Wydział Nauk Technicznych

UNIVERSITY OF WARMIA AND MAZURY IN OLSZTYN
The Faculty of Technical Sciences
POLAND, 10-957 Olsztyn, M. Oczapowskiego 11
tel.: (48)(89) 5-23-32-40, fax: (48)(89) 5-23-32-55
URL: http://www.uwm.edu.pl/edu/sobieski/ (in Polish)

MECHANIKA PŁYNÓW

Uniwersalne równania zachowania

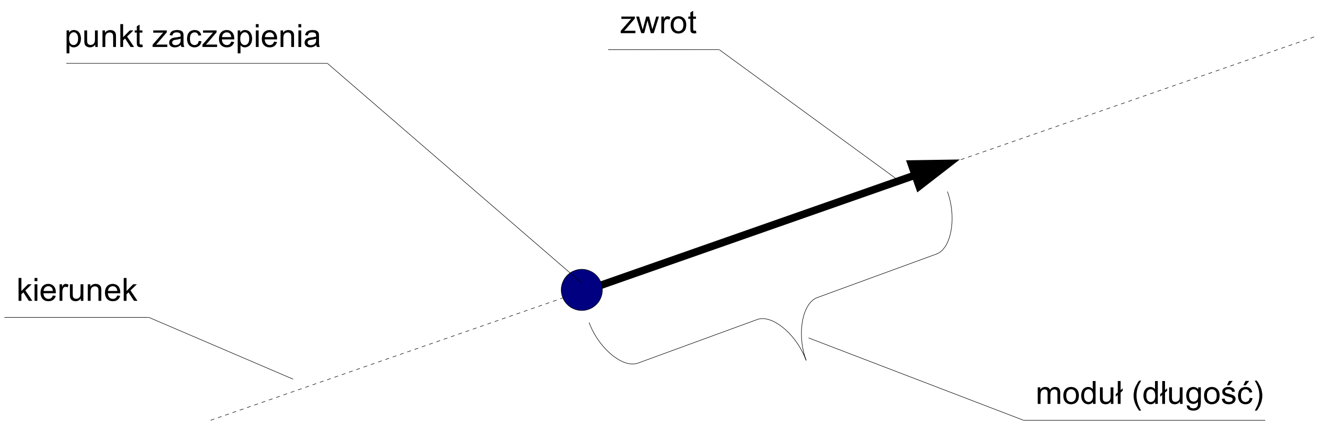
Wojciech Sobieski

Olsztyn, 2013-2015

Skalar i Wektor

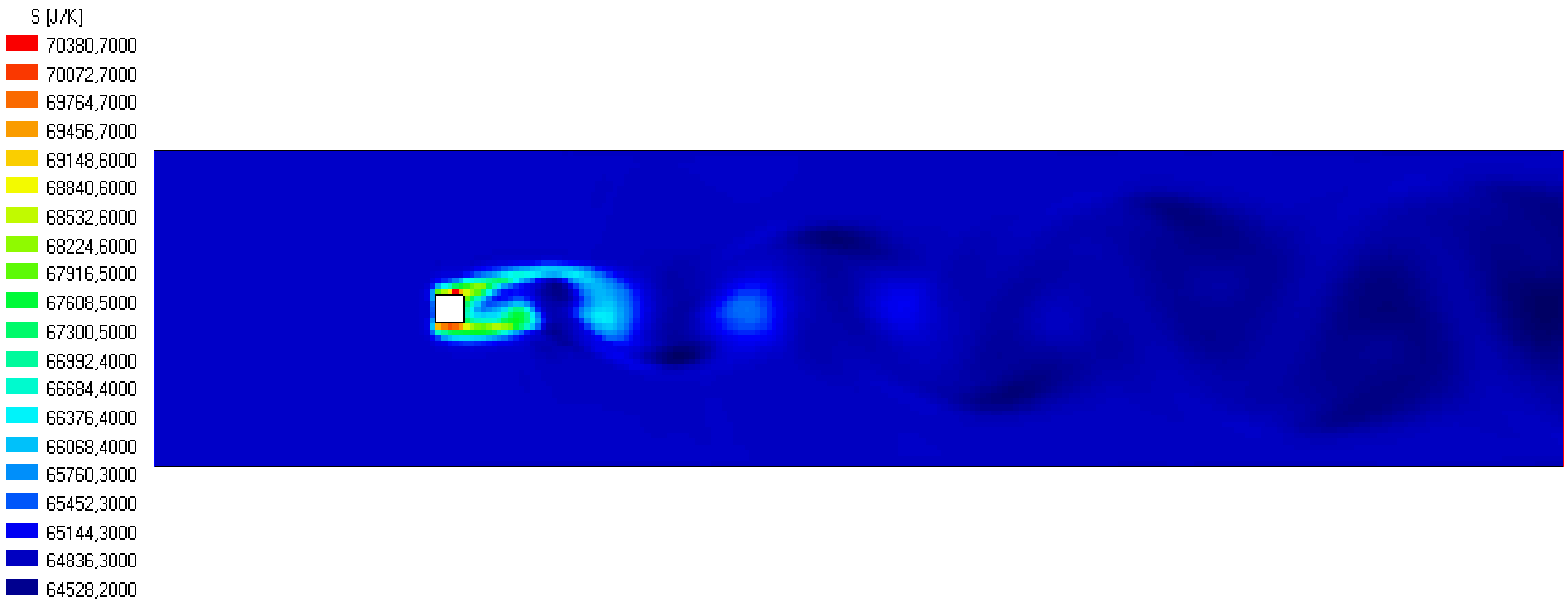
Skalar – jest to wielkość, do której określenia wystarczy jedna liczba rzeczywista wraz z wymiarem wielkości fizycznej (mogą być też bezwymiarowe), np. długość, pole powierzchni, objętość, temperatura, gęstość, potencjał pola elektrostatycznego lub grawitacyjnego, praca.

Wektor – jest to obiekt mający moduł (zwany też długością) oraz kierunek określony zwrotem.



