

UNIVERSITY OF WARMIA AND MAZURY IN OLSZTYN  
The Faculty of Technical Sciences  
POLAND, 10-957 Olsztyn, M. Oczapowskiego 11  
tel.: (48)(89) 5-23-32-40, fax: (48)(89) 5-23-32-55  
URL: <http://www.uwm.edu.pl/edu/sobieski/> (in Polish)



# TERMODYNAMIKA

## Przemiany gazów doskonałych

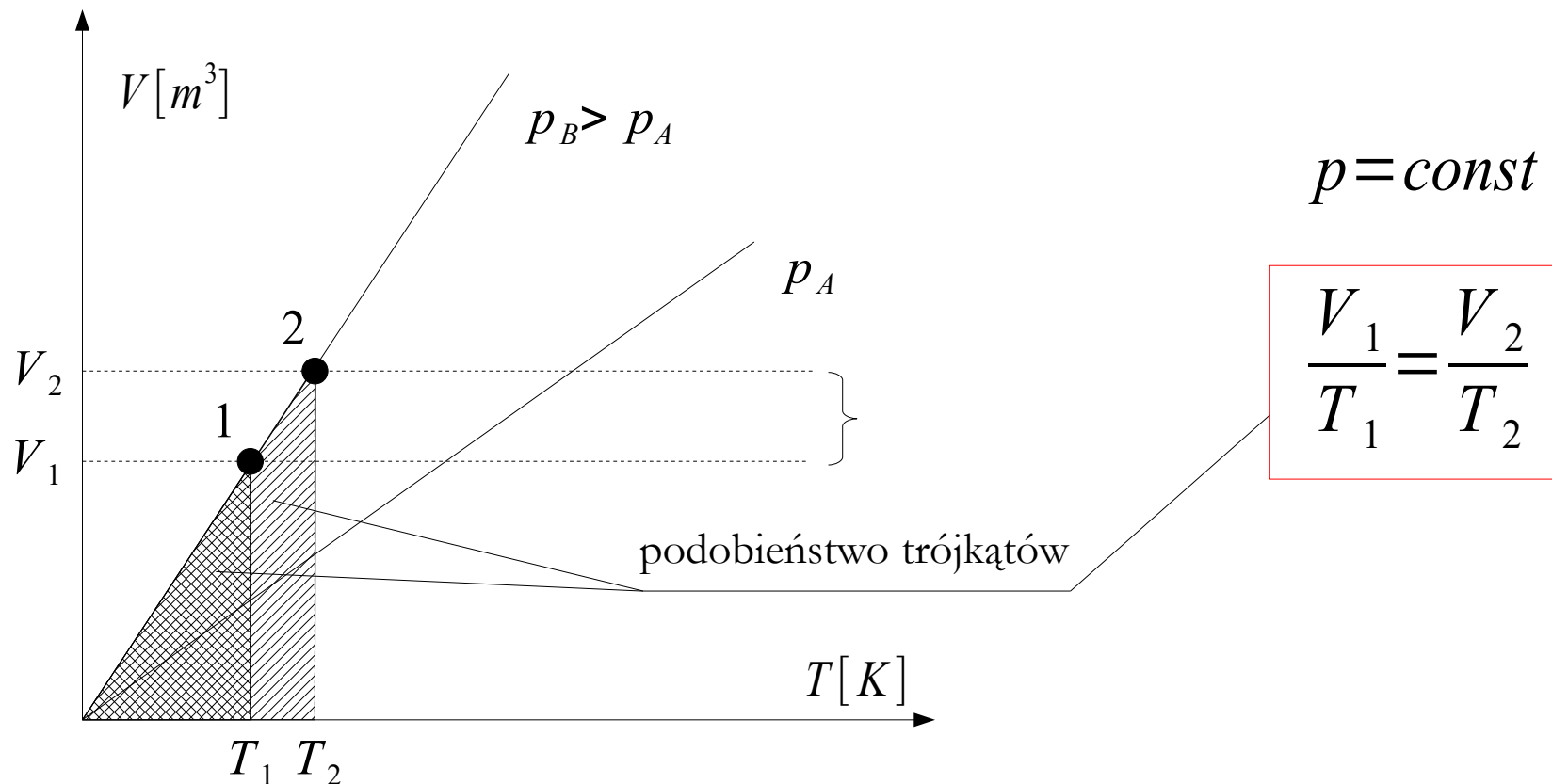
wersja: 5 lipca 2022

Wojciech Sobieski

Olsztyn, 2013-2022

# Prawo Gay-Lussaca

**Prawo Gay-Lussaca** – opisuje związek między temperaturą a objętością przy stałym ciśnieniu. Prawo stanowi, że przy stałym ciśnieniu, objętość danej masy gazu jest wprost proporcjonalna do temperatury.

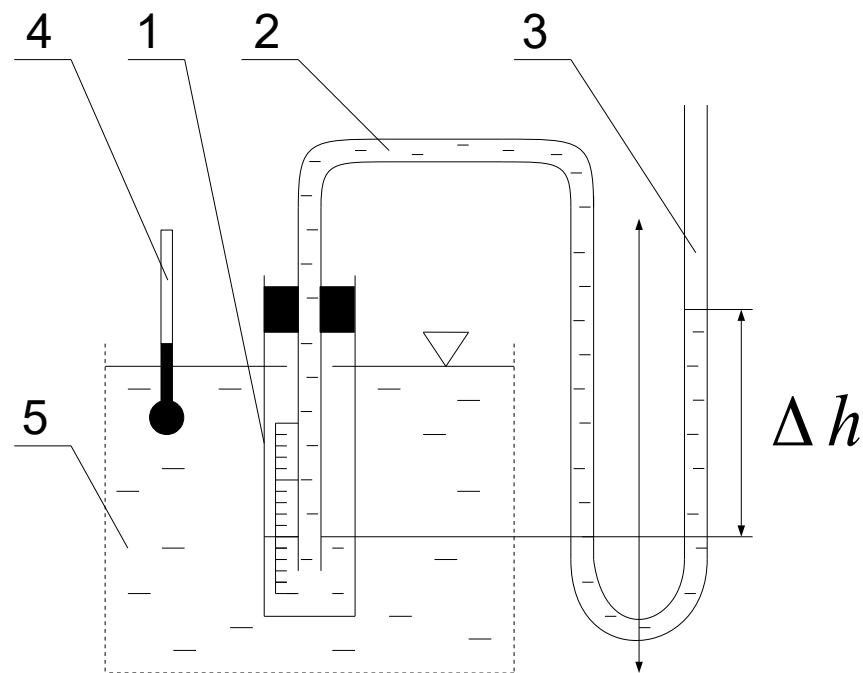


# Prawo Gay-Lussaca

Istotą metody jest wyznaczenie zmian objętości w funkcji temperatury przy stałym ciśnieniu. Jeżeli prawo Gay-Lussaca jest słuszne, otrzymany wykres powinien mieć charakter liniowy.

