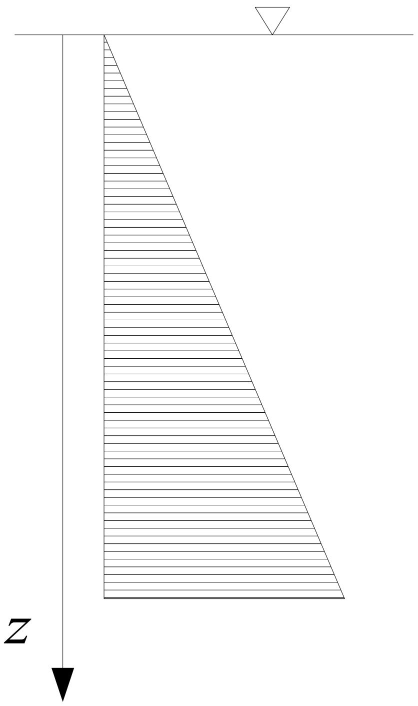
$$\left.\begin{array}{l} F_x = 0 \\ F_y = 0 \\ F_z = g \end{array}\right\}$$ zakładamy działanie grawitacji

$$g \cdot dz = \frac{dp}{\rho}$$

$$\rho \cdot g \cdot dz = dp \qquad / \int$$

$$\rho \cdot g \cdot z + C = p$$ ← gdy $z = 0$ to $p = p_b$

$$\boxed{p = \rho \cdot g \cdot z + p_B}$$ ← wzór na ciśnienie od słupa cieczy



Jednostkowa siła masowa

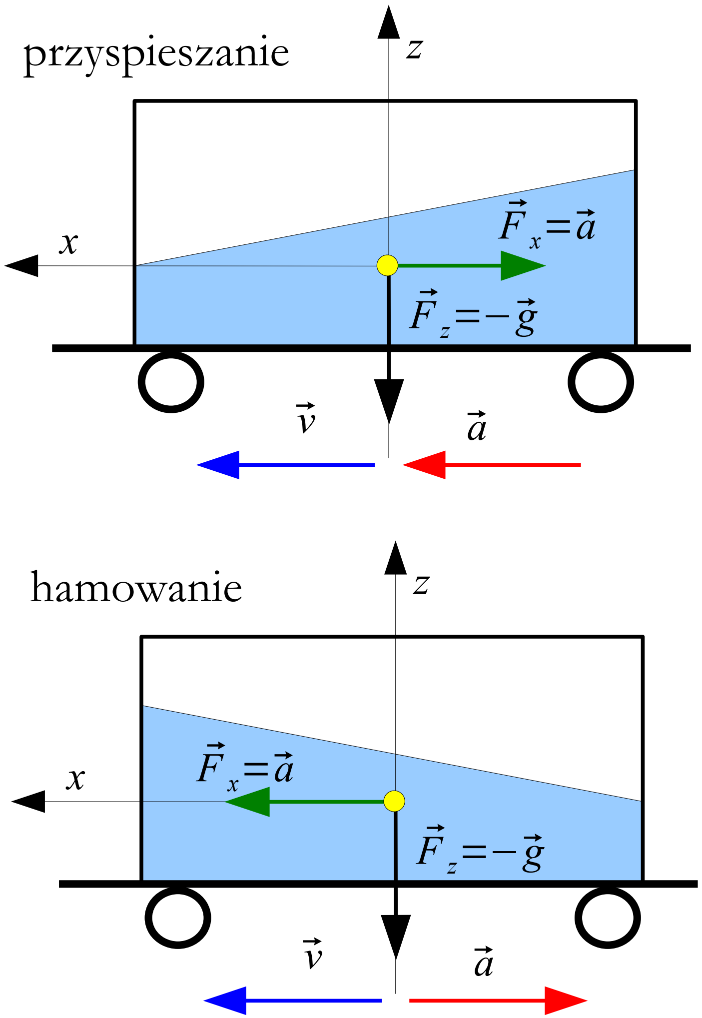
$$F_x \cdot dx + F_y \cdot dy + F_z \cdot dz = 0$$

$$F_x = a \qquad F_y = 0 \qquad F_z = -g$$

Siła masowa – siła bezwładności (wynikająca z prawa d'Alemberta):

$$\vec{F}_b = -m \cdot \vec{a}$$

lub też siła przyciągania grawitacyjnego.



Przyspieszenie grawitacyjne – przyspieszenie ciał wynikające z przyciągania grawitacyjnego.

Jednostkowa siła masowa

Jednostkowa siła masowa – siła działająca na jednostkę masy płynu (najczęściej 1 [kg]).

$$\vec{F}_b = m \cdot \vec{a}$$ - całkowita siła bezwładności $\left[N\right]$

$$\vec{F}_G = m \cdot \vec{g}$$ - całkowity ciężar $\left[N\right]$

$$/m$$

$$\vec{f}_b = \vec{a}$$ - jednostkowa siła bezwładności $\left[\frac{N}{kg}\right]$

$$\vec{f}_g = \vec{g}$$ - jednostkowy ciężar $\left[\frac{N}{kg}\right]$

Do różniczkowego równania hydrostatyki podstawia się siły masowe a nie całkowite.

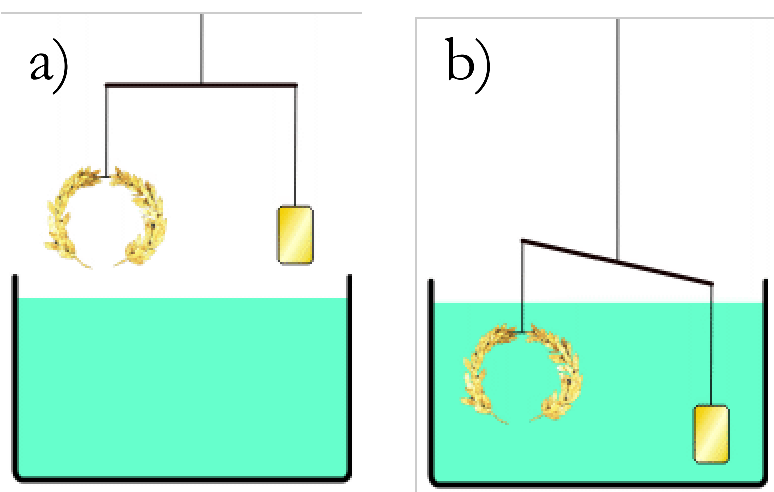
Prawo Archimedesa

Na ciało zanurzone w płynie (cieczy, gazie lub plazmie) działa pionowa, skierowana ku górze siła wyporu. Wartość siły jest równa ciężarowi wypartego płynu. Siła ta jest wypadkową wszystkich sił parcia płynu na ciało. Prawo z III w BC.

$$\boxed{\vec{W} = \rho_{płynu} \cdot g \cdot V_{zanurzone}}$$

$$\rho_{Au} = 19300 \quad \left[\frac{kg}{m^3}\right]$$

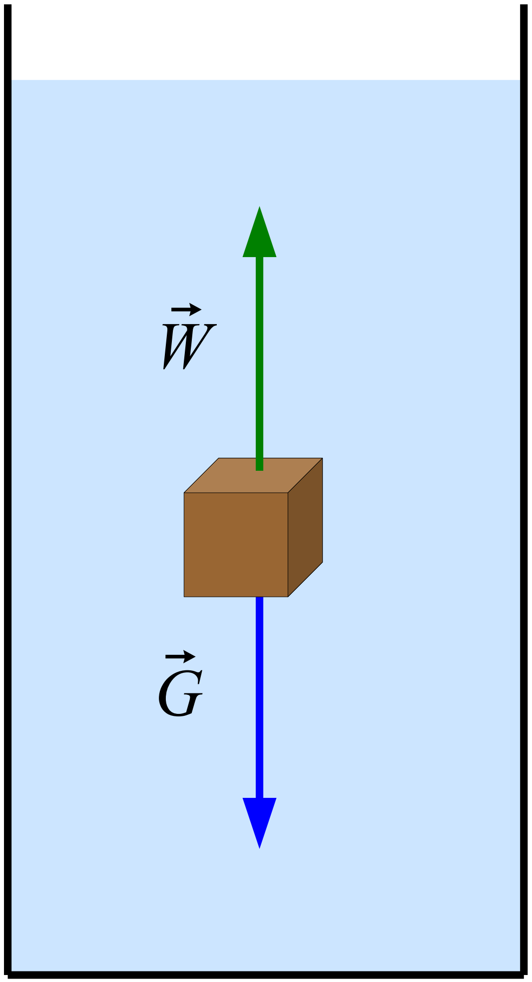
$$\rho_{Pb} = 11340$$



teza: jeśli korona jest zrobiona ze złota, to jej objętość musi być dokładnie taka sama jak objętość bryłki złota o tej samej wadze. Po zanurzeniu do wody, siła wyporu obu obiektów będzie taka sama.

teza odwrotnie: jeśli korona zrobiona jest z ołowiu (który jest lżejszy), to przy takiej samej wadze korony i bryłki złota, objętość korony musi być większa. Po zanurzeniu obu obiektów do wody, korona wyprze większą jej objętość, a co za tym idzie siła wyporu korony będzie większa – pojawi się efekt jak na rys. b).