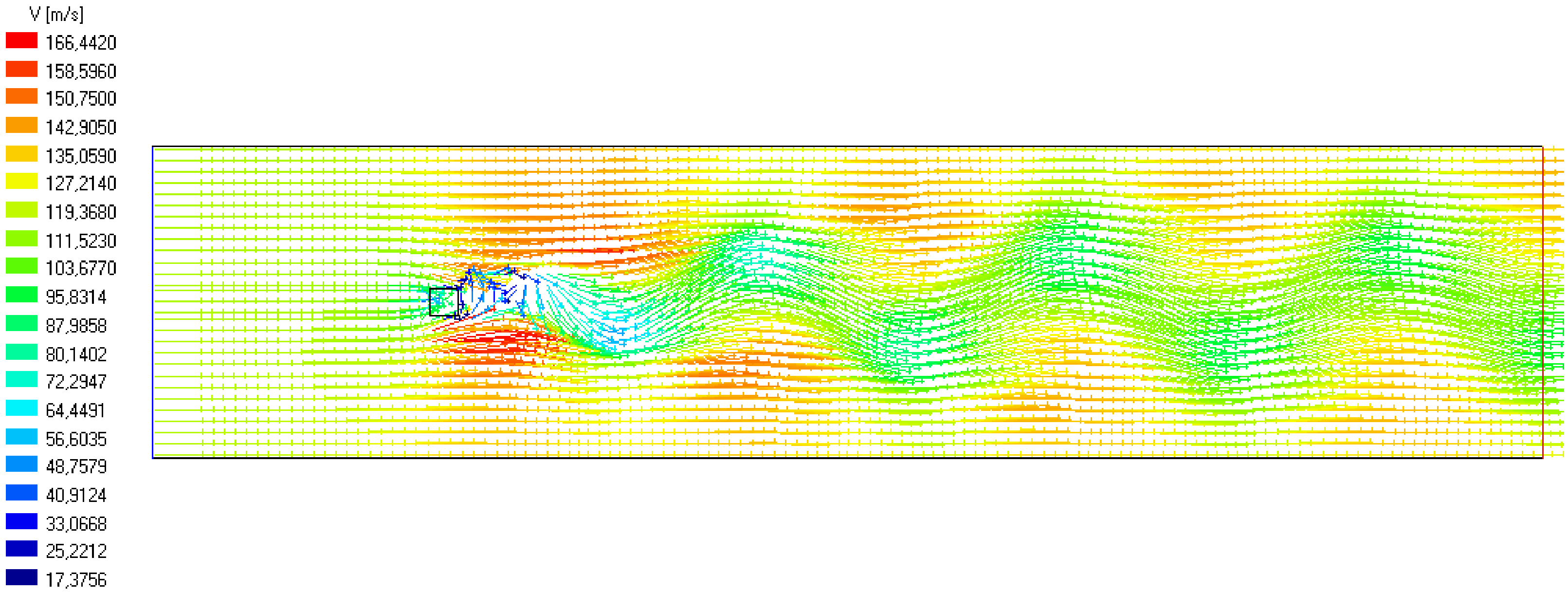
Pole skalarne i wektorowe

Wielkość skalarną **U**, która w każdym punkcie przestrzeni przybiera oznaczoną wartość, nazywamy funkcją skalarną lub **polem skalarnym**.



Pole skalarne i wektorowe

Wielkość wektorową **W**, która w każdym punkcie przestrzeni przybiera oznaczoną wartość, nazywamy funkcją wektorową lub **polem wektorowym**.



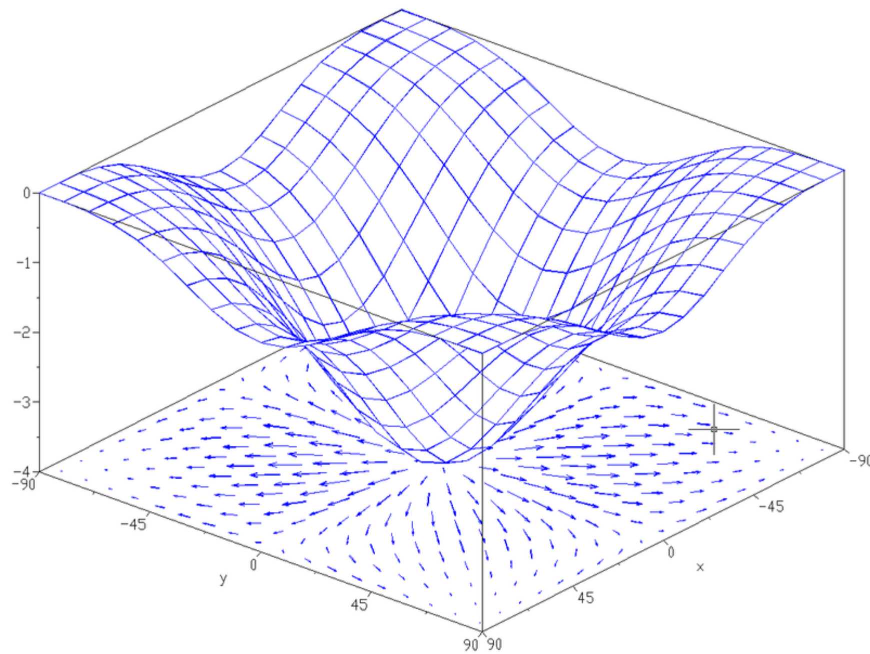
Gradient

Gradient pola skalarnego **U**, oznaczony symbolem grad(**U**) lub ∇ **U**, jest to wektor określony w każdym punkcie pola, mający kierunek zgodny z kierunkiem normalnej do powierzchni równych wartości pola, zorientowany w kierunku wzrastania funkcji **U** i mający długość ∂**U**/∂n (gdzie n jest współrzędną).

$$grad(U) = \frac{\vec{n} \cdot \partial U}{\partial n}$$

$$grad(U) = \frac{\partial U}{\partial x} \cdot i + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot j + \frac{\partial U}{\partial z} \cdot k$$

we współrzędnych kartezjańskich



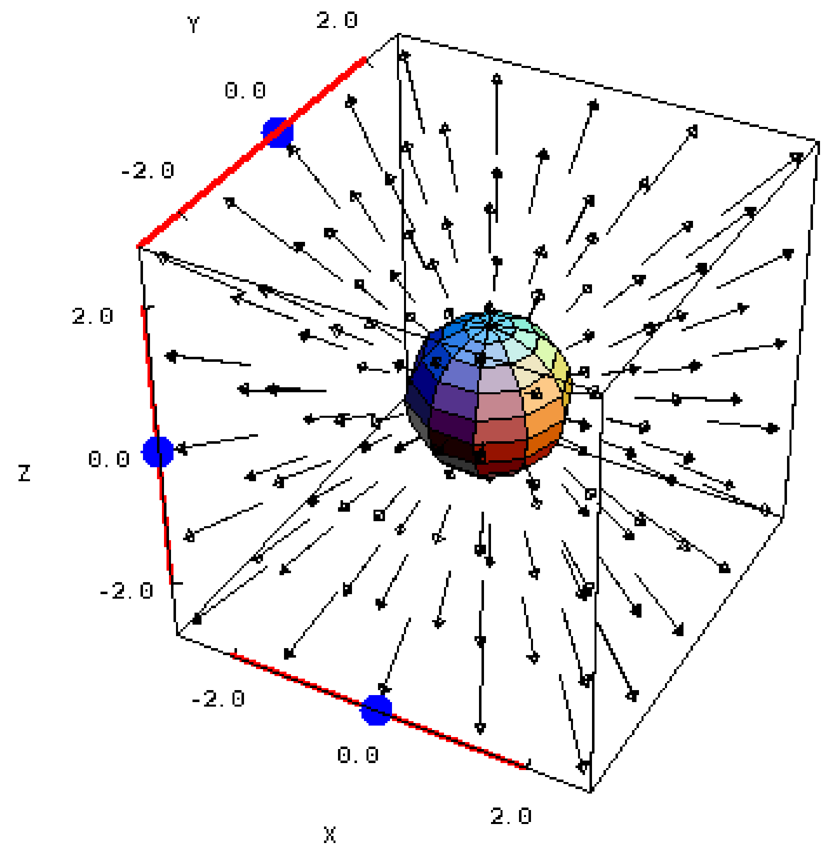
Dywergencja

Dywergencja albo **rozbieżność** pola wektorowego **W**, oznaczona symbolem div(**W**) lub ∇**W**, jest to skalar określony w każdym punkcie pola, stanowiący pochodną przestrzenną skalarną pola wektorowego w danym punkcie.