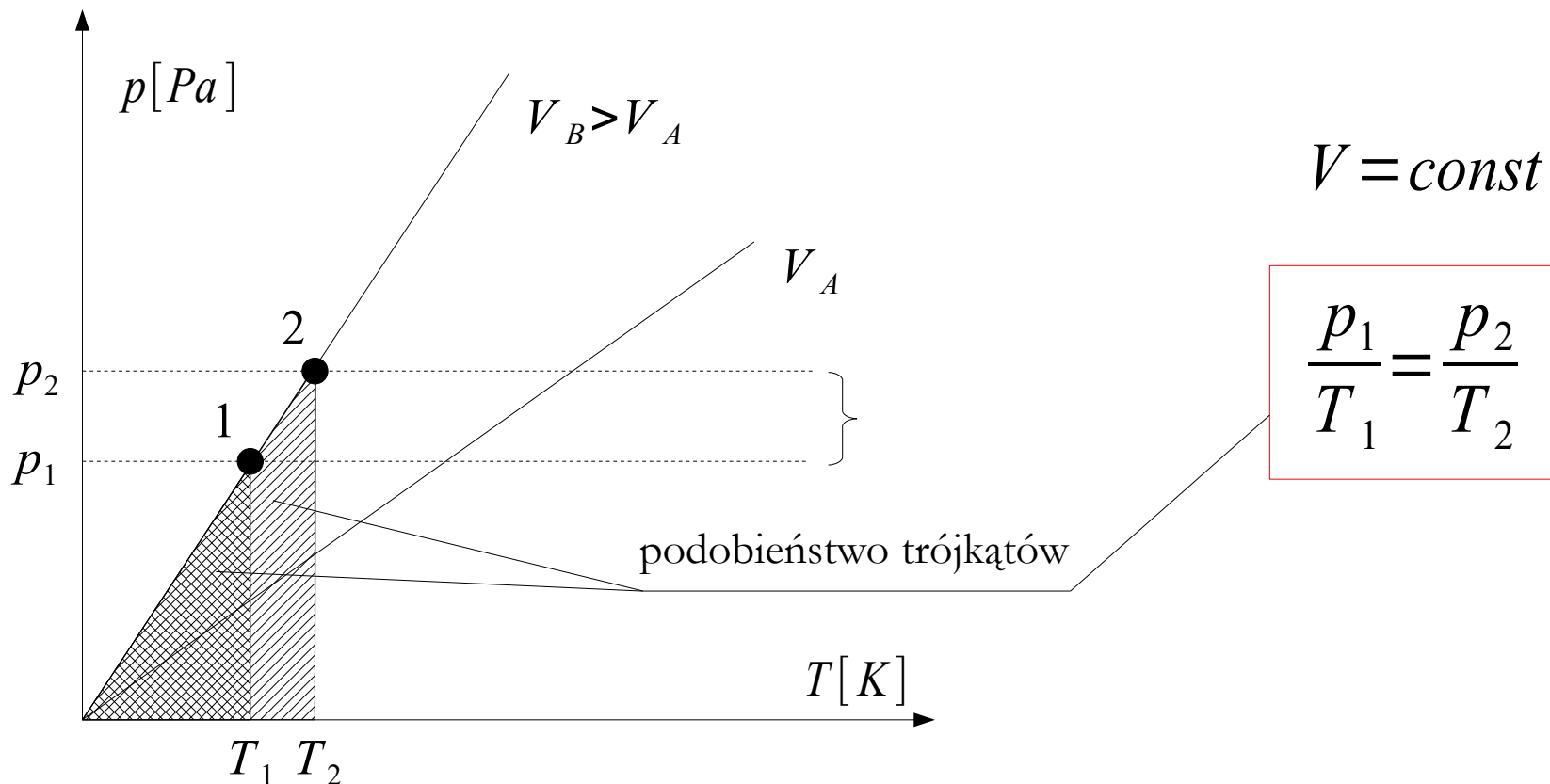
Układ pomiarowy składa się z cylindra miarowego (1) zanurzonego w kąpeli termostatującej (5) oraz z dołączonego do niego manometru w postaci przesuwnej w pionie U-rurki (3). Cylinder i manometr muszą być połączone elastycznym przewodem (2), umożliwiającym zmianę położenia U-rurki. Po zwiększeniu temperatury kąpeli, ciśnienie wewnątrz cylindra wzrośnie, a ciecz manometryczna przepłynie częściowo do U-rurki. Ponieważ ciśnienie ma być stałe, należy przesunąć U-rurkę w górę na taką wysokość, aby różnica poziomów luster cieczy w cylindrze i w U-rurce była zawsze stała.

## Sprawdzenie poprawności prawa Gay-Lussaca



# Prawo Charlesa

**Prawo Charlesa** – opisuje związek między temperaturą a ciśnieniem przy stałej objętości. Prawo to stanowi, że w stałej objętości, ciśnienie danej masy gazu jest wprost proporcjonalne do temperatury.