Prawo Archimedesa



$$\vec{W} = \rho_{płynu} \cdot g \cdot V_{ciała\,w\,płynie} \qquad [N]$$

$$\vec{G} = \rho_{ciała} \cdot g \cdot V_{ciała} \qquad [N]$$

Jeśli ciało jest całkowicie zanurzone w płynie, to siła wypadkowa zależy wyłącznie od gęstości ciał.

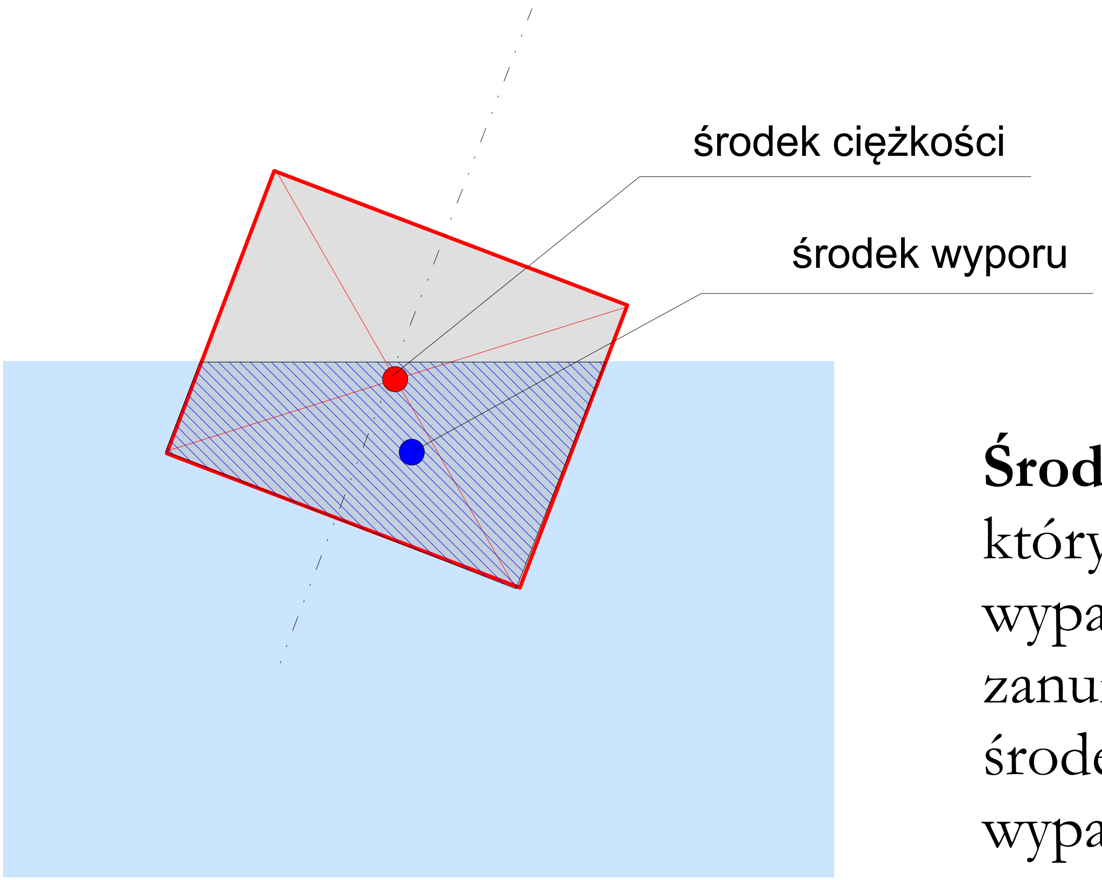
$\rho_{ciała} > \rho_{płynu}$ - ciało tonie

$\rho_{ciała} = \rho_{płynu}$ - ciało unosi się swobodnie

$\rho_{ciała} < \rho_{płynu}$ - ciało wypływa na powierzchnię

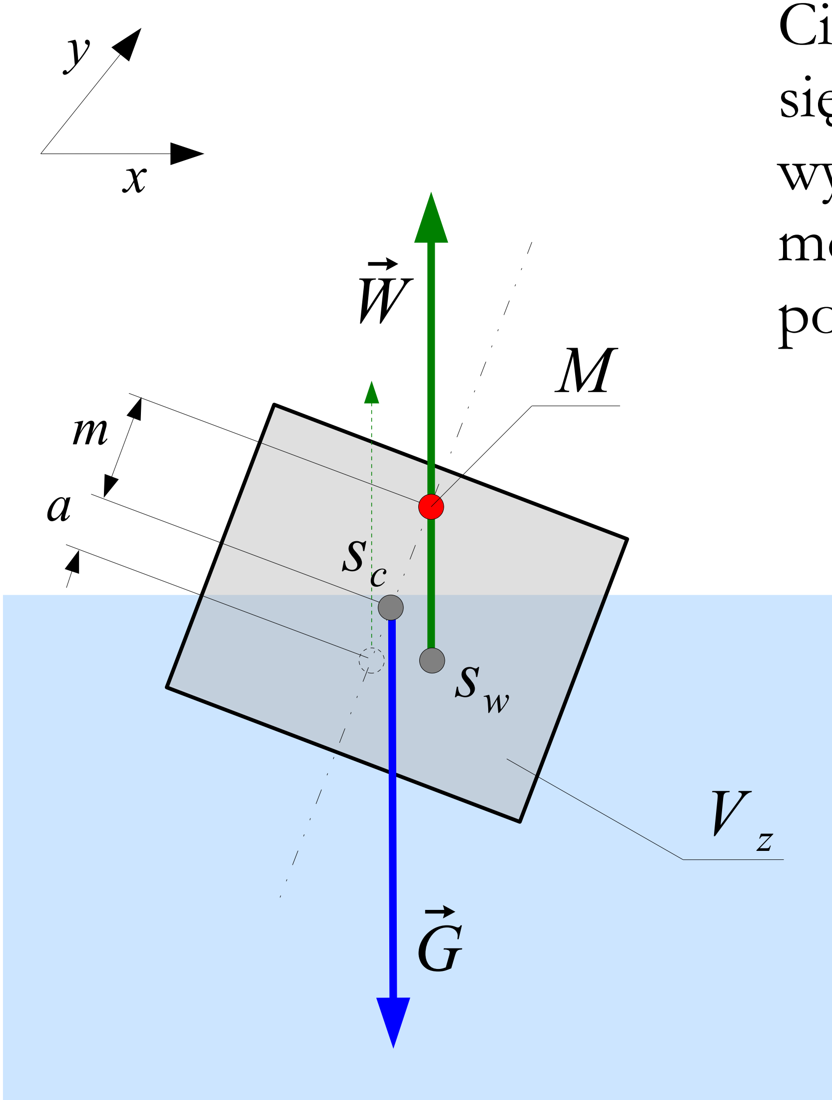
Środek ciężkości i środek wyporu

Środek ciężkości (barycentrum) ciała lub układu ciał jest punktem, w którym przyłożona jest wypadkowa siła ciężkości danego ciała.



