

Wydział Nauk Technicznych

UNIVERSITY OF WARMIA AND MAZURY IN OLSZTYN
The Faculty of Technical Sciences
POLAND, 10-957 Olsztyn, M. Oczapowskiego 11
tel.: (48)(89) 5-23-32-40, fax: (48)(89) 5-23-32-55
URL: <http://www.uwm.edu.pl/edu/sobieski/> (in Polish)

MECHANIKA PŁYNÓW

Modelowanie ruchu laminarnego i turbulentnego

Wojciech Sobieski

Olsztyn, 2013-2015

Równania bilansowe układu jednoskładnikowego

W przypadku przepływu jednoskładnikowego, bilans masy, pędu i energii prowadzi do uzyskania następującego układu równań:

$$\text{bilans masy:} \quad \frac{\partial}{\partial t} \rho + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0$$

$$\text{bilans pędu:} \quad \frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{v}) + \operatorname{div}(\rho \vec{v} \otimes \vec{v}) = \operatorname{div}(\overset{\leftrightarrow}{T}) + \rho \vec{s}_b$$

$$\text{bilans energii:} \quad \frac{\partial}{\partial t} (\rho e) + \operatorname{div}(\rho e \vec{v}) = \operatorname{div}(\overset{\leftrightarrow}{T} \vec{v} + \vec{q}) + \rho s_e$$

$$\vec{s}_b = ? \quad \overset{\leftrightarrow}{T} = ? \quad s_e = ? \quad \vec{q} = ? \quad p = ?$$

Podział równań Mechaniki Płynów

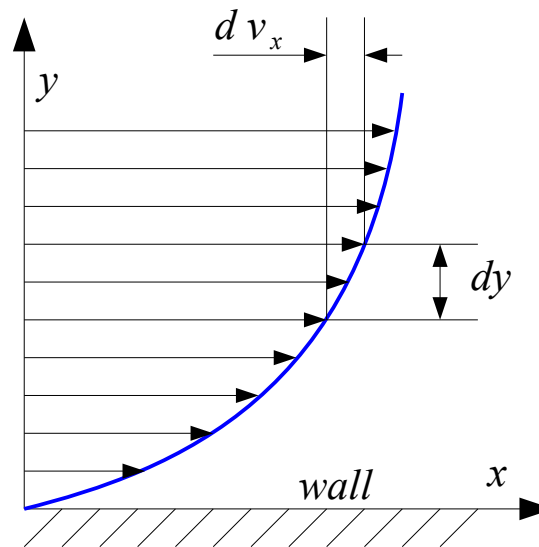
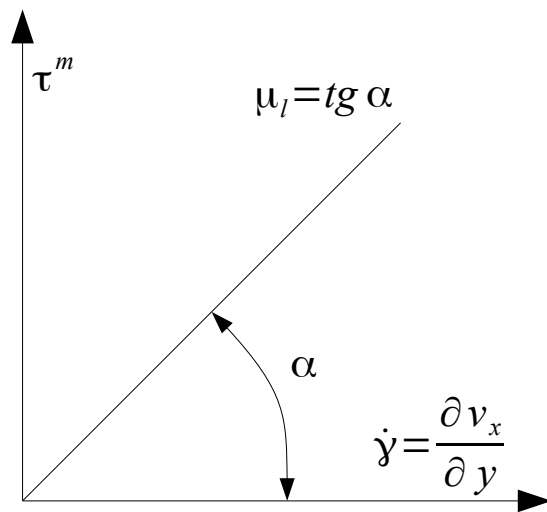
- równania transportu – opisują bilans pewnej wielkości na poziomie makrostruktury (w obszarze pojedynczej objętości skończonej). Przykładami są równania transportu masy, pędu, energii, entropii.
- równania ewolucji – opisują bilans pewnej wielkości na poziomie mikrostruktury (w obszarze pojedynczej objętości skończonej) i stanowią zazwyczaj uzupełnienie podstawowego układu równań. Przykładami mogą być równania ewolucji energii turbulencji, stopnia jej dyssypacji, wirowości czy też intermitencji.
- równania kinematyki – opisują własności kinematyczne płynu. Typowym przykładem jest równanie opisujące prędkość deformacji elementu płynu.

Podział równań Mechaniki Płynów

- równania konstytutywne – opisują właściwości płynu. Generalnie rozróżnia się cztery rodzaje równań konstytutywnych:
 - równanie stanu – opisują zależności pomiędzy podstawowymi parametrami termodynamicznymi (np. równanie Clapeyrona czy też równanie Van der Waalsa),
 - domknięcie na tensory naprężeń lepkich i turbulentnych – zawierają modele płynów oraz modele turbulencji,
 - domknięcie na wektor źródeł – opisują dodatkowe zjawiska występujące wewnątrz objętości skończonej (siły, generację masy, generację ciepła itp.),
 - domknięcia na przepływ masy i ciepła – opisują zasady wymiany masy i ciepła pomiędzy poszczególnymi składnikami przepływu i/lub otoczeniem.

Tensor naprężeń lepkich

Całkowity tensor naprężeń lepkich (w 3D) obejmuje naprężenia normalne (orientowane tensorem jednostkowym) oraz styczne, zależne od prędkości deformacji.



$$\tau_{xy}^m = \mu_l \frac{\partial v_x}{\partial y}$$

$$\begin{matrix} \leftrightarrow & \leftrightarrow & \leftrightarrow \\ T = a I + b D \end{matrix}$$

τ^m - tensor molekularnych naprężeń lepkich $[Pa]$

Tensor naprężeń lepkich

$$\begin{aligned}
 \overleftrightarrow{I} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} & \overleftrightarrow{D} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{vmatrix} \\
 \overleftrightarrow{T} &= a \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

Tensor naprężeń lepkich

$$\begin{vmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{vmatrix}$$

Tensory są sobie równe, gdy ich ślady (niezmienniki) są sobie równe:

$$\tau_{xx} + \tau_{yy} + \tau_{zz} = 3a + b \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)$$

Tensor naprężeń lepkich

$$\tau_{xx} + \tau_{yy} + \tau_{zz} = 3a + b \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)$$

$$\underbrace{\frac{\tau_{xx} + \tau_{yy} + \tau_{zz}}{3}}_{-p} = a + \underbrace{\frac{1}{3} b \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)}_{\text{div}(v)}$$

$$-p = a + \frac{1}{3} b \text{div}(v) \quad \longrightarrow \quad a = -p - \frac{1}{3} b \text{div}(v)$$

wzór na współczynnik a



Tensor naprężeń lepkich

a czemu się równa współczynnik b?

$$\leftrightarrow T = a \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{vmatrix}$$

τ_{xy}^m

$$\tau_{xy}^m = \mu_l \frac{\partial v_x}{\partial y} \xrightarrow{v_y=0} \mu_l \frac{\partial v_x}{\partial y} = b \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \longrightarrow b = 2\mu_l$$