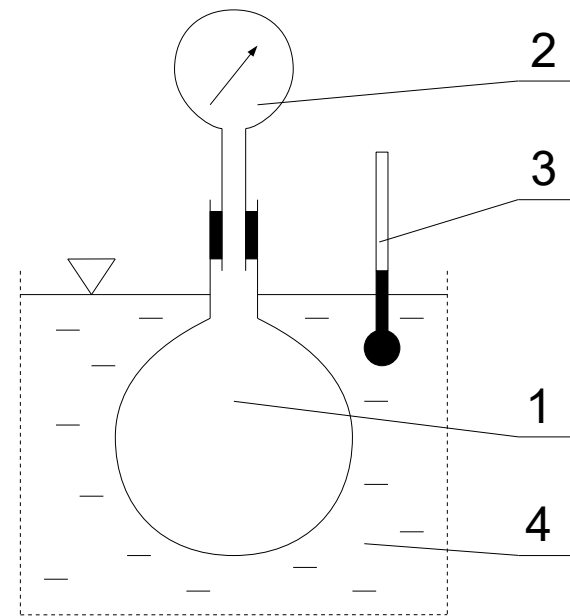


# Prawo Charlesa

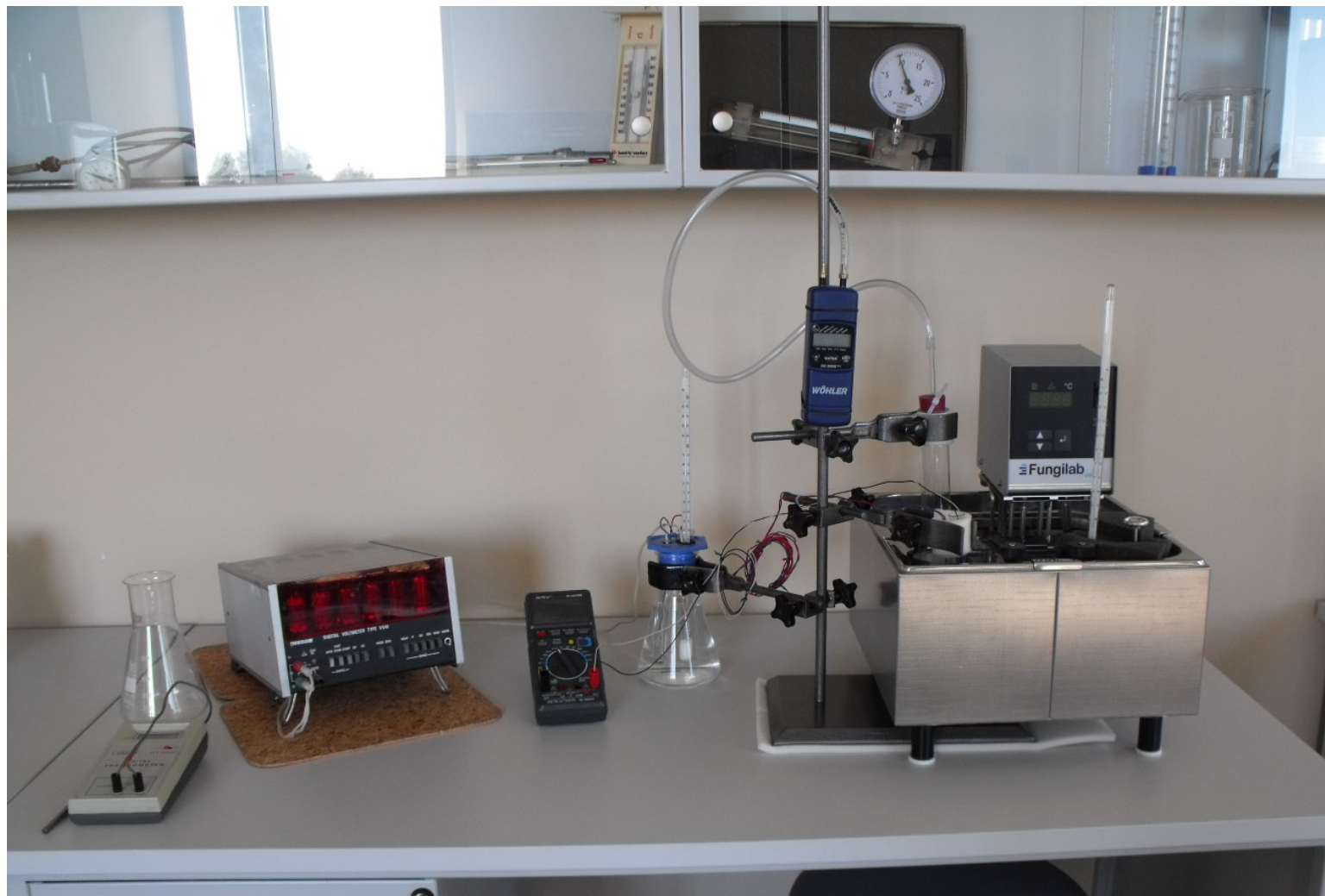
Istotą metody jest wyznaczenie zmian ciśnienia w funkcji temperatury przy stałej objętości. Jeżeli prawo Charlesa jest słuszne, to otrzymany wykres powinien mieć charakter liniowy.

Układ pomiarowy składa się z kolby szklanej zanurzonej w kąpeli termostatujującej oraz z dołączonego do niej manometru. Pomiar polega na rejestracji zmian ciśnienia w funkcji zmian temperatury. Aby zminimalizować błędy, układ pomiarowy należy tak zbudować, aby objętość przewodów połączeniowych była możliwie mała w stosunku do objętości kolby. Ponadto po każdej zmianie temperatury, należy odczekać pewien czas, tak aby gaz znajdujący się w kolbie (powietrze) osiągnął taką samą temperaturę jak kąpiel termostatujująca. Stanie się tak, gdy wskazanie manometru przestanie się zmieniać.

## Sprawdzenie poprawności prawa Charlesa



# Prawo Charlesa



Podczas wykonywania ćwiczenia „Pomiar temperatury metodami kontaktowymi” wykorzystywany jest – działający w oparciu o prawo Charlesa – termometr gazowy.

# Prawo Boyle'a-Mariotte'a

**Prawo Boyle'a-Mariotte'a** – opisuje związek między ciśnieniem a objętością w stałej temperaturze. Prawo to stanowi, że w stałej temperaturze iloczyn ciśnienia i zajmowanej przez gaz doskonały objętości jest stały.