Środek wyporu jest punktem, w którym przyłożona jest wypadkowa siła wyporu ciała zanurzonego w płynie. Jest to środek ciężkości objętości płynu wypartej przez to ciało.

Pływalność ciał



Ciało zanurzone w cieczy będzie znajdowało się w stanie równowagi statecznej, jeśli wychylone na skutek działania chwilowego momentu zewnętrznego, powróci do położenia pierwotnego.

$$m_x = \frac{I_x}{V_z} \pm a \qquad m_y = \frac{I_y}{V_z} \pm a$$

M - metacentrum

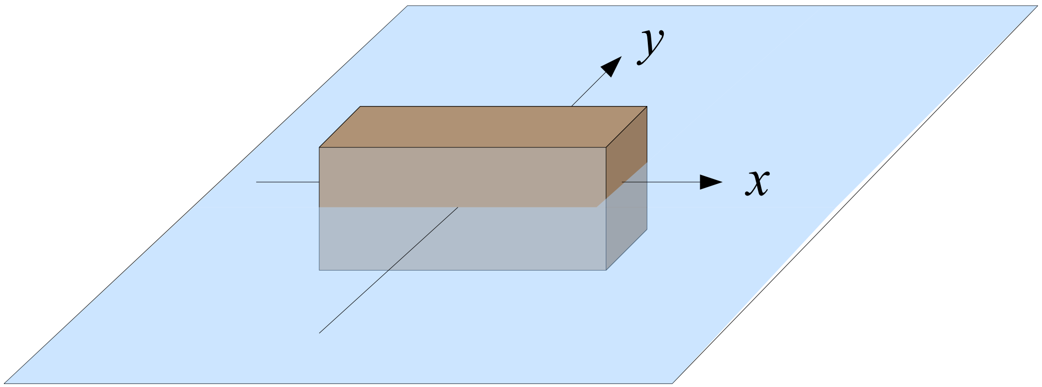
m_x - wysokość metacentryczna

I_x, I_y - momenty bezwładności względem osi leżących na powierzchni cieczy

V_z - objętość zanurzonej części ciała

a - odległość między środkiem ciężkości a środkiem wyporu ciała w równowadze („-” gdy $\mathbf{s_c}$ jest wyżej niż $\mathbf{s_w}$)

Pływalność ciał



W przypadku ciała całkowicie zanurzonego, dla zapewnienia równowagi trwałej konieczne jest umieszczenie środka wyporu powyżej środka ciężkości.

Ciało częściowo zanurzone może znajdować się w równowadze trwałej, nawet jeśli środek ciężkości znajduje się powyżej środka wyporu.

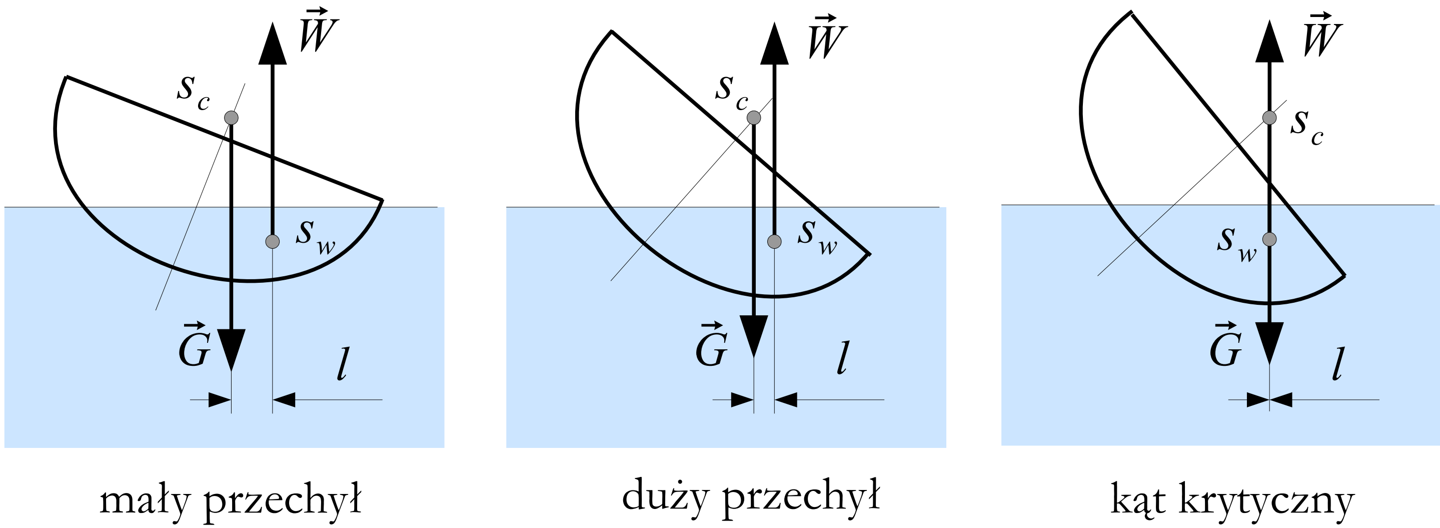
$$\boxed{\left.\begin{aligned} m_x &= \frac{I_x}{V_z} \pm a \\ m_y &= \frac{I_y}{V_z} \pm a \end{aligned}\right\} \quad m = min(m_x, m_y)} \longrightarrow$$

$m > 0$ - równowaga stała

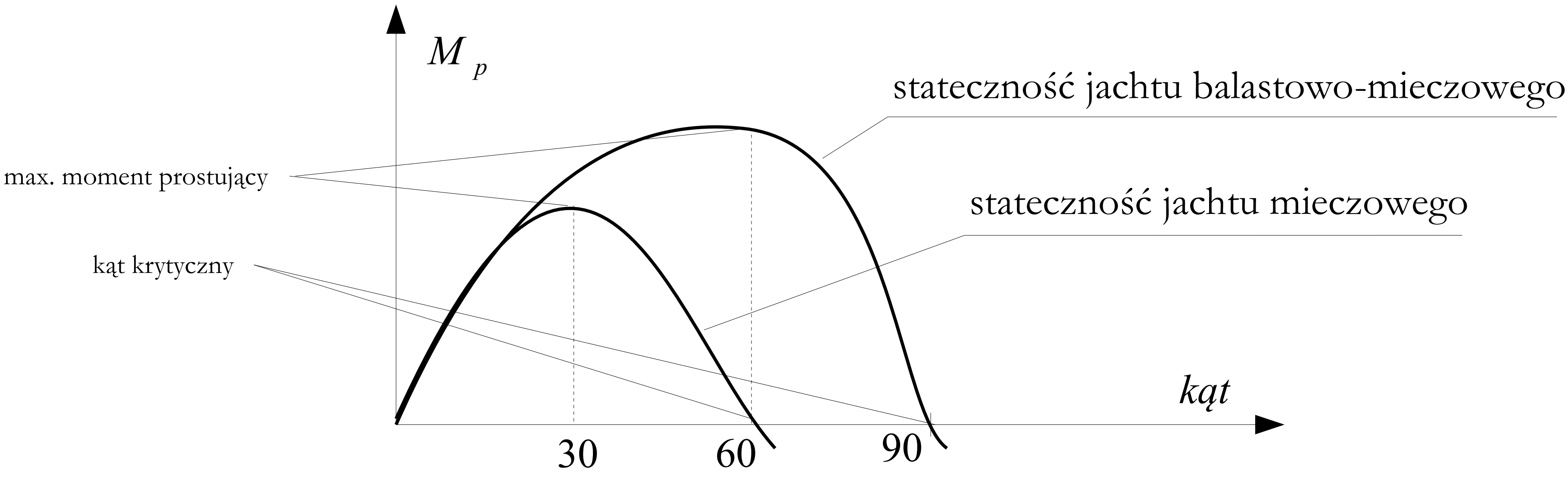
$m = 0$ - równowaga obojętna

$m < 0$ - równowaga chwiejna

Pływalność ciał



l - ramię momentu prostującego M_p



Pływalność ciał

jacht morski w przechyle

Napór hydrostatyczny

Napór hydrostatyczny (parcie) – siła wywierana przez nieruchomą ciecz na ograniczające ją ścianki.