$$\operatorname{div}(W) = \lim_{V \to 0}\left(\frac{1}{V}\cdot\int_S W dS\right)$$

$$\operatorname{div}(W) = \frac{\partial W_x}{\partial x} + \frac{\partial W_y}{\partial y} + \frac{\partial W_z}{\partial z}$$

we współrzędnych kartezjańskich



Rotacja

Wirowością albo rotacją pola wektorowego **W**, oznaczoną symbolem rot(**W**) albo ∇ **W**, nazywamy wektor określony w każdym punkcie pola i stanowiący pochodną przestrzenną wektorową tego pola, wziętą ze znakiem przeciwnym.

$$rot(W) = -\lim_{V \to 0}\left(\frac{1}{V}\cdot\int_S W \times dS\right)$$

$$rot(W) = \left(\frac{\partial W_z}{\partial y} - \frac{\partial W_y}{\partial z}\right)\cdot i + \left(\frac{\partial W_x}{\partial z} - \frac{\partial W_z}{\partial x}\right)\cdot j + \left(\frac{\partial W_y}{\partial x} - \frac{\partial W_x}{\partial y}\right)\cdot k$$

we współrzędnych kartezjańskich

Operator Hamiltona

Operator Hamiltona ∇(nabla) jest to wektor symboliczny, zastępujący oznaczenia grad, div i rot.

$$\nabla U = grad(U)$$

$$\nabla W = \mathrm{div}(W)$$

$$\nabla \times W = rot(W)$$

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\cdot i + \frac{\partial}{\partial y}\cdot j + \frac{\partial}{\partial z}\cdot k$$

we współrzędnych kartezjańskich

operator funkcji złożonej:

$$\nabla(U\cdot W) = \nabla(U\cdot W) + \nabla(U\cdot W)$$

$$\nabla(U\cdot W) = W\cdot\nabla U + U\cdot\nabla W$$

$$\nabla(U\cdot W) = W\cdot grad(U) + U\cdot \mathrm{div}\, W$$

Twierdzenie Greena-Gaussa-Ostrogradzkiego

Twierdzenie Greena-Gaussa-Ostrogradzkiego – jeżeli powierzchnia **S**, identyfikowana wersorem kierunku normalnego, otacza jednospójny obszar **V** w polu skalarnym lub wektorowym **Φ**, to zachodzi zależność:

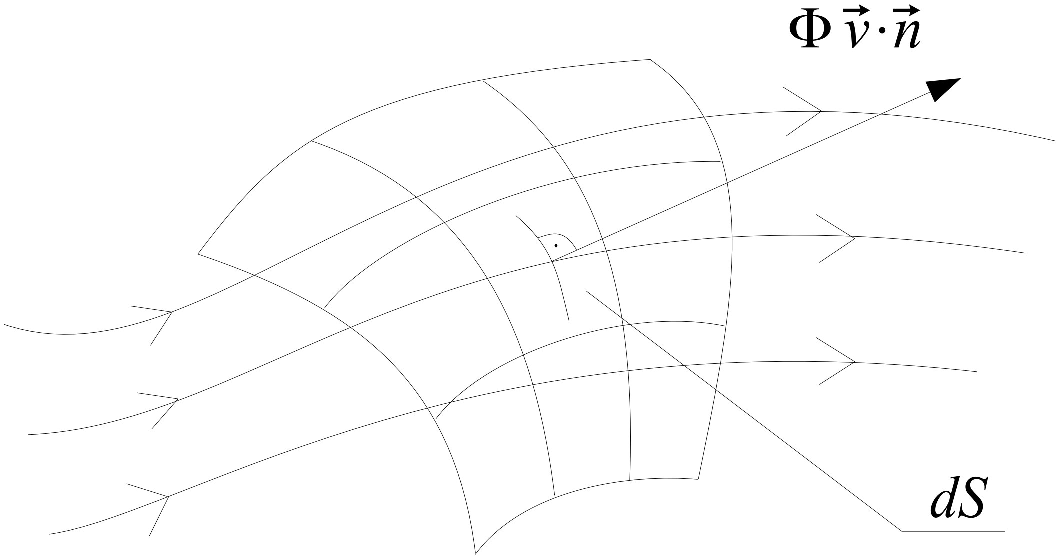
$$\int_S \left(\Phi \cdot \vec{n}\right) dS = \int_V \left(\mathrm{div}\left(\Phi\right)\right) dV$$

Analogiczne twierdzenie zachodzi dla przestrzeni dwuwymiarowej:

$$\int_l \left(\Phi \cdot \vec{n}\right) dl = \int_A \left(\mathrm{div}\left(\Phi\right)\right) dA$$

Strumień

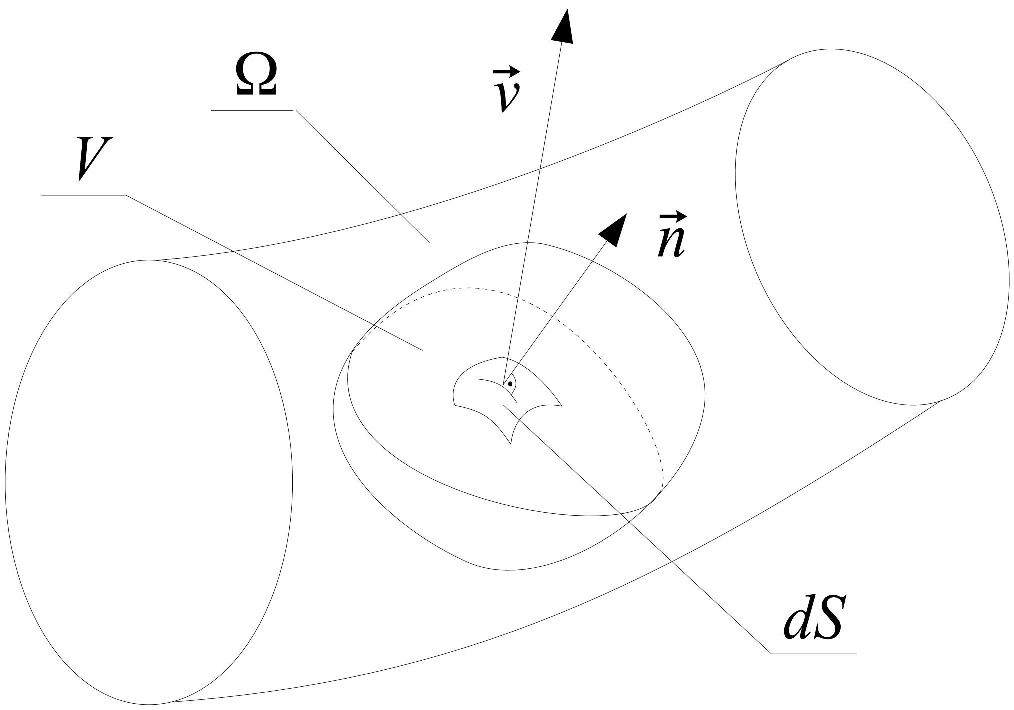
Strumień jest to wektor definiowany jako iloczyn dowolnej wielkości fizycznej, np. masy, pędu lub energii oraz prędkości przepływu w kierunku prostopadłym do powierzchni.