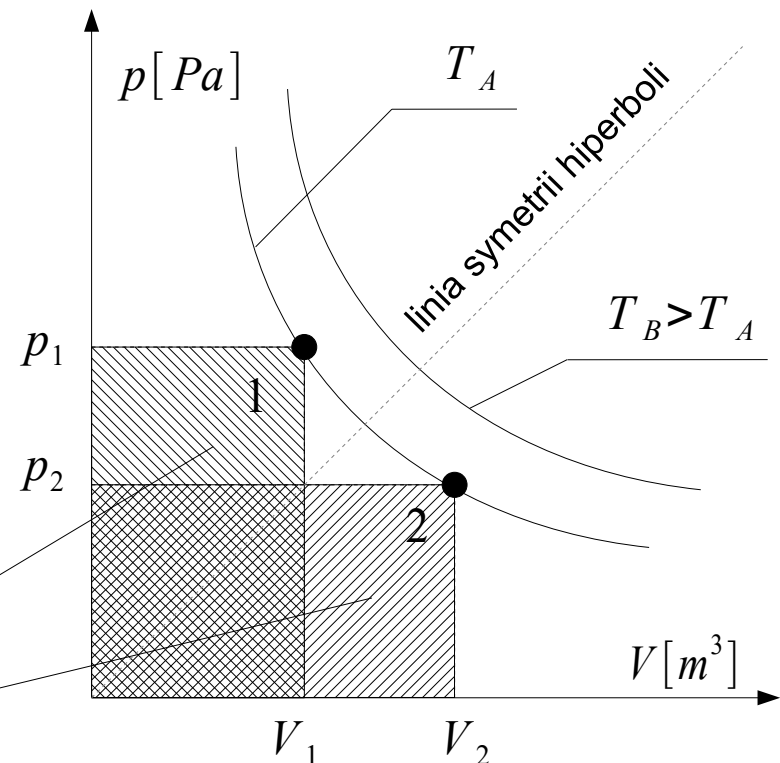
$$T = const$$



$$p \cdot V = const$$

$$p_1 \cdot V_1 = p_2 \cdot V_2$$

poła prostokątów muszą być takie same

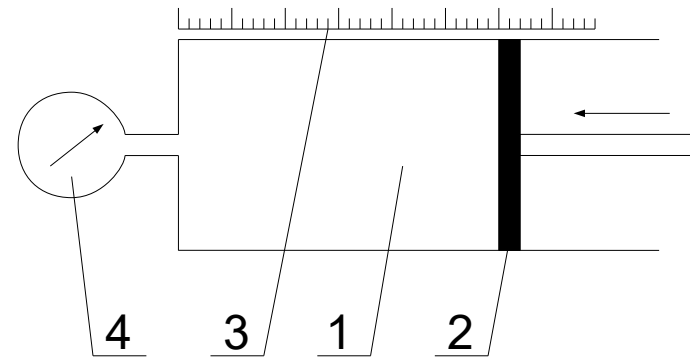


# Prawo Boyle'a-Mariotte'a

Istotą metody jest wyznaczenie zmian ciśnienia w funkcji objętości przy stałej temperaturze. Jeżeli prawo Boyle'a-Mariotte'a jest słuszne, otrzymany wykres powinien mieć charakter hiperboli.

Układ pomiarowy składa się z cylindra (1) zamkniętego szczelnie przesuwnym tłokiem (2) oraz z manometru (4). Znając średnicę tłoka oraz jego przesunięcie, zmierzone za pomocą liniału (3), wyznaczyć można objętość zamkniętego w tłoku gazu (powietrza). Rejestrując tę objętość oraz odpowiadające jej ciśnienie wykreślić można niezbędną charakterystykę i sprawdzić słuszność badanego prawa.

## Sprawdzenie poprawności prawa Boyle'a-Mariotte'a



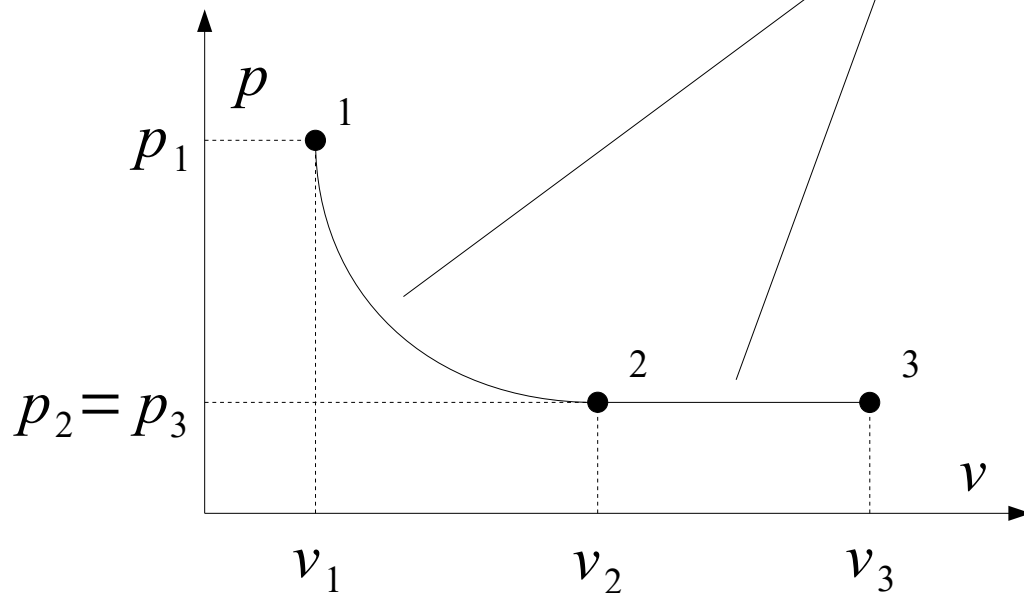


# Równanie Clapeyrona

Rozważmy zmianę 1 mola gazu doskonałego wg rysunku poniżej:

1-2 : odcinek zgodny z prawem Boyle'a-Mariotte'a ( $T = \text{const}$ )

2-3 : odcinek zgodny z prawem Gay-Lussaca ( $p = \text{const}$ )



$$\frac{V_{m,2}}{V_{m,3}} = \frac{T_2}{T_3} \longrightarrow V_{m,2} = V_{m,3} \cdot \frac{T_2}{T_3}$$

$$p_1 \cdot V_{m,1} = p_2 \cdot V_{m,2}$$

$$p_1 \cdot V_{m,1} = p_2 \cdot V_{m,3} \cdot \frac{T_2}{T_3}$$

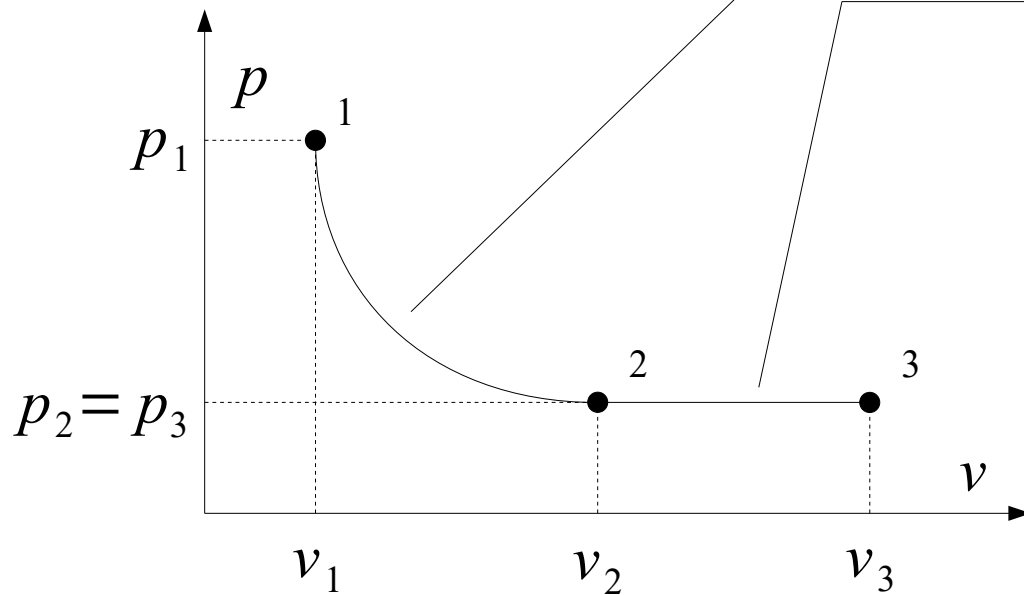
$$\frac{p_1 \cdot V_{m,1}}{T_2} = \frac{p_2 \cdot V_{m,3}}{T_3}$$