$$N = p_c \cdot A$$

p_c - ciśnienie panujące w środku ciężkości ściany $[Pa]$

A - pole powierzchni ściany $[m^2]$

$$p_c = p_z \pm p_w$$

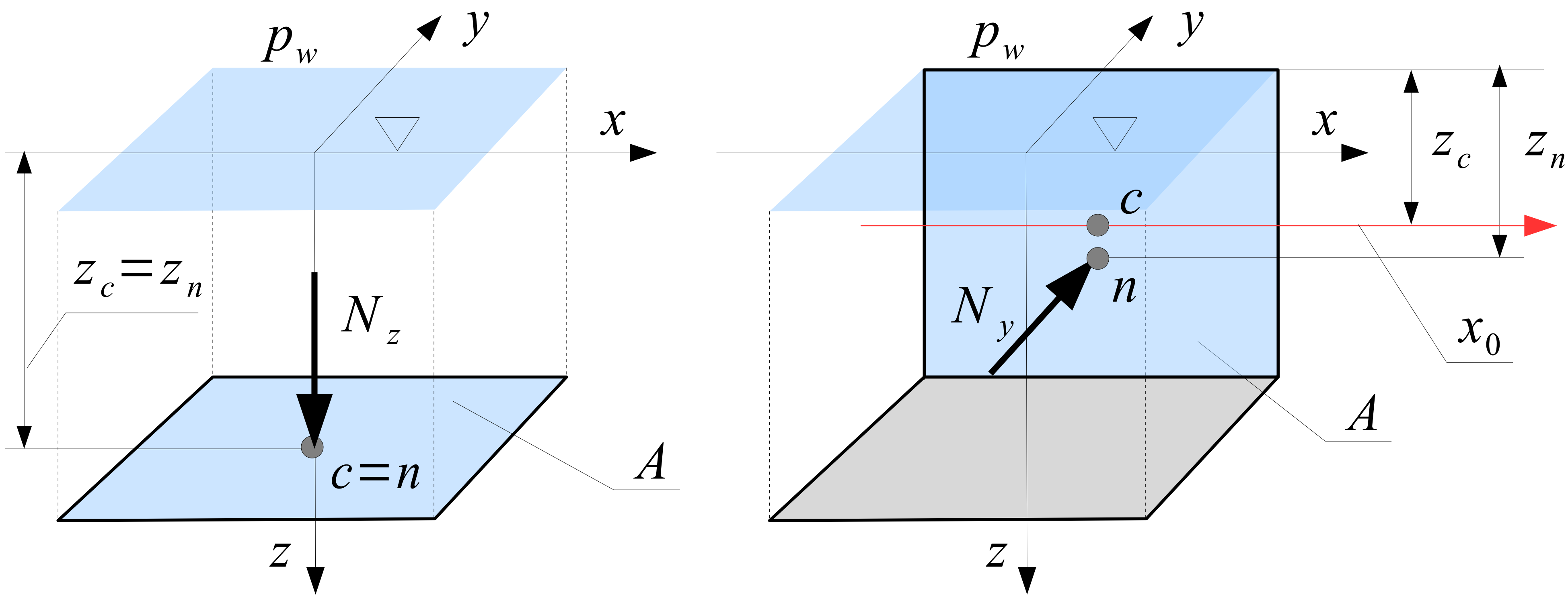
p_z - ciśnienie wywierane przez słup cieczy liczony od lustra cieczy do środka ciężkości ściany $[Pa]$

p_w - ciśnienie względne (nadciśnienie, podciśnienie) panujące nad lustrem cieczy $[Pa]$

$$\boxed{N = (p_z \pm p_w) \cdot A}$$

Wartość siły naporu **N** działającej na ściankę **A**, z uwzględnieniem ciśnienia panującego nad lustrem cieczy.

Napór hydrostatyczny



$$N_z = \left(\rho \cdot g \cdot z \pm p_w\right) \cdot A$$

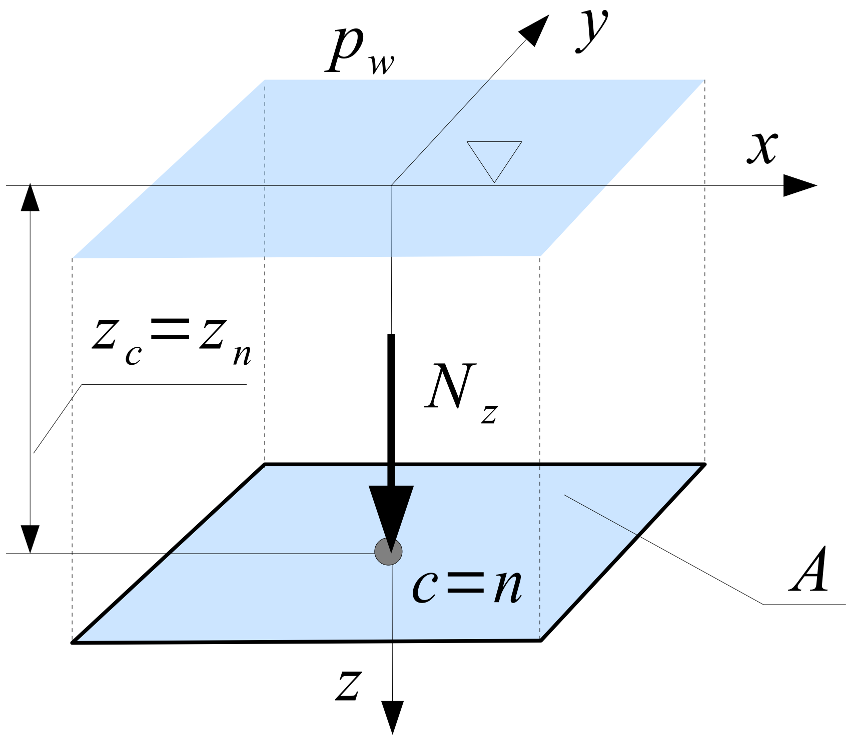
$$N_y = \left(\rho \cdot g \cdot z_c \pm p_w\right) \cdot A$$

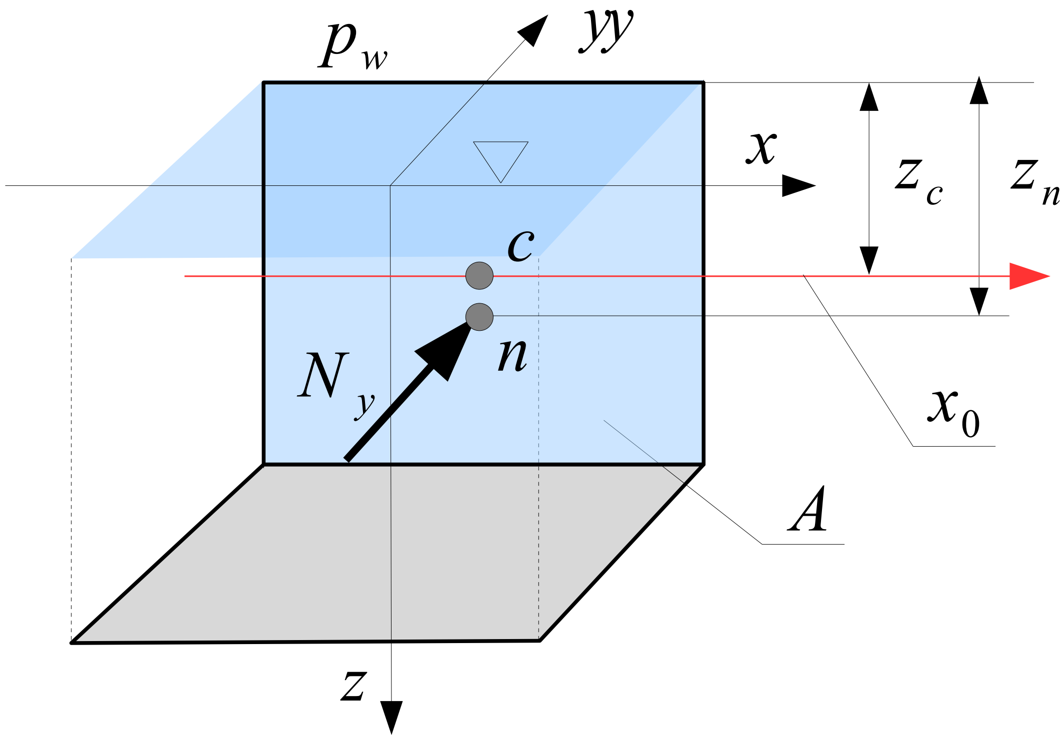
$$z_c = z_n = z$$

c – geometryczny środek ściany (środek ciężkości), na którą działa ciśnienie

n – miejsce, w którym działa wypadkowa siła naporu; dla ścianek innych niż poziome punkt **n** jest zawsze niżej niż punkt **c**.