Tensor naprężenia lepkich

$$\overset{\leftrightarrow}{T} = a \overset{\leftrightarrow}{I} + b \overset{\leftrightarrow}{D} \quad \left\{ \begin{array}{l} a = -p - \frac{1}{3} b \operatorname{div}(v) \\ b = 2\mu_l \end{array} \right.$$

$$\overset{\leftrightarrow}{T} = \left(-p - \frac{2}{3} \mu_l \operatorname{div}(v) \right) \overset{\leftrightarrow}{I} + 2\mu_l \overset{\leftrightarrow}{D}$$

$$\overset{\leftrightarrow}{T} = -p \overset{\leftrightarrow}{I} - \frac{2}{3} \mu_l \operatorname{div}(v) \overset{\leftrightarrow}{I} + 2\mu_l \overset{\leftrightarrow}{D} \quad \leftarrow \quad \lambda = -\frac{2}{3} \mu_l + \mu_l'$$

$$\overset{\leftrightarrow}{T} = -p \overset{\leftrightarrow}{I} + 2\mu_l \overset{\leftrightarrow}{D} - \frac{2}{3} \mu_l \operatorname{div}(v) \overset{\leftrightarrow}{I} + \mu_l' \operatorname{div}(v) \overset{\leftrightarrow}{I}$$

$$\overset{\leftrightarrow}{T} = -p \overset{\leftrightarrow}{I} + \tau^m$$

Równanie Naviera-Stokesa

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{v}) + \operatorname{div}(\rho \vec{v} \otimes \vec{v}) = \operatorname{div}(-p \vec{I} + \overleftrightarrow{\tau}^m) + \rho \vec{f}_V$$

z RTR: $\frac{dv}{dt}$ ← $\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \operatorname{div}(\vec{v} \otimes \vec{v}) \right] = -\operatorname{grad}(p) + \operatorname{div}(\overleftrightarrow{\tau}^m) + \rho \vec{f}_V$ $\tau^m \approx 2\mu_l D$

najstarsze przybliżenie

$$\rho \frac{dv}{dt} = -\operatorname{grad}(p) + \operatorname{div}(2\mu_l D) + \rho \vec{f}_V \quad / \rho$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad}(p) + \operatorname{div} \left[2\nu_l \frac{1}{2} (\operatorname{div}(v) + \operatorname{div}(v^T)) \right] + \vec{f}_V$$

c.d. →

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad}(p) + \nu_l \operatorname{div}[\operatorname{div}(v) + \operatorname{div}(v^T)] + \vec{f}_V$$

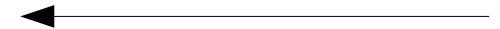
$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad}(p) + \nu_l \operatorname{div}^2(v) + \vec{f}_V \quad \longrightarrow \quad \boxed{\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla(p) + \nu_l \nabla^2(v) + \vec{f}_V}$$

Tensor prędkości deformacji

$$\overleftrightarrow{D} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$\overleftrightarrow{D} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \end{pmatrix}$$

„jedność” na przekątnej można zapisać jako sumę dwóch „połówek”



Tensor prędkości deformacji

$$\overset{\leftrightarrow}{D} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{vmatrix} + \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial y} \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} & \frac{\partial v_y}{\partial z} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{vmatrix}$$

$$\overset{\leftrightarrow}{D} = \frac{1}{2} [\operatorname{div}(\boldsymbol{v}) + \operatorname{div}(\boldsymbol{v}^T)]$$

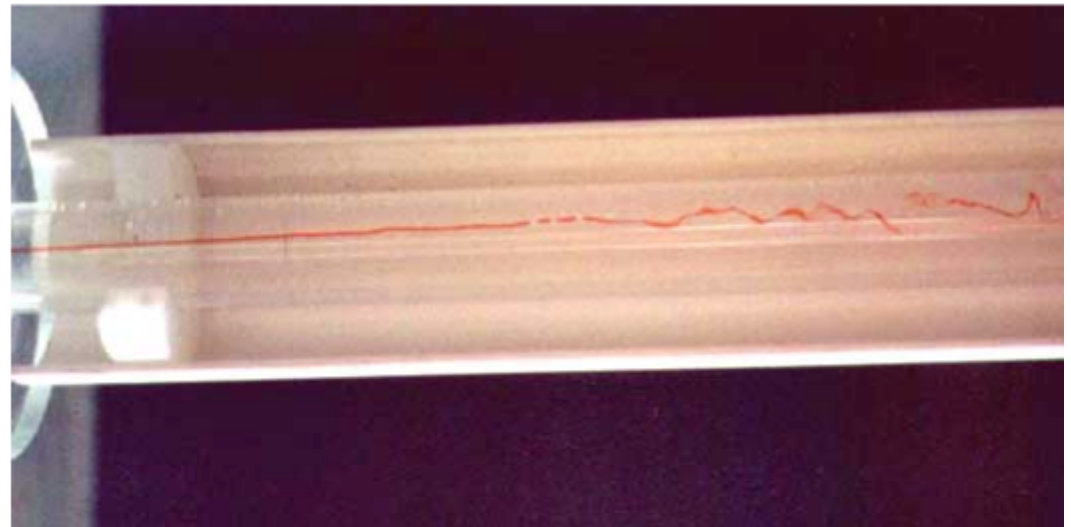
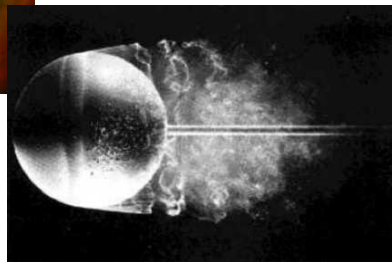
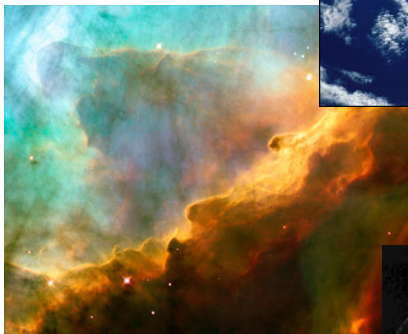
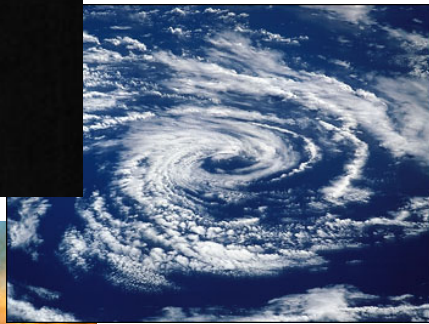
X - macierz