$$\Phi = \rho, \rho\vec{v}, \rho e, \ldots$$

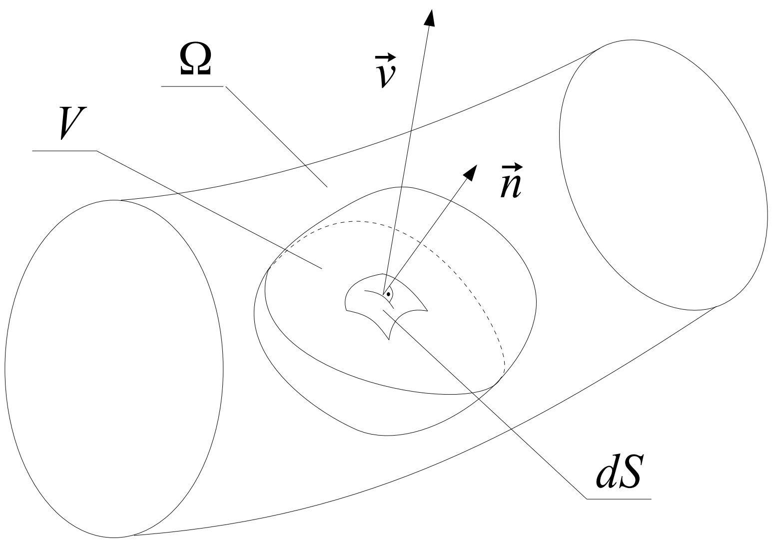
Objętość skończona

Objętość skończona – fragment przestrzeni o objętości V (należącej do obszaru płynnego Ω), zamknięty powierzchnią S.



Ω	- przestrzeń obliczeniowa
V	- objętość kontrolna (skończona)
S	- powierzchnia objętości V
$\vec{v}$	- prędkość strumienia płynu
$\vec{n}$	- wersor normalny (wektor kierunkowy powierzchni)

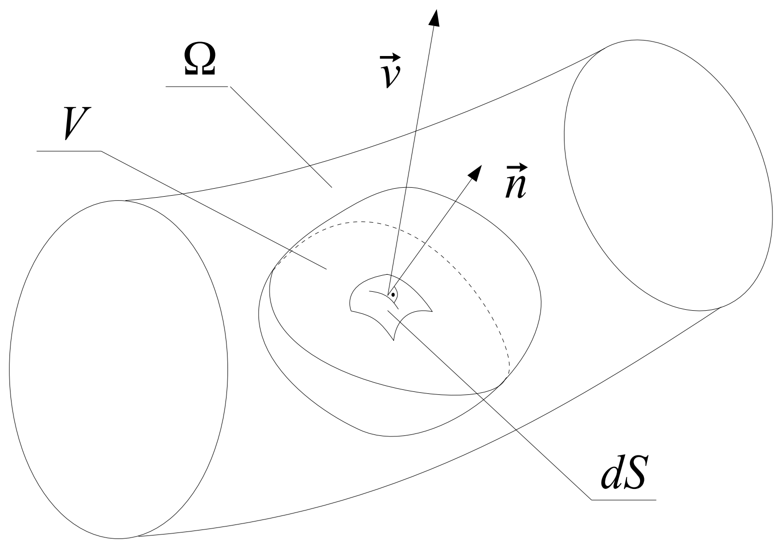
Bilans powierzchniowy



$$\int_S \left(\Phi\,\vec{v}\cdot\vec{n}\right) dS$$

Bilans powierzchniowy opisuje możliwość wymiany wielkości ***Φ*** z otoczeniem poprzez strumienie przepływające przez powierzchnię; Przykładem może być masa materii: podczas bilansu zastanawiamy się ile w wybranej jednostce czasu materii wpływa, a ile wypływa do objętości ***V*** przez powierzchnię ***dS***.