Punkt przyłożenia siły naporu



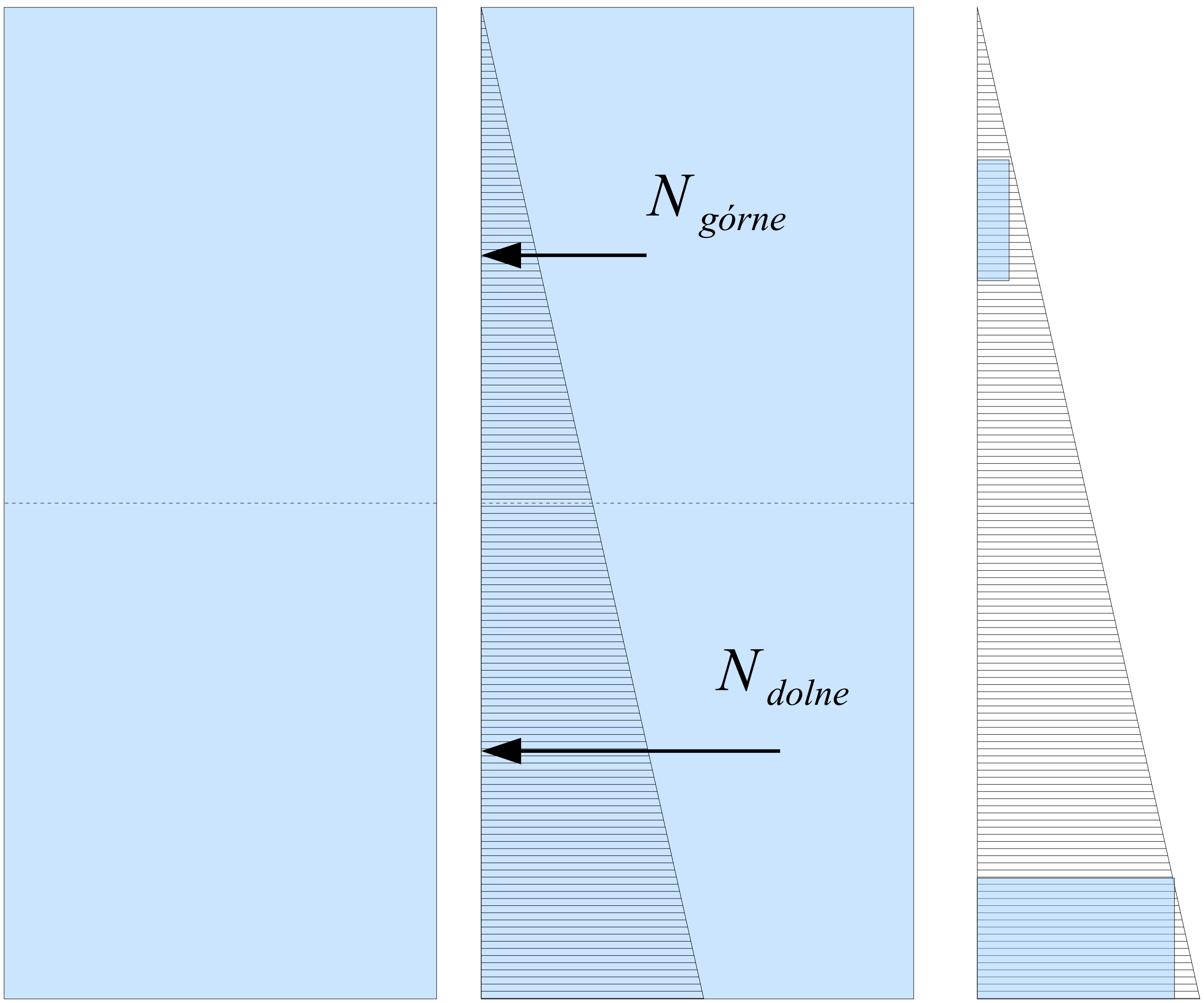


$$\boxed{z_n = z_c = z}$$

$$\boxed{z_n = z_c + \frac{I_{x_0}}{A \cdot z_c}}$$

I_{x_0} - moment bezwładności liczony względem osi przechodzącej przez środek ciężkości ściany

Punkt przyłożenia siły naporu



wpływ ciśnienia,
a także wartość
przesunięcia, maleje
wraz z głębokością

Napór jako ciężar „bryły ciekłej”

Napór poziomy:

$$N_y = \left(\rho \cdot g \cdot z_c + p_b\right) \cdot A$$

Napór pionowy:

$$N_z = \left(\rho \cdot g \cdot z_c + p_b\right) \cdot A$$

Załóżmy, że nad lustrem cieczy panuje ciśnienie atmosferyczne,
które w dalszej części nie będzie brane pod uwagę – wówczas:

$$N_y = \rho \cdot g \cdot z_c \cdot A$$

$$N_y = \rho \cdot g \cdot V_{\text{bryły ciekłej nad środkiem ciężkości}}$$

$$N_y = m_{\text{bryły ciekłej nad środkiem ciężkości}} \cdot g$$

$$N_y = G_{\text{bryły ciekłej nad środkiem ciężkości}}$$

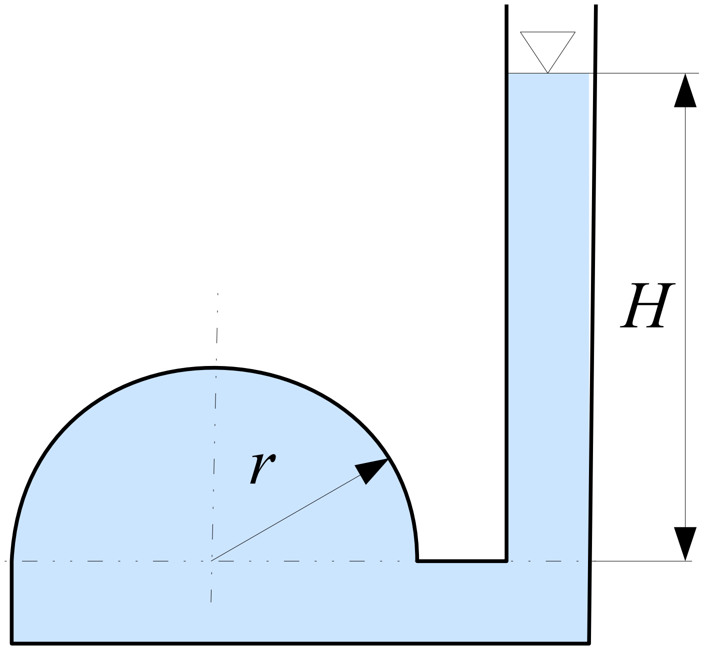
$$N_z = \rho \cdot g \cdot z_c \cdot A$$

$$N_z = \rho \cdot g \cdot V_{\text{bryły ciekłej nad ścianką}}$$

$$N_z = m_{\text{bryły ciekłej nad ścianką}} \cdot g$$

$$N_z = G_{\text{bryły ciekłej nad ścianką}}$$

Napór jako ciężar „bryły ciekłej”