X^Y - macierz transponowana

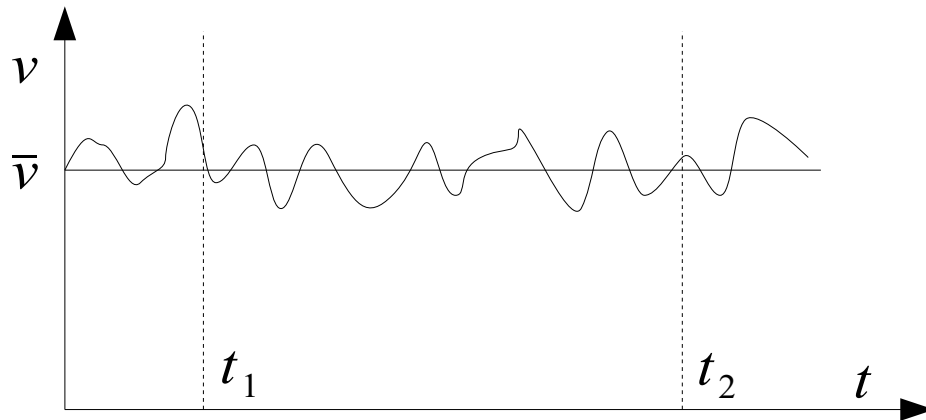
Ruch turbulentny

Równanie Naviera-Stokesa opisuje ruch laminarny płynu lepkiego

- a co z turbulencją?



Dekompozycja pola prędkości



$$v = \bar{v} + v'$$

v - prędkość chwilowa

\bar{v} - prędkość średnia (w czasie)

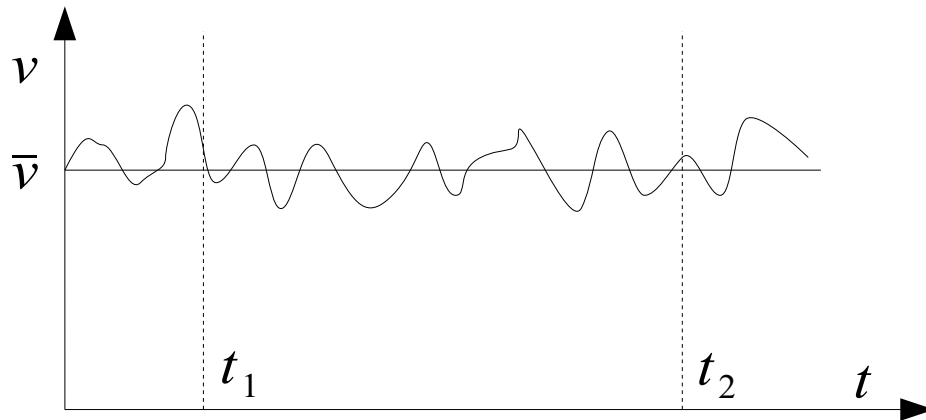
v' - fluktuacja prędkości

WNIOSEK 1: skoro prędkość średnia liczona jest jako średnia arytmetyczna fluktuacji dodatnich i ujemnych w czasie, to dla tego samego odcinka czasu suma fluktuacji dodatnich i ujemnych musi być równa zero:

$$\bar{v} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} v dt$$

$$\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} v' dv = 0$$

Dekompozycja pola prędkości



$$v = \bar{v} + v'$$

v - prędkość chwilowa

\bar{v} - prędkość średnia (w czasie)

v' - fluktuacja prędkości

WNIOSEK 2: suma kwadratów fluktuacji dla rozpatrywanego odcinka czasu nie jest równa zero

$$\bar{v} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} v dt$$

$$\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} v' v' dt = \overline{v' v'}$$

Dekompozycję Reynoldsa można wprowadzić do równania bilansu pędu:

Równanie Reynoldsa

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{v}) + \text{div}(\rho \vec{v} \otimes \vec{v}) = \text{div}(-p \vec{I} + \vec{\tau}^m) + \rho \vec{f}_V$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho(\bar{v} + v')) + \text{div}(\rho(\bar{v} + v')(\bar{v} + v')) = \text{div}(-p \vec{I} + \vec{\tau}^m) + \rho \vec{f}_V$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho(\bar{v} + \cancel{v'})) + \text{div}(\rho(\bar{v}\bar{v} + \cancel{\bar{v}v'} + \cancel{v'\bar{v}} + v'v')) = \text{div}(-p \vec{I} + \vec{\tau}^m) + \rho \vec{f}_V$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho(\bar{v})) + \text{div}(\rho(\bar{v}\bar{v} + v'v')) = \text{div}(-p \vec{I} + \vec{\tau}^m) + \rho \vec{f}_V$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho(\bar{v})) + \text{div}(\rho \bar{v} \otimes \bar{v}) = \text{div}(-p \vec{I} + \vec{\tau}^m - \rho \overline{v'v'}) + \rho \vec{f}_V$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho(\bar{v})) + \text{div}(\rho \bar{v} \otimes \bar{v}) = \text{div}(-p \vec{I} + \vec{\tau}^m + \vec{\tau}^t) + \rho \vec{f}_V$$

$$\vec{\tau}^t = -\rho \overline{v'v'}$$

Równanie Reynoldsa

Równanie Naviera-Stokesa

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{v}) + \text{div}(\rho \vec{v} \otimes \vec{v}) = \text{div}(-p \vec{I} + \vec{\tau}^m) + \rho \vec{f}_V$$

lokalna prędkość średnia

tensor naprężeń lepkich

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \bar{v}) + \text{div}(\rho \bar{v} \otimes \bar{v}) = \text{div}(-p \vec{I} + \vec{\tau}^m + \vec{\tau}^t) + \rho \vec{f}_V$$

Równanie Reynoldsa
(równanie Naviera-Stokesa
wzbogacone o człon opisujący turbulencję)

tensor naprężeń
turbulentnych

Ogólna postać równania bilansu pędu

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \bar{v}) + \text{div}(\rho \bar{v} \otimes \bar{v}) = \text{div}(-p \overset{\leftrightarrow}{I} + \overset{\leftrightarrow}{\tau}^m + \overset{\leftrightarrow}{\tau}^t) + \rho \vec{f}_V$$

$$\overset{\leftrightarrow}{\tau} = \overset{\leftrightarrow}{\tau}^m + \overset{\leftrightarrow}{\tau}^t + \overset{\leftrightarrow}{\tau}^{\text{dyfuzji}} + \overset{\leftrightarrow}{\tau}^{\text{radiacji}} + \dots$$

człon czasowy: uwzględnia
możliwość lokalnej zmiany
bilansowanej wielkości
wewnątrz objętości skończonej

człon dyfuzyjny (nieodwracalny): uwzględnia
możliwość rozpraszania się (dyfuzję) bilansowanej
wielkości wskutek działania czynników na poziomie
(najczęściej) mikro-skalowym