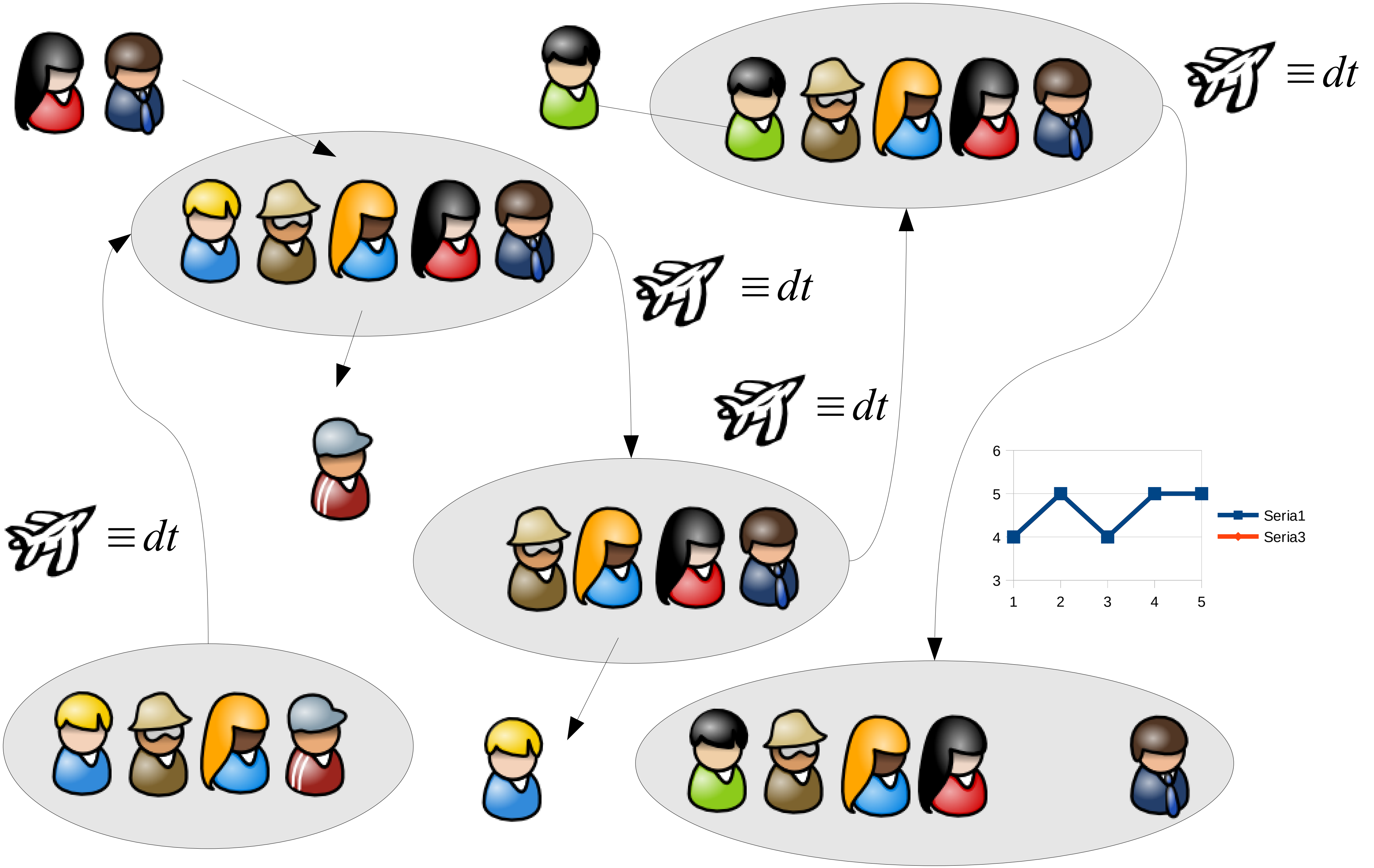
Bilans objętościowy



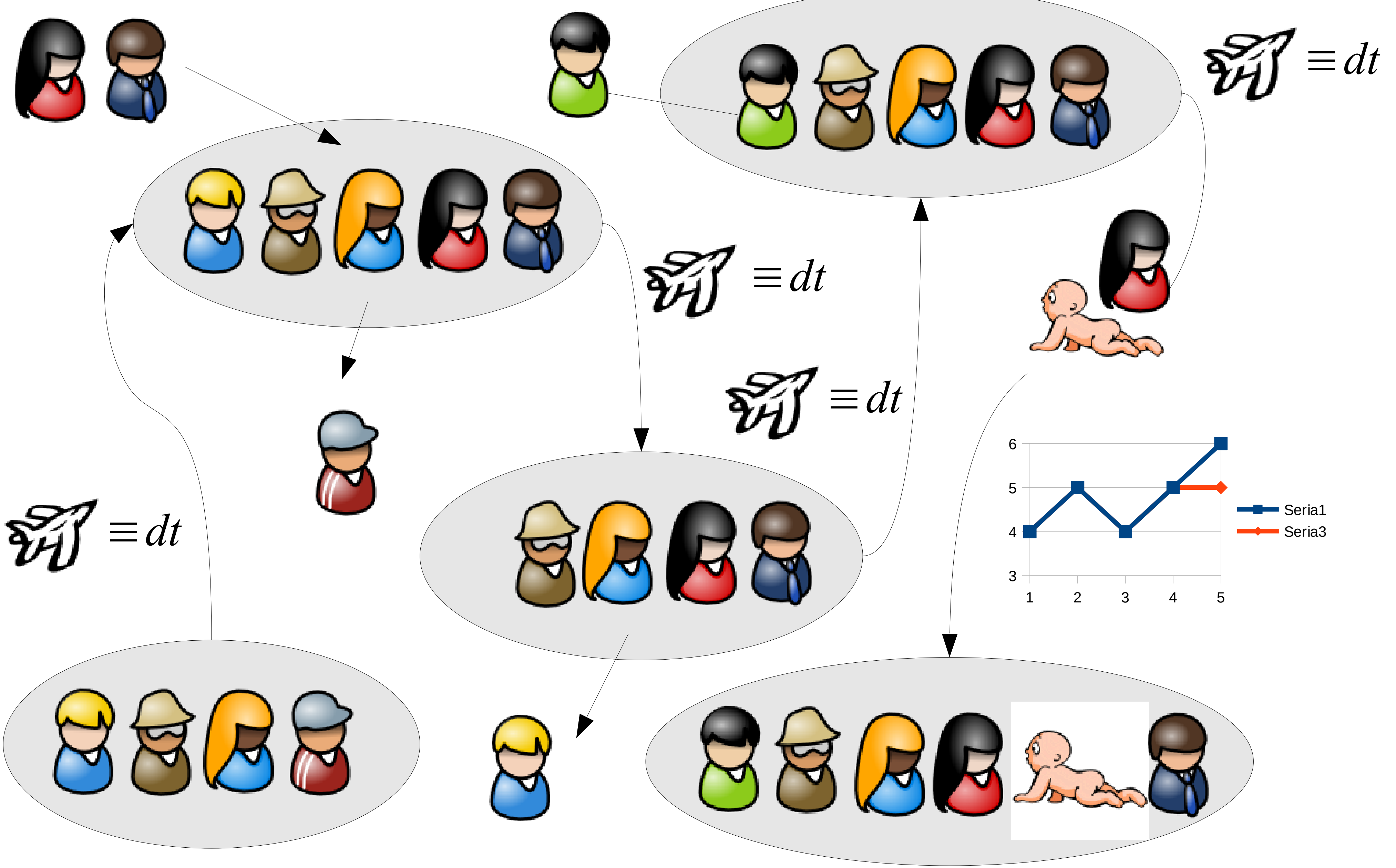
$$\int_V \Phi \, dV$$

Bilans objętościowy opisuje możliwość zmiany wielkości ***Φ*** we wnętrzu objętości ***V***. Przykładem mogą być reakcje chemiczne bądź przemiany fazowe: zmieniają one parametry w objętości (udziały poszczególnych składników, temperaturę, itp.) niezależnie od strumieni wpływających i wypływających.

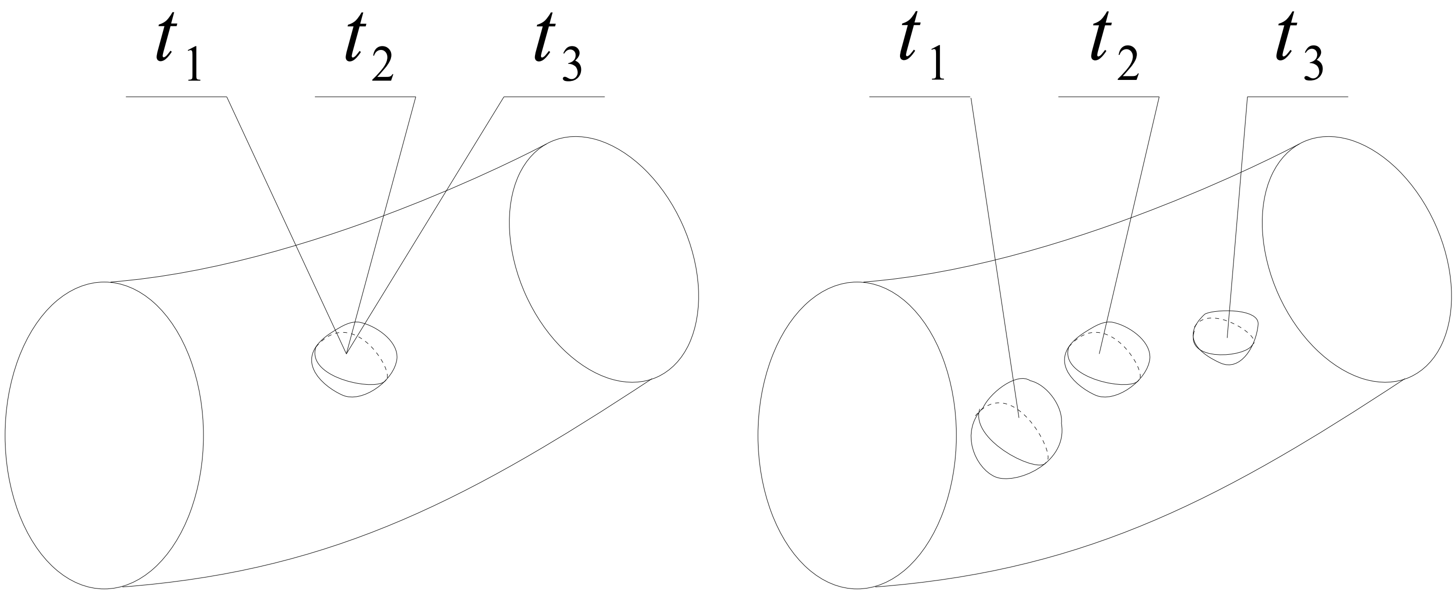
Analogie…



Analogie...