# Równanie Clapeyrona

Rozważmy zmianę 1 mola gazu doskonałego wg rysunku poniżej:

1-2 : odcinek zgodny z prawem Boyle'a-Mariotte'a

2-3 : odcinek zgodny z prawem Gay-Lussaca



$$\frac{p_1 \cdot V_{m,1}}{T_2} = \frac{p_2 \cdot V_{m,3}}{T_3}$$

$$\begin{array}{l} T = \text{const} \longrightarrow T_2 = T_1 \\ p = \text{const} \longrightarrow p_2 = p_3 \end{array}$$

$$\frac{p_1 \cdot V_{m,1}}{T_1} = \frac{p_3 \cdot V_{m,3}}{T_3}$$

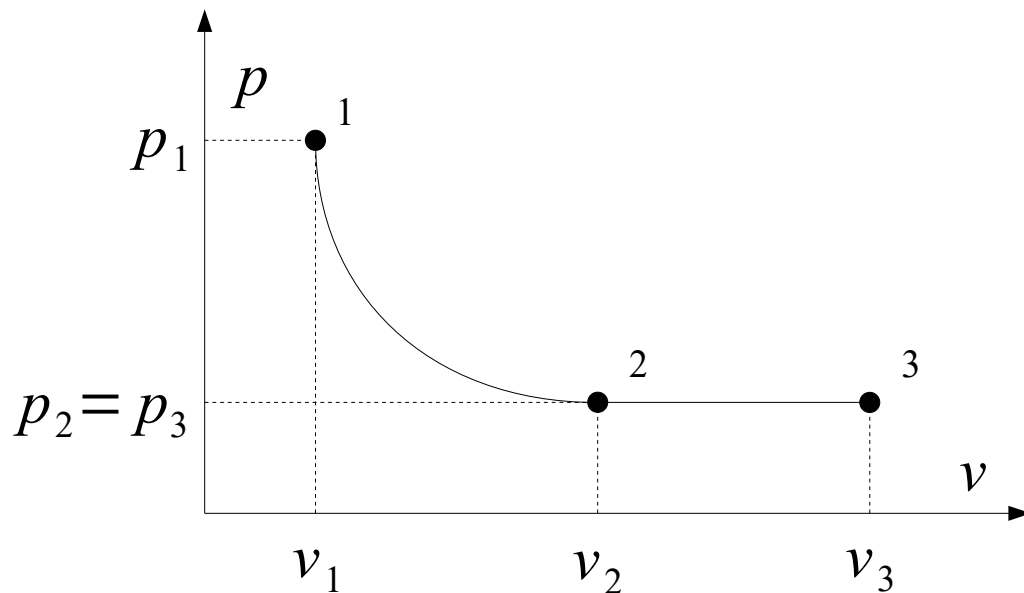
lub: 
$$\frac{p \cdot V_m}{T} = \text{const}$$

# Równanie Clapeyrona

Rozważmy zmianę 1 mola gazu doskonałego wg rysunku poniżej:

1-2 : odcinek zgodny z prawem Boyle'a-Mariotte'a

2-3 : odcinek zgodny z prawem Gay-Lussaca



$$\frac{p \cdot V_m}{T} = R_u \quad \text{const} = R_u$$

$$p \cdot V_m = R_u \cdot T \quad \leftarrow \quad V_m = \frac{V}{n}$$

$$p \cdot V = n \cdot R_u \cdot T$$

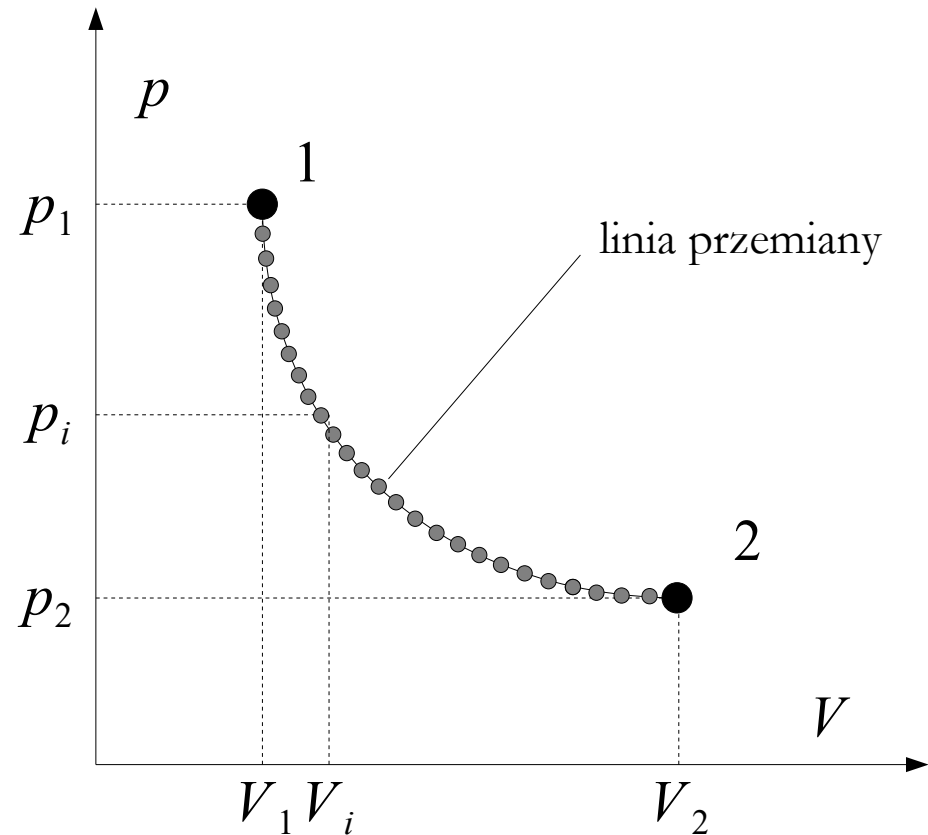
Równanie Clapeyrona (stanu)  
dla n-moli gazu doskonałego

# Przemiana termodynamiczna

**Przemiana termodynamiczna**  
– zmiana stanu układu polegająca na przejściu od jednego stanu (zwanego stanem początkowym) do stanu drugiego (zwanego końcowym) poprzez continuum stanów pośrednich.