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \bar{v}) + \text{div}(\rho \bar{v} \otimes \bar{v} + p \overset{\leftrightarrow}{I}) = \text{div}(\overset{\leftrightarrow}{\tau}) + \rho \vec{f}_V$$

człon konwekcyjny (odwracalny): uwzględnia
możliwość wpłynięcia do objętości
skończonej, substancji o innych parametrach

człon źródłowy: uwzględnia możliwość
pojawiania się lub zanikania bilansowanej
wielkości wewnątrz objętości skończonej

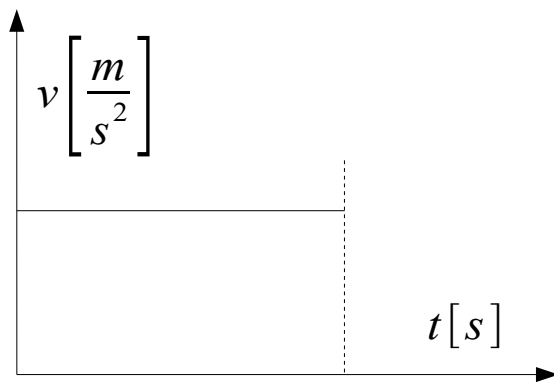
Parametry opisujące turbulencję

Współczynnik intermitencji – wskaźnik opisujący stopień przejścia ruchu laminarnego w ruch turbulentny.

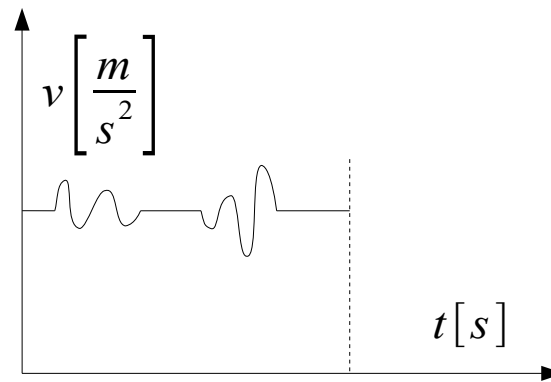
$$\gamma = \frac{t^t}{t^c}$$

t^t - czas występowania ruchu turbulentnego [s]

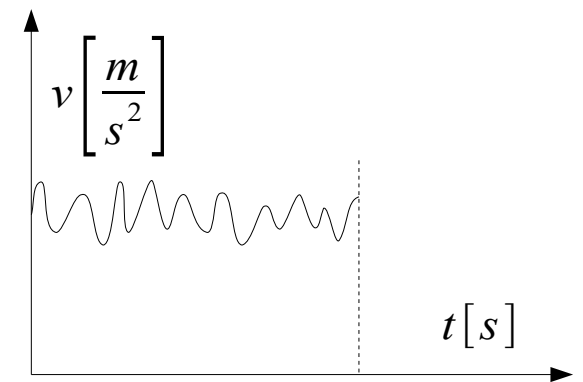
t^c - całkowity czas obserwacji rodzaju ruchu [s]



$\gamma = 0$



$0 < \gamma < 1$



$\gamma = 1$

Parametry opisujące turbulencję

Stopień turbulencji – wskaźnik opisujący intensywność fluktuacji w stosunku do prędkości średniej. Formuła opisująca tę wielkość zależy od przyjętego modelu turbulencji.

$$\epsilon_t = \frac{\sqrt{\frac{1}{s} \cdot \left((\overline{v_x'})^2 + (\overline{v_y'})^2 + (\overline{v_z'})^2 \right)}}{\bar{v}}$$

Energia kinetyczna turbulencji – wskaźnik opisujący średnią energię kinetyczną przenoszoną przez fluktuacje prędkości.

$$k = \frac{1}{2} \cdot \overline{v'v'}$$

Parametry opisujące turbulencję

Prędkość dyssypacji energii kinetycznej turbulencji – wskaźnik opisujący szybkość rozpraszania się energii kinetycznej fluktuacji prędkości.

$$\epsilon = f(k, \dots)$$

Droga mieszania – wielkość opisująca średnią odległość, po przebyciu której element płynu traci cechy wyróżniające go z otoczenia. Formuła opisująca drogę mieszania zależy od modelu turbulencji.

$$l_m = f(k, \epsilon, \dots)$$

Rodzaje turbulencji

Turbulencja izotropowa – występuje, gdy średnie kwadraty fluktuacji prędkości na poszczególnych kierunkach przestrzennych są jednakowe. Oznacza, że w przepływie nie ma preferowanych kierunków fluktuacji.

$$\left(\overline{v_x'}\right)^2 = \left(\overline{v_y'}\right)^2 = \left(\overline{v_z'}\right)^2$$

Turbulencja anizotropowa – przeciwieństwo turbulencji izotropowej. Oznacza, że w przepływie daje się zauważyć preferowane kierunki fluktuacji prędkości.

$$\left(\overline{v_x'}\right)^2 \neq \left(\overline{v_y'}\right)^2 \neq \left(\overline{v_z'}\right)^2$$

Turbulencja homogeniczna (jednorodna) – występuje, gdy prędkość uśredniana w czasie oraz w przestrzeni są sobie równe.

$$\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} v dt = \frac{1}{V} \int_V v dV$$

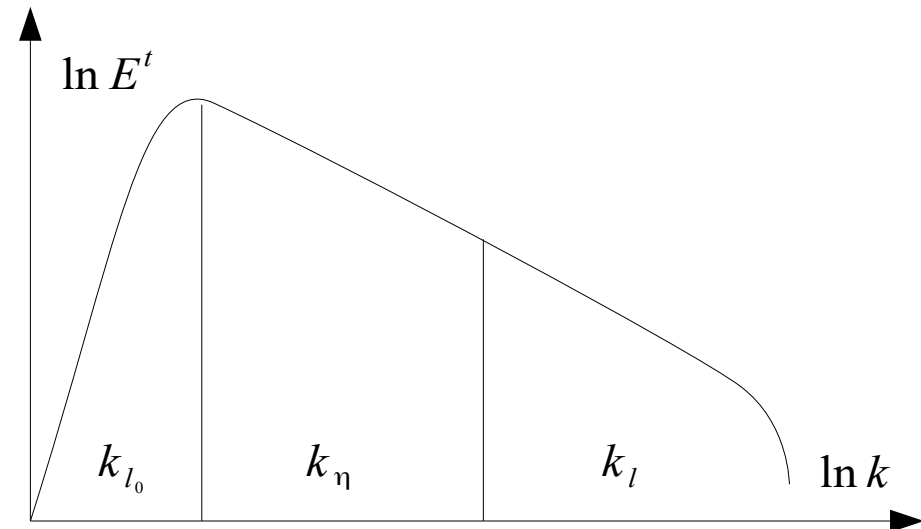
Teoria Kolmogorowa

Teoria Kolmogorowa – teoria, wg której turbulencję traktuje się jako kaskadę wirów, przekazującą energię ruchu płynu od przepływu głównego do poziomu molekularnego. Największe wiry oddziałują z przepływem głównym i z niego pobierają energię – dominują tu siły bezwładności, a siły lepkości są pomijalne. Wiry rozpadają się następnie na coraz mniejsze i szybciej wirujące. Ruch tych wirów hamowany jest przez siły lepkości, a ich energia jest rozpraszana i przechodzi w energię wewnętrzną płynu.