$$N_z = \rho \cdot g \cdot V_{ponad\ powierzchnią\ ściany}$$

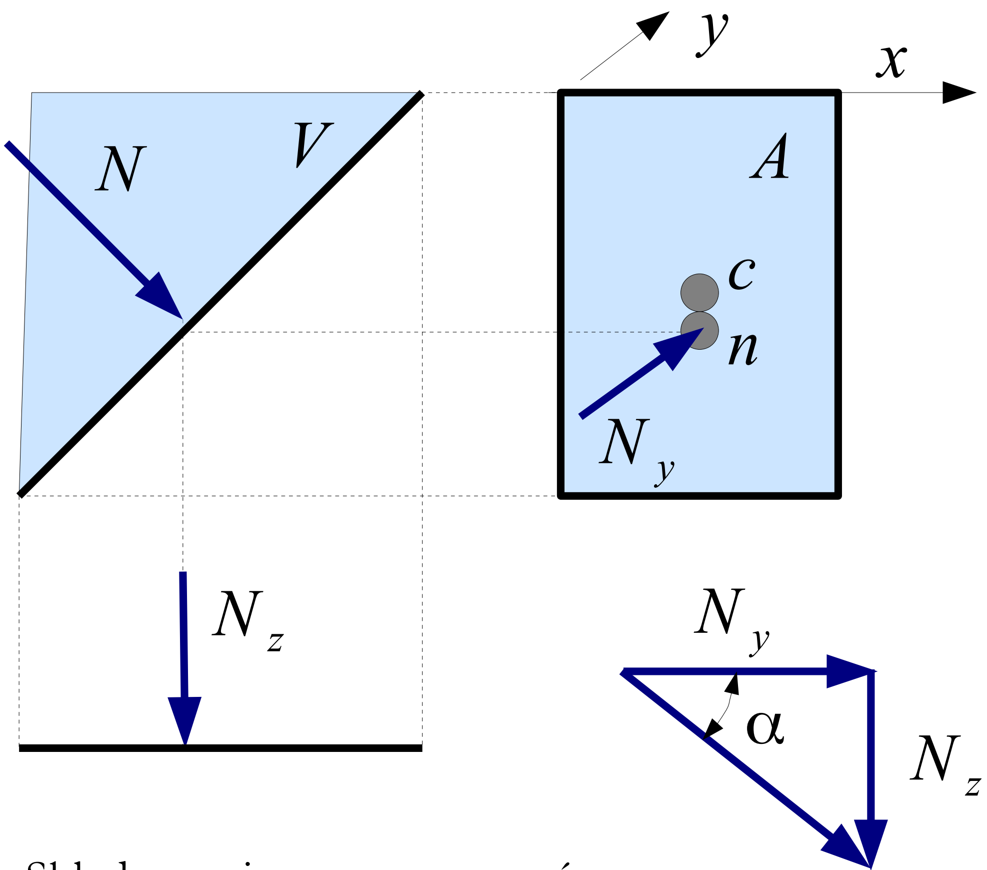
$$N_z = \rho \cdot g \cdot \left[V_{walca} - V_{półkuli} \right]$$

$$N_z = \rho \cdot g \cdot \left[\Pi \cdot r^2 \cdot H - \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \Pi \cdot r^3 \right]$$

$$N_z = \rho \cdot g \cdot \left[\Pi \cdot r^2 \cdot \left(H - \frac{2}{3} \cdot r \right) \right]$$

Składowa pionowa naporu równa się ciężarowi „bryły ciekłej” zawartej między rozpatrywaną powierzchnią a lustrem cieczy.

Całkowita siła naporu



Składowa pozioma naporu równa jest parciu wywieranemu na rzut powierzchni na płaszczyznę prostopadłą do rozpatrywanego kierunku.

Siła wypadkowa:

$$\boxed{N=\sqrt{(N_y^2+N_z^2)}}$$

Kąt działania siły wypadkowej:

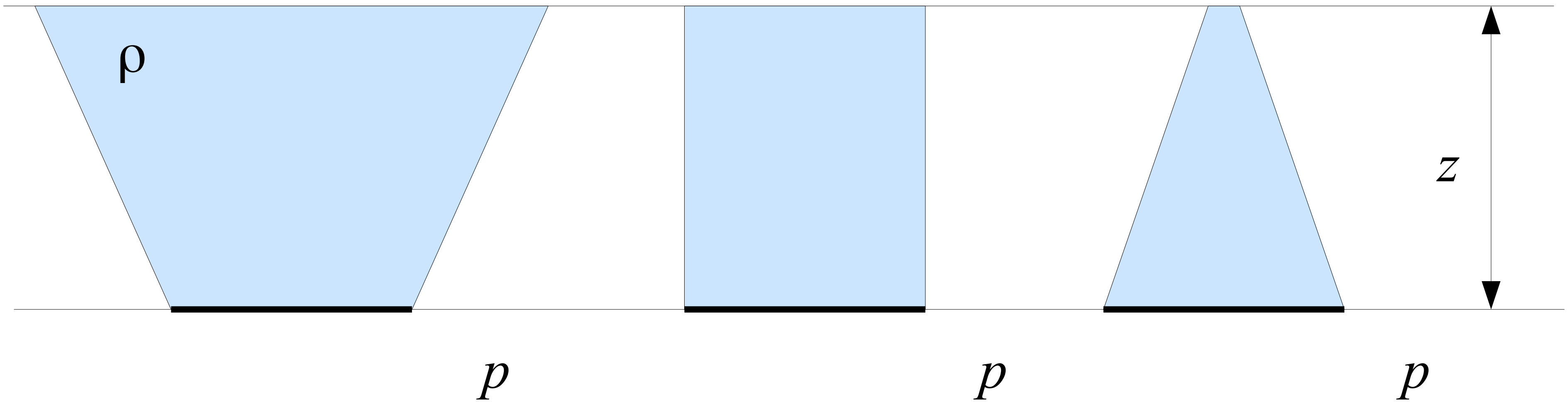
$$\boxed{\alpha = arctg\frac{N_z}{N_y}}$$

Składowa pionowa naporu równa się ciężarowi „bryły ciekłej” zawartej między rozpatrywaną powierzchnią a lustrem cieczy.