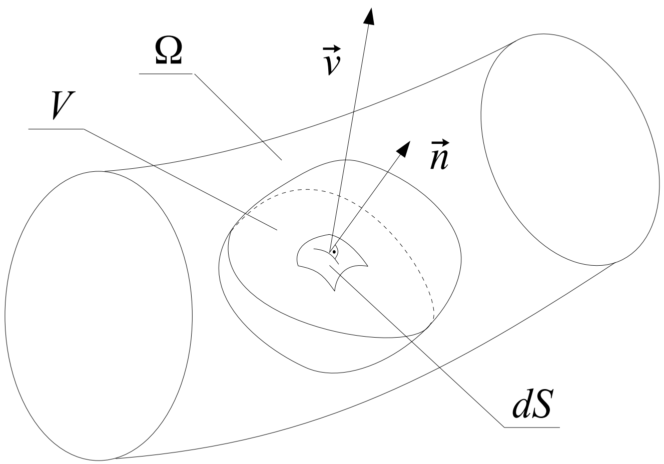
Opis Eulera i Lagrange'a



Opis Eulera: $x, y, z(t_1) = x, y, z(t_2) = x, y, z(t_3)$

Opis Lagrange'a: $x, y, z(t_1) \neq x, y, z(t_2) \neq x, y, z(t_3)$

Równanie bilansu masy



m - masa zawarta w objętości V

$\bar{\rho}$ - średnia gęstość płynu w objętości V

$$m=\bar{\rho}\,V=\int_V \rho\, dV$$

nas interesuje jak zmienia się w czasie masa zawarta wewnątrz objętości V

$$\frac{dm}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\bar{\rho}\,V\right)=\frac{d}{dt}\int_V \rho\, dV=\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dV=?$$

czy to się równa zeru?

Równanie bilansu masy

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = -\int_S \rho \vec{v} \cdot \vec{n} \, dS$$

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_S \rho \vec{v} \cdot \vec{n} \, dS = 0$$

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_V \operatorname{div}(\rho \vec{v}) \, dV = 0$$

$$\int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) \right) dV = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0}$$

przypadek ogólny zakłada istnienie ściśliwości płynu, tak więc przy wzroście czynnika sprawczego powodującego ściskanie, w jednostce czasu więcej płynu wpłynie do objętości niż z niej wypłynie – różnicę obliczyć można całkując po całej powierzchni strumień masy

G-G-O

$$\int_S (\Phi \cdot \vec{n}) \, dS = \int_V (\operatorname{div}(\Phi)) \, dV$$

równanie bilansu masy

Równanie bilansu masy

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t}+\mathrm{div}\left(\rho\vec{v}\right)=0}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\mathrm{div}\left(\rho\vec{v}\right)+\mathrm{div}\left(\rho\vec{v}\right)=0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\vec{v}\cdot grad\left(\rho\right)+\rho\cdot\mathrm{div}\left(\vec{v}\right)=0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+v_x\cdot\frac{\partial \rho}{\partial x}+v_y\cdot\frac{\partial \rho}{\partial y}+v_z\cdot\frac{\partial \rho}{\partial z}+\rho\cdot\mathrm{div}\left(\vec{v}\right)=0 \leftarrow \left\{\begin{array}{l} v_x=\frac{\partial x}{\partial t} \\ v_y=\frac{\partial y}{\partial t} \\ v_z=\frac{\partial z}{\partial t}\end{array}\right.$$

$$\underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial x}{\partial t}\cdot\frac{\partial \rho}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial t}\cdot\frac{\partial \rho}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial t}\cdot\frac{\partial \rho}{\partial z}}+\rho\cdot\mathrm{div}\left(\vec{v}\right)=0$$

$$\boxed{\frac{d\rho}{dt}+\rho\cdot\mathrm{div}\left(\vec{v}\right)=0}$$

„klasyczna" postać RBM

Równanie Transportu Reynoldsa

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho \, dV = 0$$

masa w objętości skończonej nie będzie się zmieniać wówczas, gdy „luz” powstały po ściśnięciu płynu uzupełniony zostanie masą z zewnątrz

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_S \rho \, \vec{v} \cdot \vec{n} \, dS = 0$$

G-G-O

$$\int_S \left(\Phi \cdot \vec{n}\right) dS = \int_V \left(\mathrm{div}\left(\Phi\right)\right) dV$$

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_V \mathrm{div}\left(\rho \, \vec{v}\right) dV = 0$$

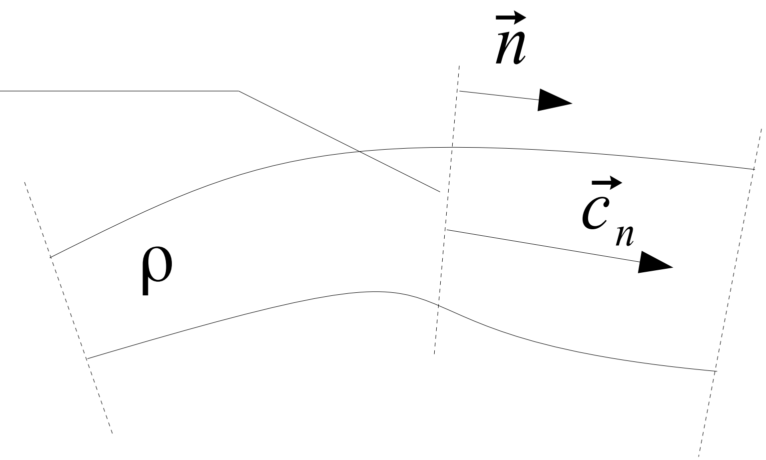
$$\frac{d}{dt}\int_V \rho \, dV = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_S \rho \, \vec{v} \cdot \vec{n} \, dS$$

lub ogólnej (RTR):

$$\boxed{\frac{d}{dt}\int_V \Phi \, dV = \int_V \frac{\partial \Phi}{\partial t} dV + \int_S \Phi \, \vec{v} \cdot \vec{n} \, dS}$$

Równanie ciągłości

$$\int_S \left(\rho\,\vec{v}\cdot\vec{n}\right) dS = 0$$



Założenia: płyn jest nieściśliwy

$$\rho\cdot\int_S \left(\vec{v}\cdot\vec{n}\right) dS = 0$$

$\vec{c}_n$ - średnia prędkość strugi na kierunku normalnym

$$\rho\cdot\vec{c}_n\cdot\int_S dS = 0$$

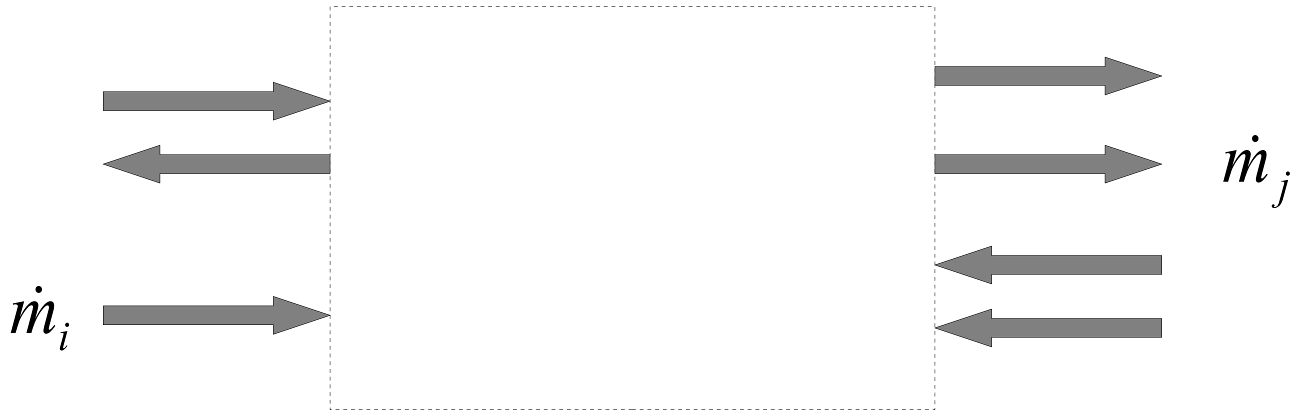
$$\rho\cdot\vec{c}_n\cdot S = C \longrightarrow \left[\frac{kg}{m^3}\cdot\frac{m}{s}\cdot m^2\right] = \left[\frac{kg}{s}\right]$$