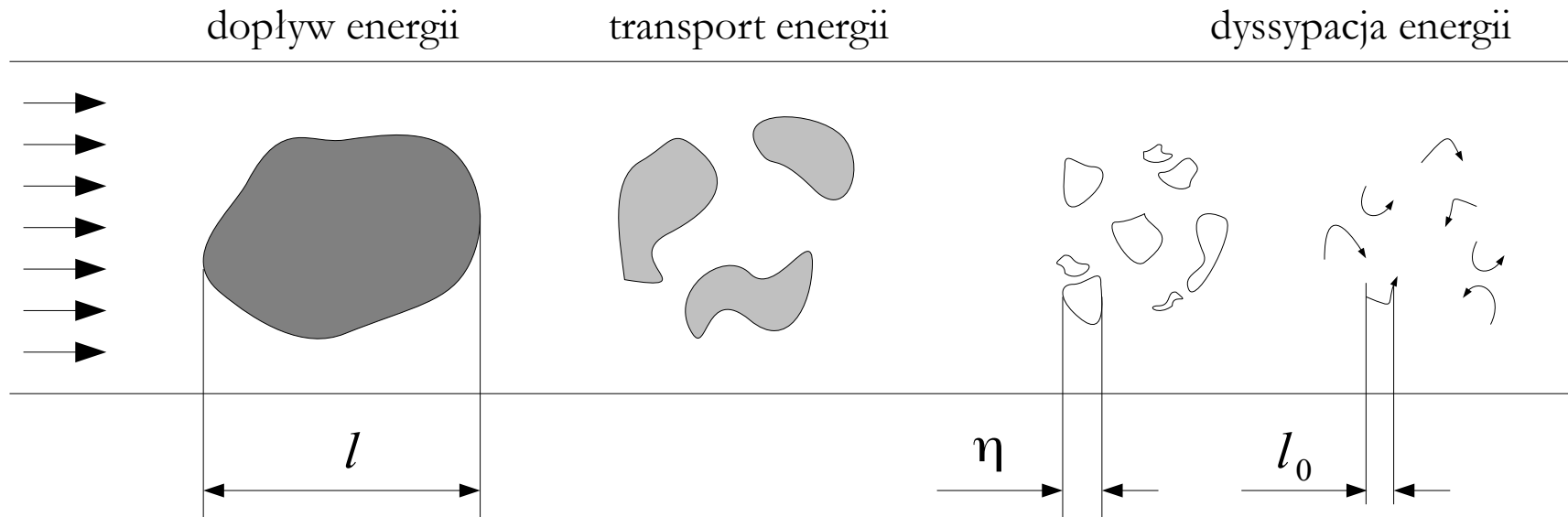
l - skala dużych wirów
(tzw. zewnętrzna skala turbulencji)

η - skala wirów małych ulegających
dyssypacji wskutek zjawiska lepkości

l_0 - skala molekularna



Skale turbulencji



l - skala dużych wirów
(tzw. zewnętrzna skala turbulencji)

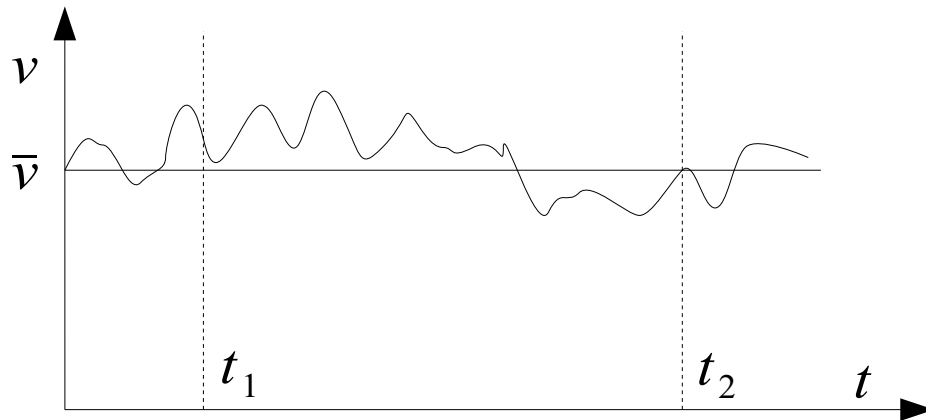
η - skala wirów małych ulegających
dyssypacji wskutek zjawiska lepkości

l_0 - skala molekularna

$$l \gg \eta > l_0$$

$$\frac{l}{\eta} \approx 10^6 \quad \frac{\eta}{l_0} \approx 10^2$$

Struktury koherentne



$$v = \bar{v} + v^* + v'$$

v - prędkość chwilowa

\bar{v} - prędkość średnia (w czasie)