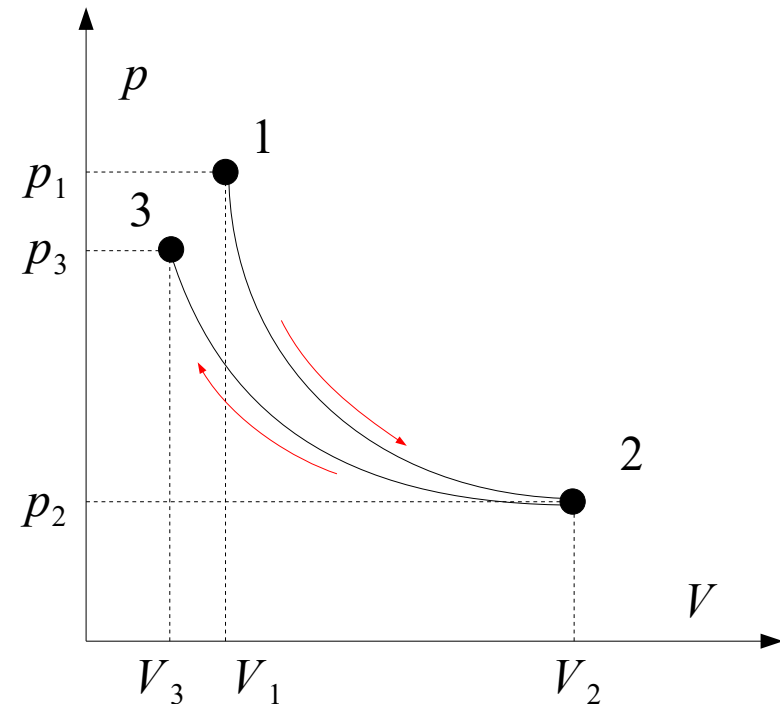
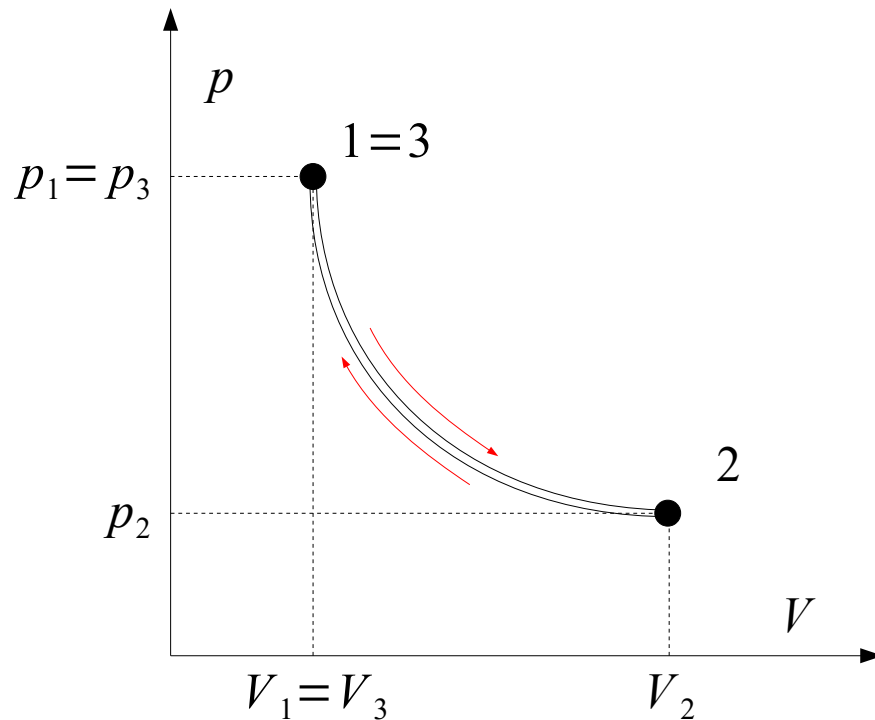
$p_1, V_1$  - współrzędne punktu początkowego przemiany

$p_2, V_2$  - współrzędne punktu końcowego przemiany



# Przemiana odwracalna i nieodwracalna

Przemiana jest **odwracalna**, jeśli od jej stanu końcowego do początkowego można powrócić w taki sposób, że zarówno układ termodynamiczny jak i jego otoczenie uzyskują stan pierwotny. Jeśli tak nie jest to przemiana jest **nieodwracalna**.

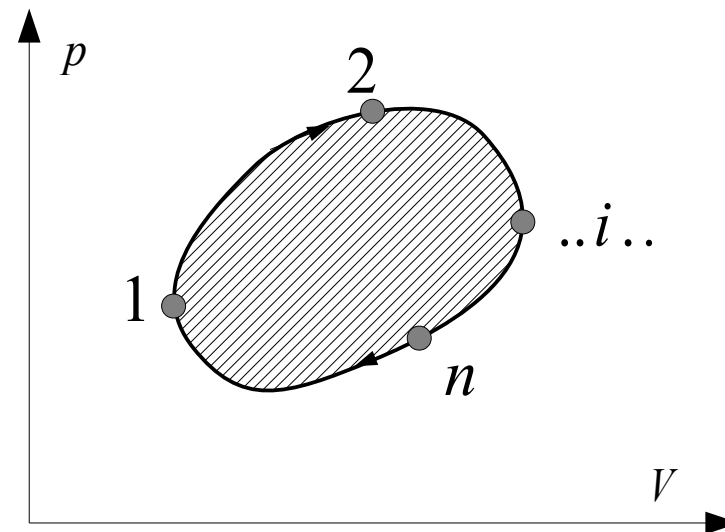


# Obieg termodynamiczny

---

**Obieg termodynamiczny** – cykl przemian, po którym układ wraca do stanu początkowego.

Idea pojęcia obiegu.