Przykłady konstrukcji uwzględniających napór

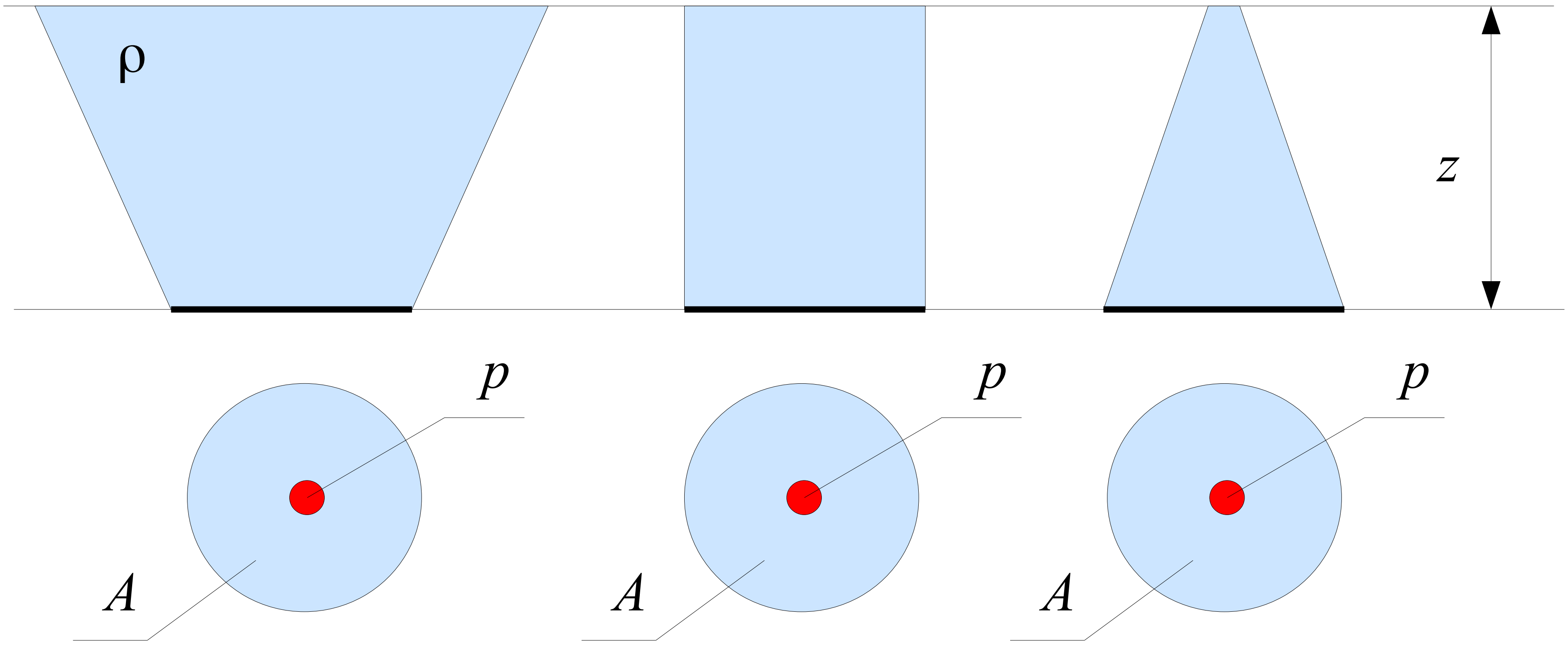
Paradoks hydrostatyczny

Twierdzenie Stevina (paradoks hydrostatyczny) – napór na dno naczynia zależy wyłącznie od pola powierzchni dna, ciężaru właściwego cieczy oraz wysokość słupa cieczy w tym naczyniu



Paradoks hydrostatyczny

Twierdzenie Stevina (paradoks hydrostatyczny) – napór na dno naczynia zależy wyłącznie od pola powierzchni dna, ciężaru właściwego cieczy oraz wysokość słupa cieczy w tym naczyniu



Paradoks hydrostatyczny

$F_x = 0 \qquad F_y = 0 \qquad F_z = g$

$$F_x \cdot dx + F_y \cdot dy + F_z \cdot dz = \frac{dp}{\rho} \qquad / \cdot \rho$$

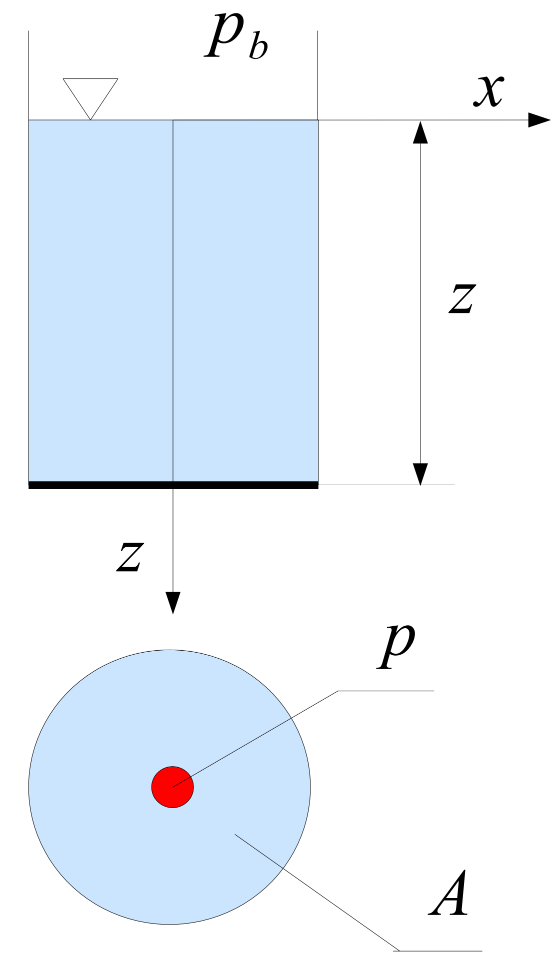
$$\rho \cdot g \cdot dz = dp \qquad / \int$$

$$\rho \cdot g \cdot z + C = p$$

$$\left.\begin{matrix} z = 0 \\ p = p_b \end{matrix}\right\} C = p_b$$

$$\boxed{p = \rho \cdot g \cdot z + p_b}$$

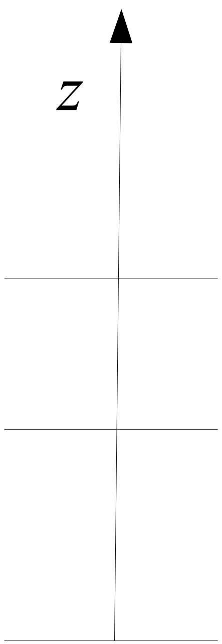
$$N_z = \left(\rho \cdot g \cdot z + p_b \right) \cdot A$$



dla $z = const.$ oraz $A = const.$ $\longrightarrow$ $N_z = const.$

Wzór barometryczny

Wzór barometryczny – wzór określający zależność między wysokością w polu grawitacyjnym, liczoną od poziomu odniesienia, a ciśnieniem atmosferycznym.



$$p_2 = -\rho \cdot g \cdot z_2$$

$$p_1 = -\rho \cdot g \cdot z_1$$

$$dp = p_2 - p_1 = -\rho \cdot g \cdot z_2 + \rho \cdot g \cdot z_1$$

$$dp = \rho \cdot g \cdot z_1 - \rho \cdot g \cdot z_2$$

$$dp = \rho \cdot g \cdot (z_1 - z_2)$$

$$dp = -\rho \cdot g \cdot dz$$

„minus” bo $z_2 > z_1$

gęstość nie jest stała

Wzór barometryczny

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T$$

równanie stanu gazu doskonałego

$$p = \frac{n}{V} \cdot R \cdot T \qquad n = \frac{m}{M}$$

$$p = \frac{m}{V} \cdot \frac{R \cdot T}{M} = \rho \cdot \frac{R \cdot T}{M}$$

$$\rho = \frac{p \cdot M}{R \cdot T}$$

$$dp = -\rho \cdot g \cdot dz$$

$$dp = -p \cdot \frac{M \cdot g}{R \cdot T} \cdot dz$$

p - ciśnienie bezwzględne $\left[Pa\right]$

V - objętość $\left[m^3\right]$

R - uniwersalna stała gazowa $\left[\frac{J}{mol \cdot K}\right]$

T - temperatura bezwzględna $\left[K\right]$

n - liczba moli $\left[mol\right]$

m - masa całkowita $\left[kg\right]$

M - masa cząsteczkowa $\left[\frac{kg}{mol}\right]$

Wzór barometryczny

$$\frac{dp}{p} = -\frac{M \cdot g}{R \cdot T} \cdot dz \qquad / \int$$

$$\int \frac{1}{p} dp = -\frac{M \cdot g}{R \cdot T} \cdot \int dz \quad \longleftarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} T = const. \\ g = const. \end{array} \right.$$