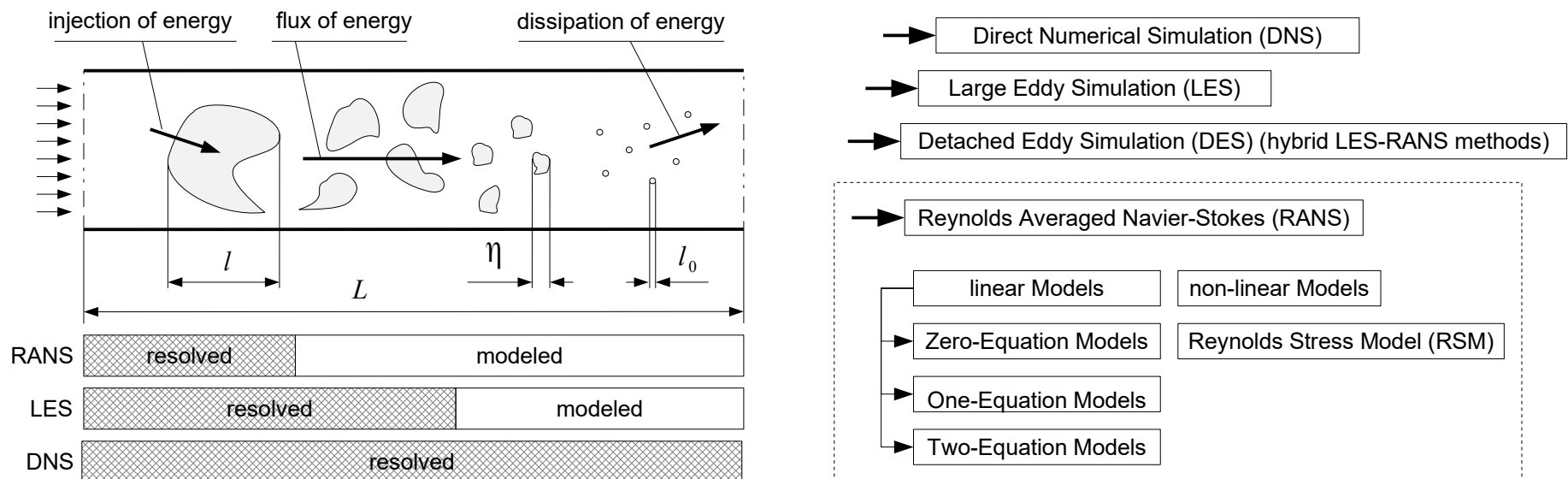
v^* - prędkości struktur koherentnych

v' - fluktuacja prędkości



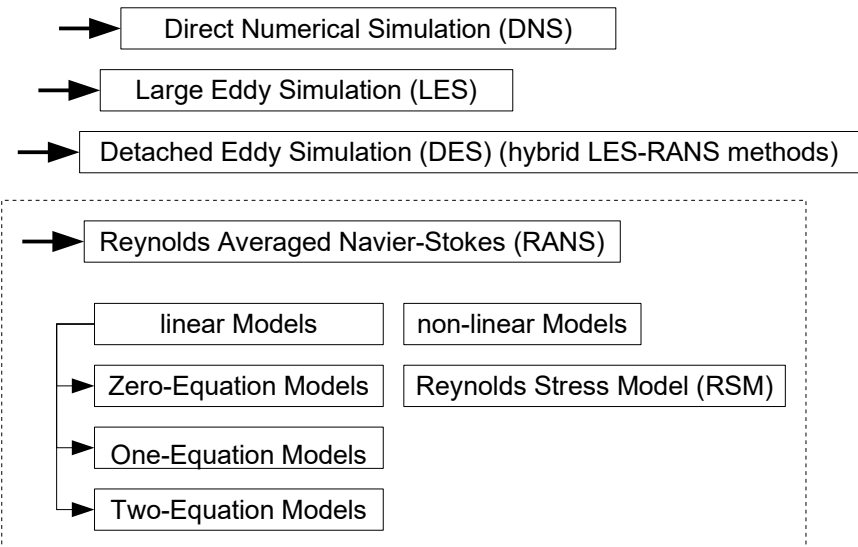
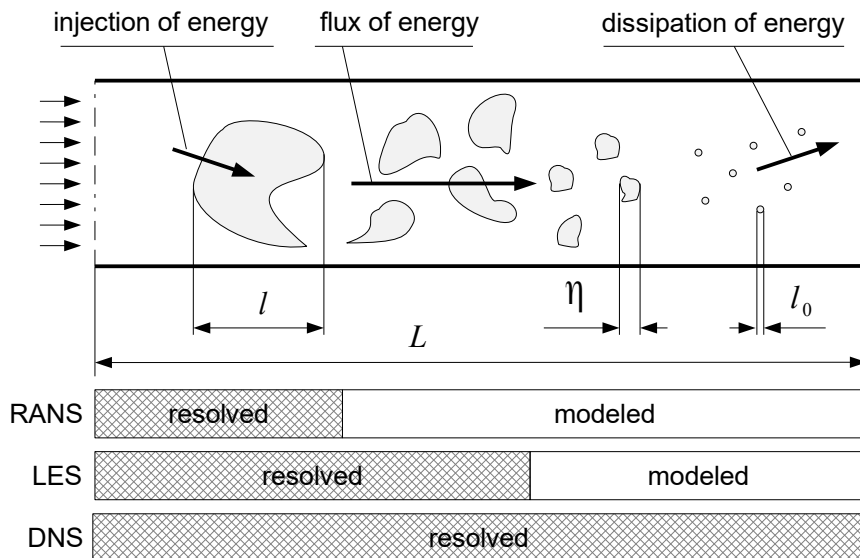
Modele turbulencji

Direct Numerical Simulation (DNS) – metoda numeryczna, w której obliczane są prędkości na wszystkich skalach przestrzennych i czasowych. W metodzie DNS zapotrzebowanie na moc obliczeniową komputerów rośnie proporcjonalnie do trzeciej potęgi liczby Reynoldsa – stąd też metoda może być obecnie stosowana tylko dla przepływów z relatywnie małą liczbą Reynoldsa.



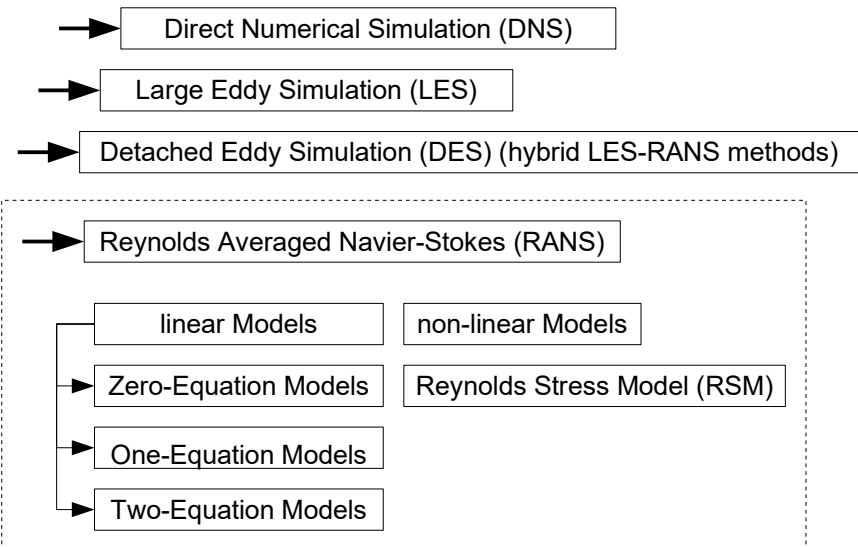
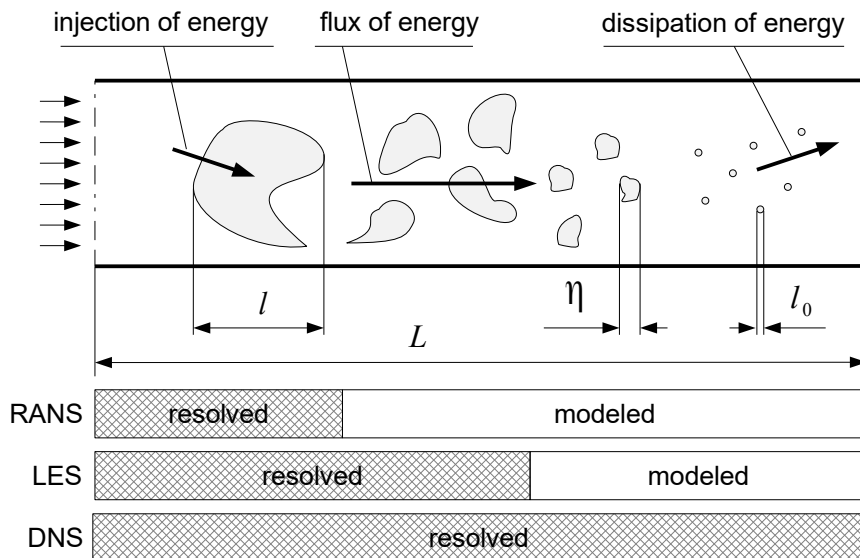
Modele turbulencji