# Praca techniczna

---

**Praca techniczna** – suma prac bezwzględnych wykonanych w jednym cyklu pracy maszyny:

$$L_{t1-2} = - \int_{p_1}^{p_2} V(p) dp$$

Praca techniczna ma wartość dodatnią, gdy ciśnienie się obniża:

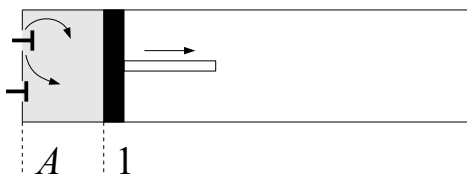
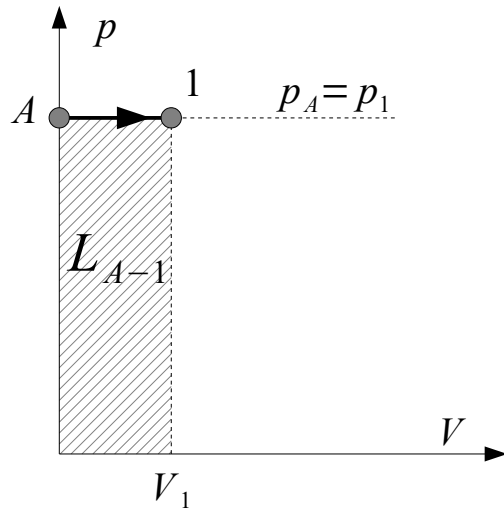
$$p_2 < p_1$$

W przypadku silnika, cykl składa się z napełniania, rozprężania oraz wydmuchu.

W przypadku sprężarki, cykl składa się z ssania, sprężania i tłoczenia.

# Praca techniczna silnika

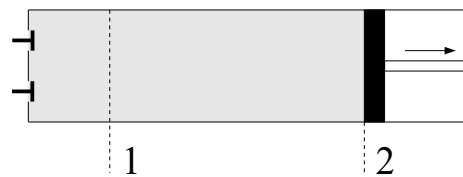
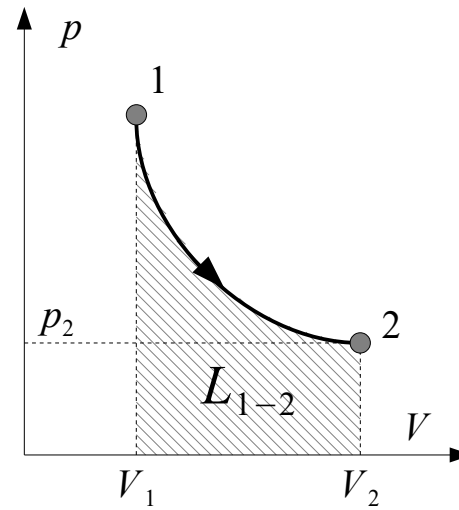
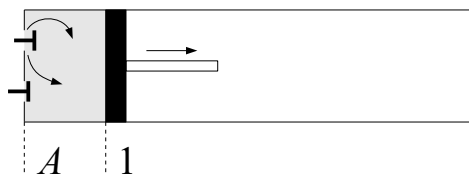
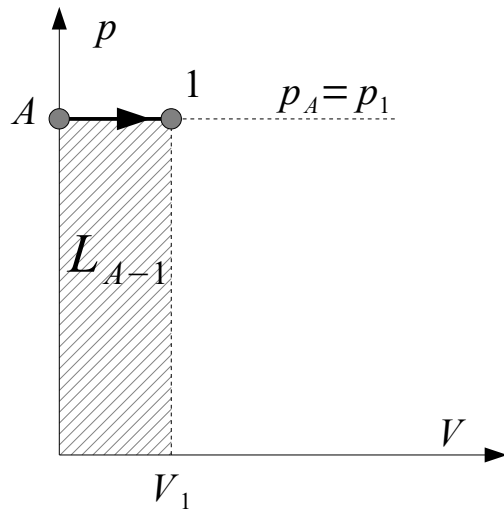
**Praca techniczna silnika – napełnianie cylindra.** Tłok przesuwa się z położenia  $A$  do położenia  $1$ . W tym czasie zawór dolotowy jest otwarty (jest to więc przemiana otwarta) a ciśnienie wewnątrz cylindra nie zmienia się (jest to więc przemiana izobaryczna) i jest równe ciśnieniu  $p_A$ .