$$\ln p + \ln C = -\frac{M \cdot g \cdot z}{R \cdot T}$$

$$\ln(C \cdot p) = -\frac{M \cdot g \cdot z}{R \cdot T}$$

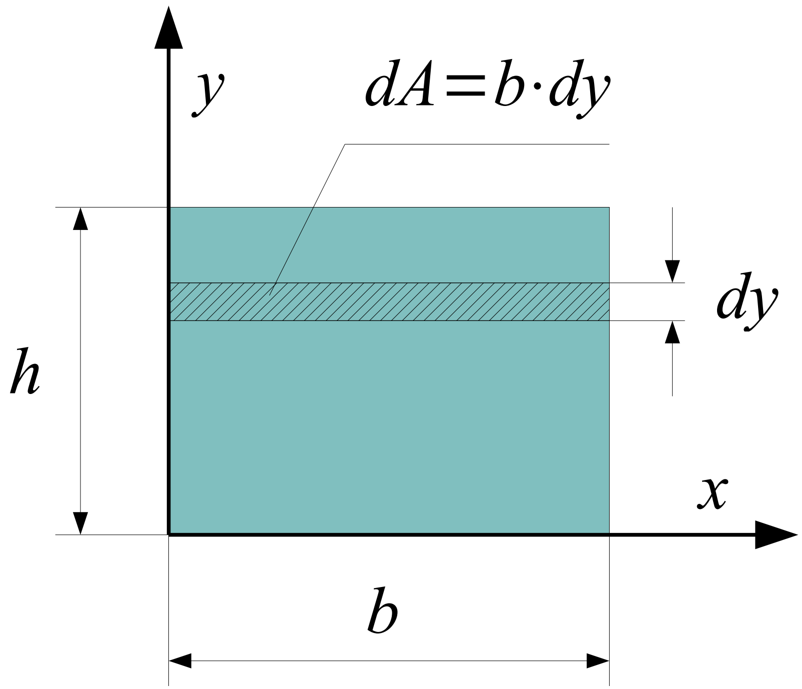
$$C \cdot p = e^{-\frac{M \cdot g \cdot z}{R \cdot T}}$$

$$p = C \cdot e^{-\frac{M \cdot g \cdot z}{R \cdot T}}$$

gdy $z = 0$ to $p = p_0$

$$\boxed{p = p_0 \cdot e^{-\frac{M \cdot g \cdot z}{R \cdot T}}}$$

Moment statyczny i moment bezwładności



$$\boxed{S_x = \int_A y\, dA =} \int_0^h y \cdot b \cdot dy = b \cdot \int_0^h y \cdot dy$$

$$S_x = b \cdot \frac{1}{2} \cdot y^2 \Big|_0^h = b \cdot \frac{1}{2} \cdot h^2 - b \cdot \frac{1}{2} \cdot 0^2$$

$$S_x = \frac{b \cdot h^2}{2}$$

$$\boxed{I_x = \int_A y^2\, dA =} \int_0^h y^2 \cdot b \cdot dy = b \cdot \int_0^h y^2 \cdot dy$$

$$I_x = b \cdot \frac{1}{3} \cdot y^3 \Big|_0^h = b \cdot \frac{1}{3} \cdot h^3 - b \cdot \frac{1}{3} \cdot 0^2$$

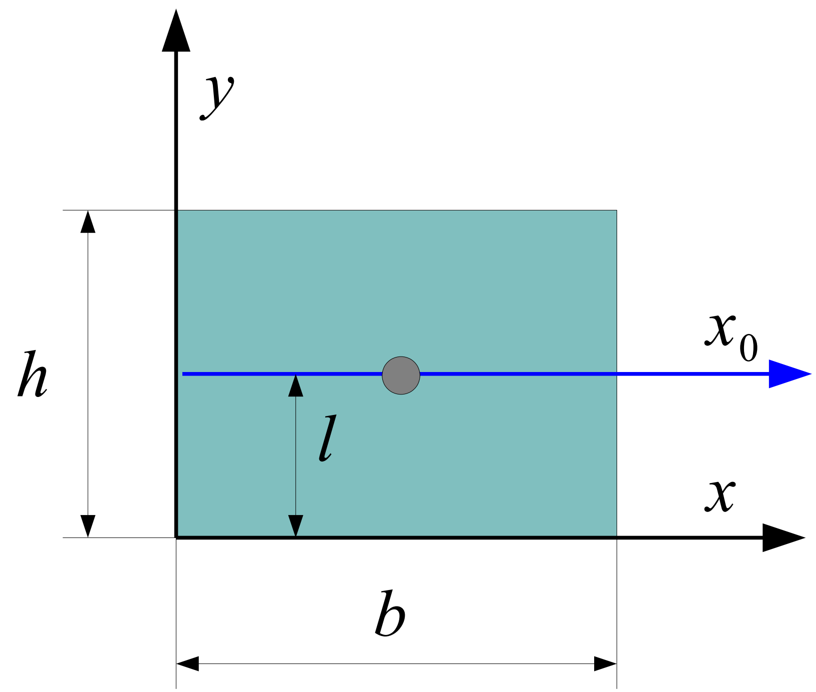
$$I_x = \frac{b \cdot h^3}{3}$$

tu przyjęto oznaczenie osi x i y,
tak jak w klasycznej mechanice

Twierdzenie Stainera

Moment bezwładności osiąga minimalną wartość, gdy oś przechodzi przez środek pola. W przypadku osi równoległej do osi centralnej x_0 moment bezwładności rośnie wg wzoru:

$$\boxed{I_x = I_{x_0} + A \cdot l^2}$$

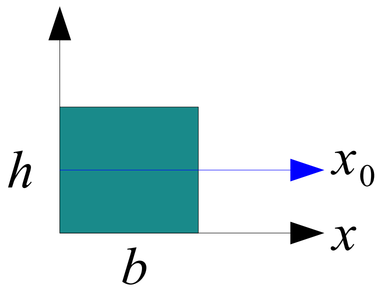


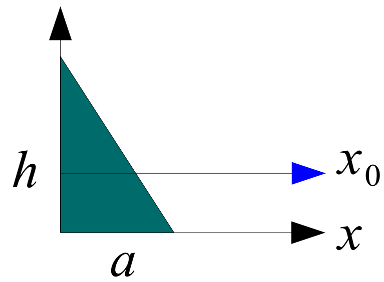
$$I_{x_0} = \frac{b \cdot h^3}{3} - b \cdot h \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^2$$

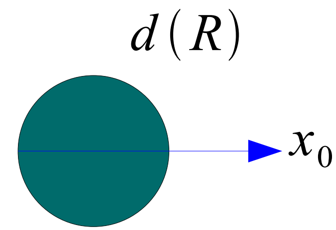
$$I_{x_0} = \frac{b \cdot h^3}{3} - \frac{b \cdot h^3}{4}$$

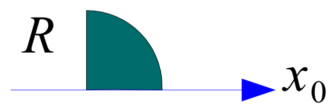
$$I_{x_0} = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

Wybrane momenty statyczne i bezwładności









$$I_x = \frac{b \cdot h^3}{3} \qquad I_x = \frac{a \cdot h^3}{12} \qquad I_x = \frac{\Pi \cdot d^4}{64} \qquad I_x = \frac{\Pi \cdot R^4}{16}$$

$$I_{x_0} = \frac{b \cdot h^3}{12} \qquad I_{x_0} = \frac{a \cdot h^3}{36} \qquad \left(I_x = \frac{\Pi \cdot R^4}{4} \right)$$

$$S_x = \frac{b \cdot h^2}{2} \qquad S_x = \frac{a \cdot h^2}{6}$$

$$y_s = \frac{h}{2} \qquad y_s = \frac{h}{3} \qquad y_s = \frac{d}{2} \qquad y_s = \frac{4}{3} \frac{R}{\Pi}$$

Podsumowanie

Zagadnienia:

Statyka płynów, prawo Pascala, prawo Eulera, równanie hydrostatyki, równanie powierzchni ekwipotencjalnej, ciśnienie statyczne, jednostkowa siła masowa, prawo Archimedesa, środek ciężkości i środek wyporu, metacentrum, wysokość metacentryczna, warunki równowagi ciała pływającego, moment prostujący, kąt krytyczny, napór hydrostatyczny, punkt przyłożenia siły naporu, napór jako ciężar „bryły ciekłej”, całkowita siła naporu, twierdzenie Stevina (paradoks hydrostatyczny), wzór barometryczny, moment statyczny, moment bezwładności, twierdzenie Stainera.

Wydział Nauk Technicznych

UNIVERSITY OF WARMIA AND MAZURY IN OLSZTYN
The Faculty of Technical Sciences
POLAND, 10-957 Olsztyn, M. Oczapowskiego 11
tel.: (48)(89) 5-23-32-40, fax: (48)(89) 5-23-32-55
URL: http://www.uwm.edu.pl/edu/sobieski/ (in Polish)

Dziękuję za uwagę

Wojciech Sobieski

Olsztyn, 2013-2015