Large Eddy Simulation (LES) – metoda numeryczna, w której obliczane są prędkości tylko w dużej skali przestrzennej. Prędkości w skalach mniejszych szacowane są na podstawie teorii Kołmogorowa. Ta metoda wymaga większych zasobów obliczeniowych niż metody RANS, ale jest o wiele tańsza niż DNS.



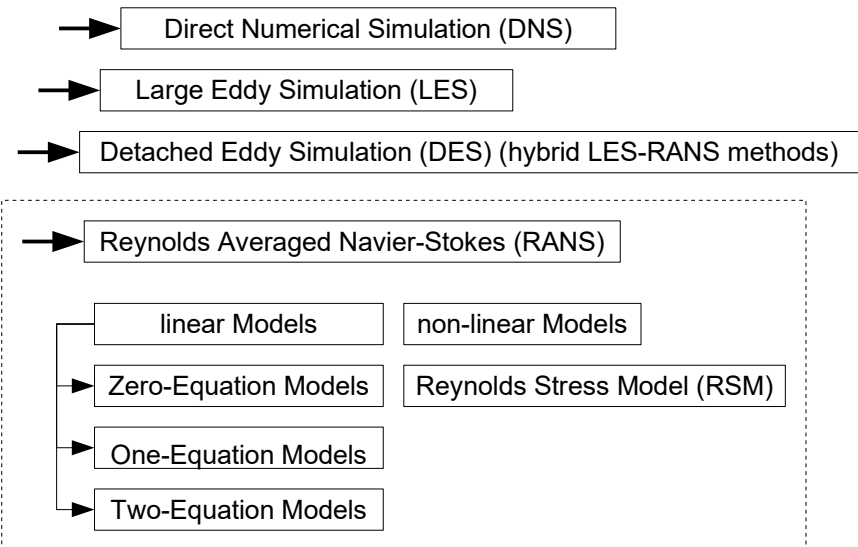
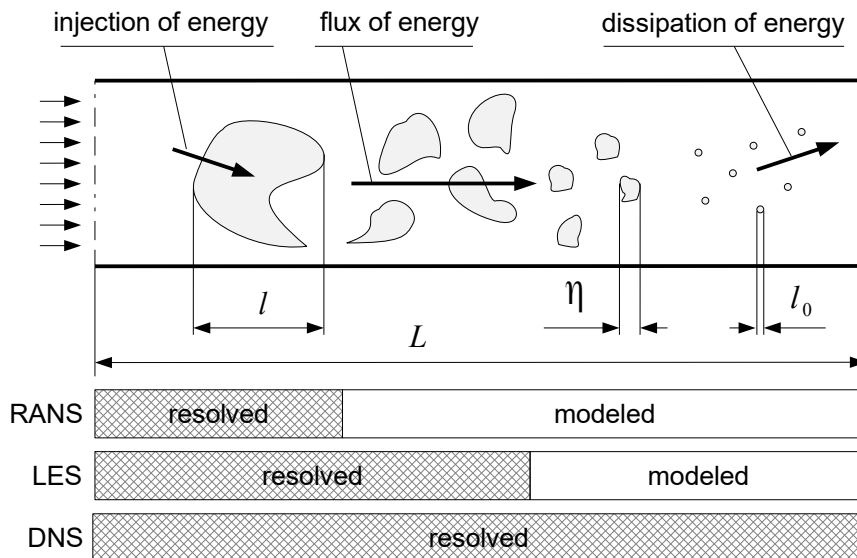
Modele turbulencji

Detached Eddy Simulations (DES) – metoda numeryczna będąca połączeniem metod LES i RANS. Pole prędkości w warstwie przyściennej oraz w obszarach, w których skala długości jest mniejsza niż rozmiar komórek siatki obliczeniowej, obliczane jest modelami RANS, zaś w pozostałych strefach modelem LES.