$$\boxed{\rho\cdot\vec{c}_n\cdot S = \dot{m}}$$

masowe natężenie przepływu w strudze płynu jest stałe

Równanie ciągłości

Dla większej liczby wlotów i wylotów:



$$\sum_{i=1}^{n} \rho \cdot \vec{c}_i \cdot S_i - \sum_{j=1}^{m} \rho \cdot \vec{c}_j \cdot S_j = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} \dot{m}_i - \sum_{j=1}^{m} \dot{m}_j = 0$$

n - ilość wlotów

m - ilość wylotów

Fizyczny sens dywergencji prędkości

$$\frac{dm}{dt}=\frac{d(\rho V)}{dt}=\frac{V\cdot d\rho}{dt}+\frac{\rho\cdot dV}{dt}=0$$

masa jako funkcja złożona gęstości i objętości

$$\frac{V\cdot d\rho}{dt}=-\frac{\rho\cdot dV}{dt}$$

$$\frac{d\rho}{dt}=-\frac{\rho}{V}\cdot\frac{dV}{dt}$$

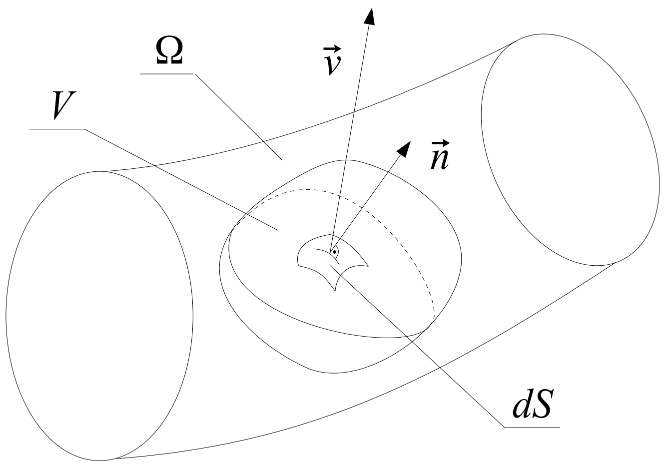
$$\frac{d\rho}{dt}+\rho\cdot\operatorname{div}(\vec{v})=0$$

$$\rho\cdot\operatorname{div}(\vec{v})=-\frac{\rho}{V}\cdot\frac{dV}{dt}$$

$$\operatorname{div}(\vec{v})=-\frac{1}{V}\cdot\frac{dV}{dt}$$

miara tendencji do „rozciągania” się lub „ściskania” objętości skończonej

Równanie bilansu pędu



m - masa zawarta w objętości V

$\vec{p}$ - pęd masy zawartej w objętości V

$$\vec{p}=m\vec{v}=\int_V (\rho\vec{v})\,dV$$

nas interesuje jak pęd zmienia się w czasie

$$\frac{d\vec{p}}{dt}=\frac{d}{dt}\int_V (\rho\vec{v})\,dV=\vec{F}$$

aby zmienić pęd ciała należy zadziałać siłą

Równanie bilansu pędu

$$\frac{d}{dt}\int_V \left(\rho\vec{v}\right) dV = \vec{F}_V + \vec{F}_S$$

$$\vec{F} = \vec{F}_V + \vec{F}_S$$

siły objętościowe (wewnętrzne i zewnętrzne)

siły powierzchniowe (normalne i styczne)

$$\vec{F}_V = \int_V \left(\rho\vec{f}_V\right) dV$$

$$\vec{F}_S = \int_S \left(\vec{f}_S\right) dS = \int_S \left(\overleftrightarrow{T}\vec{n}\right) dS = \int_V \operatorname{div}\left(\overleftrightarrow{T}\right) dV$$

$$\frac{d}{dt}\int_V \left(\rho\vec{v}\right) dV = \int_V \left(\rho\vec{f}_V\right) dV + \int_V \operatorname{div}\left(\overleftrightarrow{T}\right) dV$$

całkowity tensor naprężeń na powierzchni S

Równanie bilansu pędu

$$\frac{d}{dt}\int_V (\rho\,\vec{v})\,dV = \int_V \left(\rho\,\vec{f}_V\right)dV + \int_V \operatorname{div}\left(\overset{\leftrightarrow}{T}\right)dV$$

Równanie
Transportu
Reynoldsa

$$\frac{d}{dt}\int_V (\rho\,\vec{v})\,dV = \int_V \frac{\partial}{\partial t}(\rho\,\vec{v}) + \int_S (\rho\,\vec{v}\otimes\vec{v}\,\vec{n})\,dS$$

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t}(\rho\,\vec{v})\,dV + \int_S (\rho\,\vec{v}\otimes\vec{v}\,\vec{n})\,dS = \int_V \left(\rho\,\vec{f}_V\right)dV + \int_V \operatorname{div}\left(\overset{\leftrightarrow}{T}\right)dV$$

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t}(\rho\,\vec{v})\,dV + \int_V \operatorname{div}(\rho\,\vec{v}\otimes\vec{v})\,dV = \int_V \left(\rho\,\vec{f}_V\right)dV + \int_V \operatorname{div}\left(\overset{\leftrightarrow}{T}\right)dV$$

Tw. GGO

cd.

Równanie bilansu pędu

$$\int_V \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{v}) + \mathrm{div}(\rho \vec{v} \otimes \vec{v}) \right] dV = \int_V \left[\rho \vec{f}_V + \mathrm{div}\left(\overset{\leftrightarrow}{T} \right) \right] dV$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{v}) + \mathrm{div}(\rho \vec{v} \otimes \vec{v}) = \rho \vec{f}_V + \mathrm{div}\left(\overset{\leftrightarrow}{T} \right)$$

$$\overset{\leftrightarrow}{T} = -p \overset{\leftrightarrow}{I} + \overset{\leftrightarrow}{\tau}$$

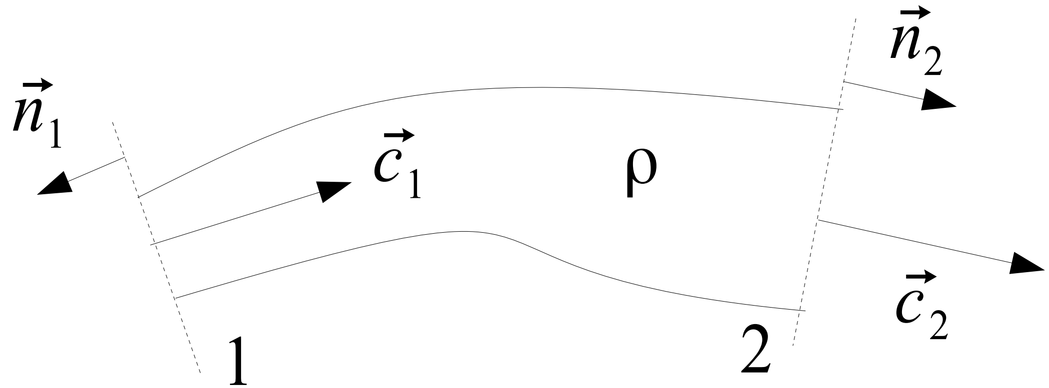
$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{v}) + \mathrm{div}(\rho \vec{v} \otimes \vec{v}) = \mathrm{div}\left(-p \overset{\leftrightarrow}{I} + \overset{\leftrightarrow}{\tau} \right) + \rho \vec{f}_V}$$

równanie bilansu pędu

$$\rho \vec{f}_V = \rho \vec{s}_b$$

zapis ogólniejszy: źródło sił masowych

Równanie reakcji



Założenia:

- płyn jest nieściśliwy
- przepływ jest stacjonarny
- nie ma tarcia
- nie ma sił masowych

$$\cancel{\int_V \frac{\partial}{\partial t}(\rho\,\vec{v})}\,dV + \int_S (\rho\,\vec{v}\otimes\vec{v}\,\vec{n})\,dS = \cancel{\int_V (\rho\,\vec{f}_V)}\,dV + \int_V \operatorname{div}\left(-p\,\overset{\leftrightarrow}{I} + \cancel{\overset{\leftrightarrow}{\tau}}\right) dV$$

$$\int_S (\rho\,\vec{v}\otimes\vec{v}\,\vec{n})\,dS = \int_V \operatorname{div}\left(-p\,\overset{\leftrightarrow}{I}\right) dV$$

Tw. GGO

$$\int_S (\rho\,\vec{v}\otimes\vec{v}\,\vec{n})\,dS = \int_s (-p\,\vec{n})\,ds$$

Równanie reakcji

$$\int_S \left(\rho \vec{v} \otimes \vec{v}\,\vec{n}\right) dS - \int_s \left(p\,\vec{n}\right) ds = 0$$

Czym są te całki?

$$\int_S \left(\rho \vec{v} \otimes \vec{v}\,\vec{n}\right) dS = \int_S \left(\rho \vec{v}\,\vec{n}\right) dS \cdot \frac{\int_S \left(\rho \vec{v} \otimes \vec{v}\,\vec{n}\right) dS}{\int_S \left(\rho \vec{v}\,\vec{n}\right) dS}$$

$$\int_s \left(p\,\vec{n}\right) ds = 0$$

$$\left[\frac{kg}{m^3} \cdot \frac{m}{s} \cdot m^2\right] = \left[\frac{kg}{s}\right] \qquad \left[\frac{m}{s}\right]$$

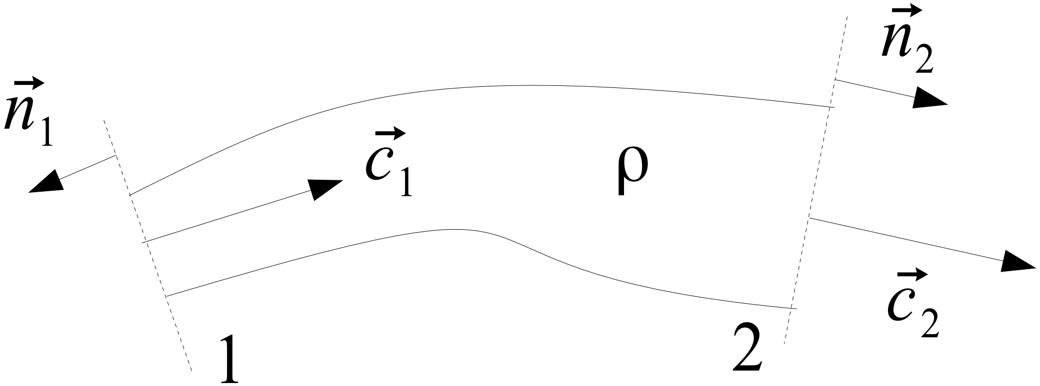
$$\left[\frac{N}{m^2} \cdot m^2\right] = \left[N\right]$$

$$\int_S \left(\rho \vec{v} \otimes \vec{v}\,\vec{n}\right) dS = \dot{m} \cdot \vec{c}$$

$$\int_s \left(p\,\vec{n}\right) ds = \vec{N}$$

Równanie reakcji

$$\int_S \left(\rho \vec{v} \otimes \vec{v}\, \vec{n}\right) dS - \int_s \left(p\, \vec{n}\right) ds = 0 \longrightarrow \dot{m} \cdot \vec{c} + \vec{N} = 0$$



$$\Delta \vec{p} = \vec{p}_1 - \vec{p}_2$$

$$\Delta \vec{p} = -\dot{m}_1 \cdot \vec{c}_1 - \vec{N}_1 - \dot{m}_2 \cdot \vec{c}_2 - \vec{N}_2$$

$$\dot{m}_2 = -\dot{m}_1 = \dot{m}$$

znaki względem
wersorów normalnych

$$\Delta \vec{p} = \dot{m} \cdot \vec{c}_1 - \vec{N}_1 - \dot{m} \cdot \vec{c}_2 - \vec{N}_2$$

$$\Delta \vec{p} = \dot{m} \cdot (\vec{c}_1 - \vec{c}_2) - \vec{N}_1 - \vec{N}_2$$

$$\boxed{\vec{R} = \dot{m} \cdot (\vec{c}_1 - \vec{c}_2) - \vec{N}_1 - \vec{N}_2}$$

równanie reakcji

Równanie hydrostatyki

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec{v})+\mathrm{div}(\rho\vec{v}\otimes\vec{v})=\mathrm{div}\left(-p\overset{\leftrightarrow}{I}+\overset{\leftrightarrow}{\tau}\right)+\rho\vec{f}_V$$

Założenie: płyn pozostaje w spoczynku $\vec{v}=0$

$$0=-grad(p)+\rho\vec{f}_V$$

Dla całej masy płynu: $0=-grad(p)+\rho\vec{F}_V$ $\vec{F}_v=m\vec{f}_V$

$$\boxed{\frac{1}{\rho}grad(p)=\vec{F}_V}$$ - równanie hydrostatyki

dla $\vec{F}_V=0$ $$\boxed{grad(p)=0}$$ - prawo Pascala

Podsumowanie

Zagadnienia:

Skalar, wektor, pole skalarne i wektorowe, gradient, dywergencja, rotacja, operator Hamiltona, twierdzenie Greena-Gaussa-Ostrogradzkiego, strumień, objętość skończona, bilans powierzchniowy i objętościowy, analogie bilansu, opis Eulera i Lagrange'a, równanie bilansu masy, równanie transportu Reynoldsa, równanie ciągłości, fizyczny sens dywergencji prędkości, równanie bilansu pędu, przypadki szczególne równania bilansu pędu (równanie reakcji, równanie hydrostatyki, prawo Pascala).

Wydział Nauk Technicznych

UNIVERSITY OF WARMIA AND MAZURY IN OLSZTYN
The Faculty of Technical Sciences
POLAND, 10-957 Olsztyn, M. Oczapowskiego 11
tel.: (48)(89) 5-23-32-40, fax: (48)(89) 5-23-32-55
URL: http://www.uwm.edu.pl/edu/sobieski/ (in Polish)

Dziękuję za uwagę

Wojciech Sobieski

Olsztyn, 2013-2015