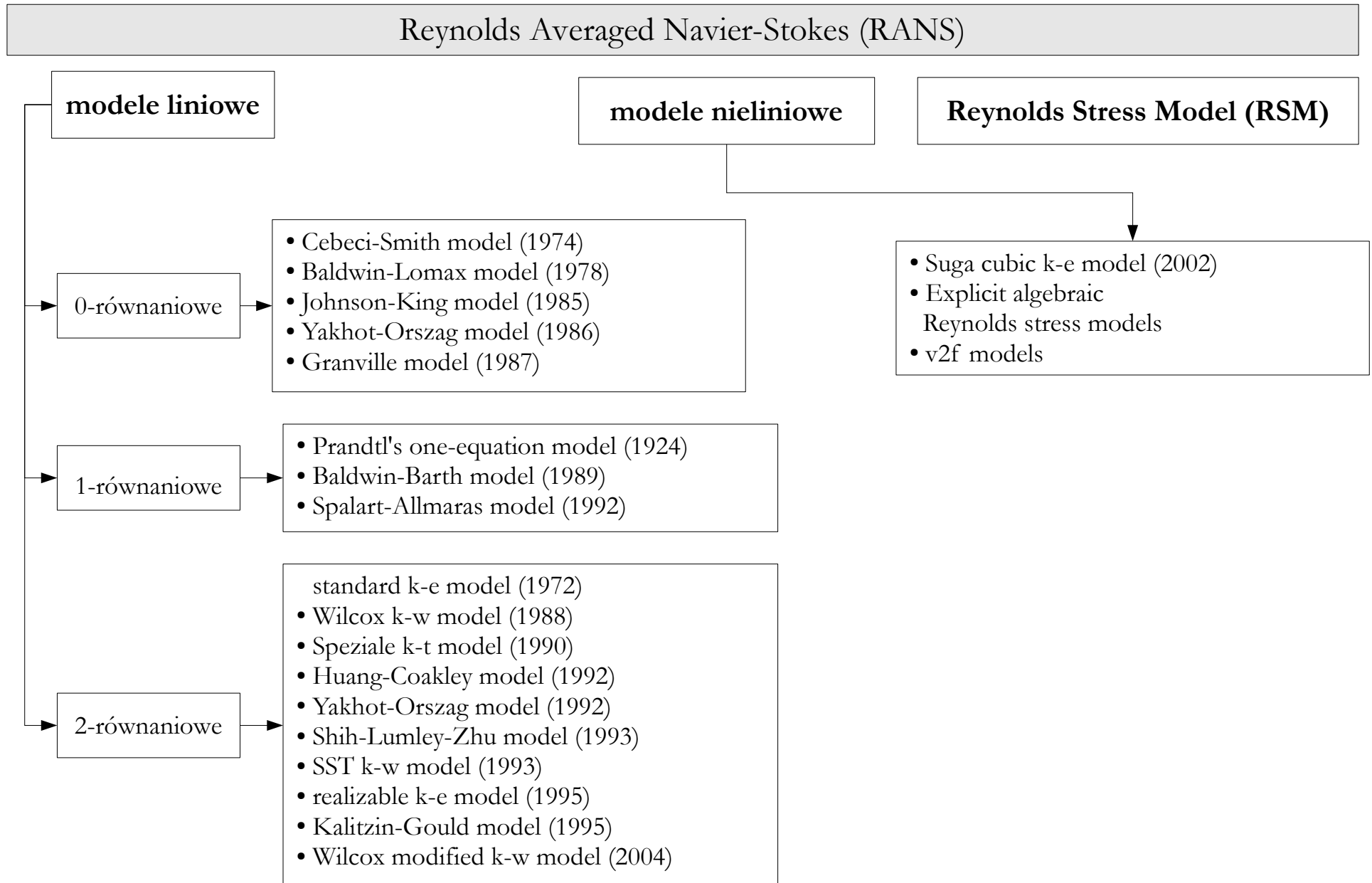


Modele turbulencji

Reynolds Averaged Navier-Stokes (RANS) – modelowanie turbulencji oparte na dekompozycji pola prędkości Reynoldsa. Według tego podejścia, prędkość chwilowa jest sumą prędkości średniej oraz prędkości fluktuacji. Jest to najstarsze i najbardziej popularne podejście do modelowania turbulencji.



Modele turbulencji



Modele turbulencji

$$\boldsymbol{\tau}^m = \begin{vmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{vmatrix} \quad \boldsymbol{\tau}^t = \begin{vmatrix} -\rho \overline{v_x' v_x'} & -\rho \overline{v_x' v_y'} & -\rho \overline{v_x' v_z'} \\ -\rho \overline{v_y' v_x'} & -\rho \overline{v_y' v_y'} & -\rho \overline{v_y' v_z'} \\ -\rho \overline{v_z' v_x'} & -\rho \overline{v_z' v_y'} & -\rho \overline{v_z' v_z'} \end{vmatrix}$$

W ujęciu RANS nie wyznacza się wartości fluktuacji, ale traktuje cały tensor naprężeń turbulentnych jako „korektę” tensora naprężeń lepkich

$$\overleftrightarrow{\boldsymbol{\tau}}^m = 2\mu_l \overleftrightarrow{D} - \frac{2}{3}\mu_l \operatorname{div}(\boldsymbol{v}) \overleftrightarrow{I} + \mu_l' \operatorname{div}(\boldsymbol{v}) \overleftrightarrow{I}$$

$$\overleftrightarrow{\boldsymbol{\tau}}^t = 2\mu_t \overleftrightarrow{D} - \frac{2}{3}\mu_t \operatorname{div}(\boldsymbol{v}) \overleftrightarrow{I} + \mu_t' \operatorname{div}(\boldsymbol{v}) \overleftrightarrow{I}$$

$$\mu_{eff} = \mu_l + \mu_t$$

$$\mu_{eff}' = \mu_l' + \mu_t'$$

$$\overleftrightarrow{\boldsymbol{\tau}}^t = 2\mu_{eff} \overleftrightarrow{D} - \frac{2}{3}\mu_{eff} \operatorname{div}(\boldsymbol{v}) \overleftrightarrow{I} + \mu_{eff}' \operatorname{div}(\boldsymbol{v}) \overleftrightarrow{I}$$

Modele turbulencji

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \bar{v}) + \operatorname{div}(\rho \bar{v} \otimes \bar{v}) = \operatorname{div}(-p \overset{\leftrightarrow}{I} + \overset{\leftrightarrow}{\tau}^m + \overset{\leftrightarrow}{\tau}^t) + \rho \vec{f}_V$$

W ujęciu RANS nie wyznacza się wartości fluktuacji, ale traktuje cały tensor naprężeń turbulentnych jako „korektę” tensora naprężeń lepkich

$$\mu_t = f(\bar{v}, l, k, \epsilon, \dots)$$

\bar{v} - prędkość średnia

l - skala długości

k - energia kinetyczna turbulencji

ϵ - prędkość dyssypacji energii turbulencji

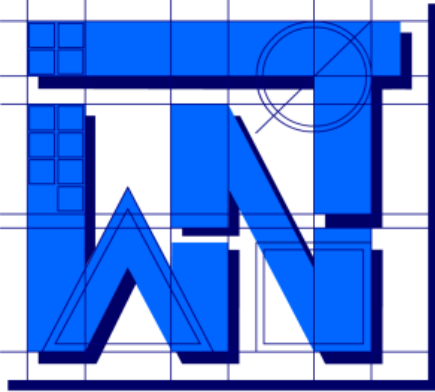
N-równaniowe modele turbulencji – modele wymagające dodania do głównego układu równań bilansowych (masy, pędu i energii), N-równań ewolucji.

Podsumowanie

Zagadnienia:

Równania bilansowe układu jednoskładnikowego, podział równań Mechaniki Płynów, tensor naprężeń lepkich, równanie Naviera-Stokesa, tensor prędkości deformacji, ruch turbulentny, dekompozycja pola prędkości, równanie Reynoldsa, ogólna postać równania bilansu pędu (zapis i znacznie poszczególnych członów), parametry opisujące turbulencję, rodzaje turbulencji, teoria Kołmogorowa, skale turbulencji, struktury koherentne, modele turbulencji.

Wydział Nauk Technicznych



UNIVERSITY OF WARMIA AND MAZURY IN OLSZTYN

The Faculty of Technical Sciences

POLAND, 10-957 Olsztyn, M. Oczapowskiego 11

tel.: (48)(89) 5-23-32-40, fax: (48)(89) 5-23-32-55

URL: <http://www.uwm.edu.pl/edu/sobieski/> (in Polish)

Dziękuję za uwagę

Wojciech Sobieski

Olsztyn, 2013-2015