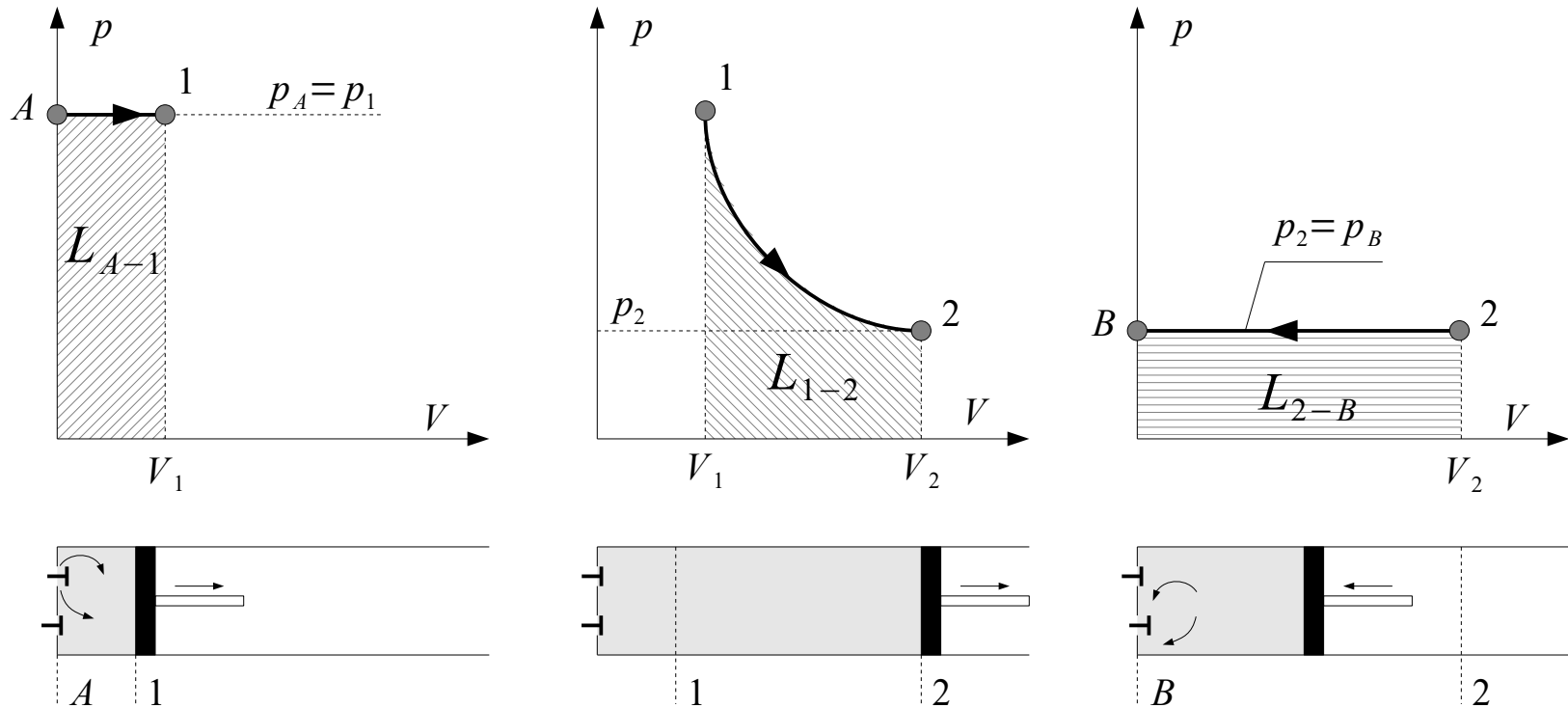
# Praca techniczna silnika

**Praca techniczna silnika – rozprężanie się czynnika.** Obydwa zawory są zamknięte (jest to więc przemiana zamknięta), ciśnienie czynnika maleje a objętość rośnie. Przemiana ta trwa aż do chwili, w której ciśnienie czynnika staje się równe ciśnieniu  $p_B$  panującemu w przewodzie wylotowym.



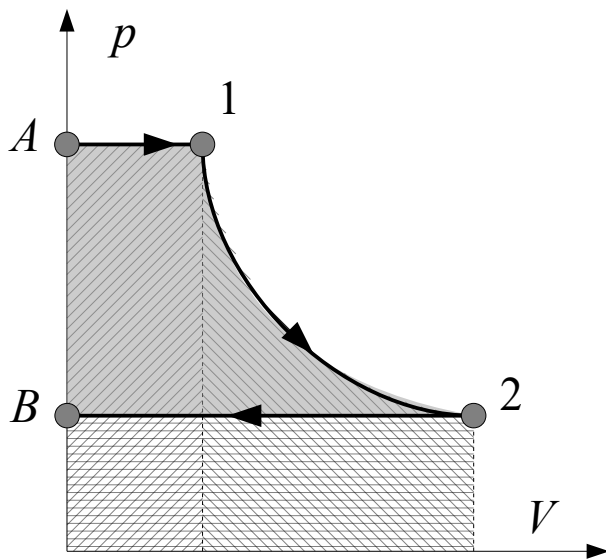
# Praca techniczna silnika

**Praca techniczna silnika – wydmuch.** Tłok przesuwają się z położenia 2 do położenia B. Zawór wylotowy jest otwarty (jest to więc przemiana otwarta) a ciśnienie jest stałe i równa się ciśnieniu  $p_B$ . Przemiana ta kończy się, gdy tłok dotknie dna cylindra.



# Praca techniczna silnika

Praca techniczna silnika jest dodatnia, bo silnik wykonuje pracę kosztem rozprężania się czynnika termodynamicznego (występuje rozprężanie / ekspansja).



$$L_{tl-2} = L_{A-1} + L_{1-2} + L_{2-B}$$

$$L_{A-1} = \int_0^{V_1} p(V) dV = p_1 \cdot \int_0^{V_1} dV = p_1 \cdot V_1$$

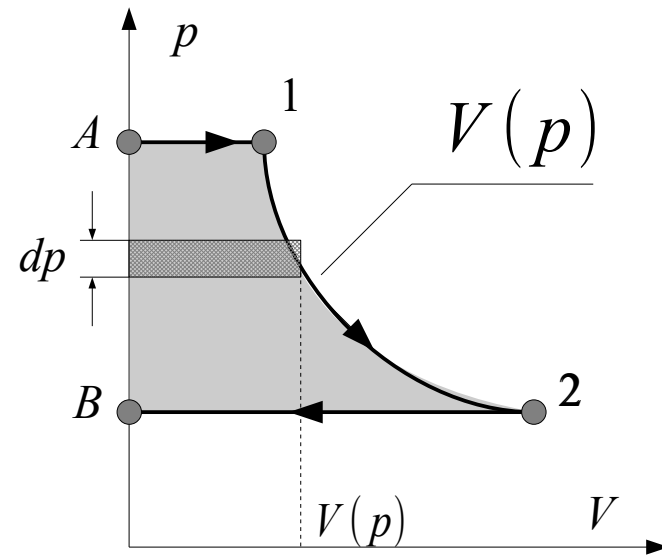
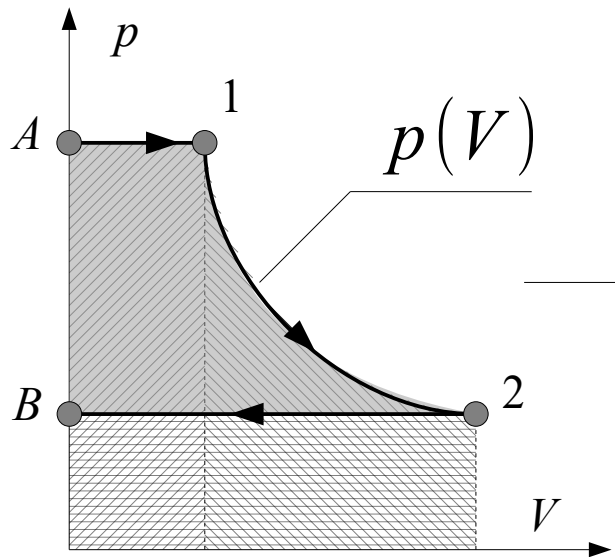
$$L_{1-2} = \int_{V_1}^{V_2} p(V) dV$$

$$L_{2-B} = \int_{V_2}^0 p(V) dV = p_2 \cdot \int_{V_2}^0 dV = -p_2 \cdot V_2$$

$$L_{tl-2} = p_1 \cdot V_1 + \int_{V_1}^{V_2} p(V) dV - p_2 \cdot V_2 > 0$$

# Praca techniczna silnika

Zamiast liczyć trzy pola w układzie  $p = p(V)$  można liczyć jedno pole w układzie  $V = V(p)$ .



$$L_{t1-2} = \int_{p_2}^{p_1} V(p) dp = - \int_{p_1}^{p_2} V(p) dp$$

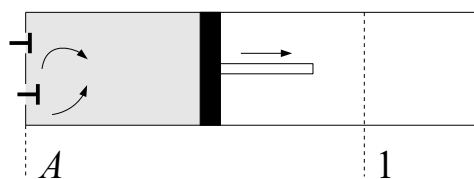
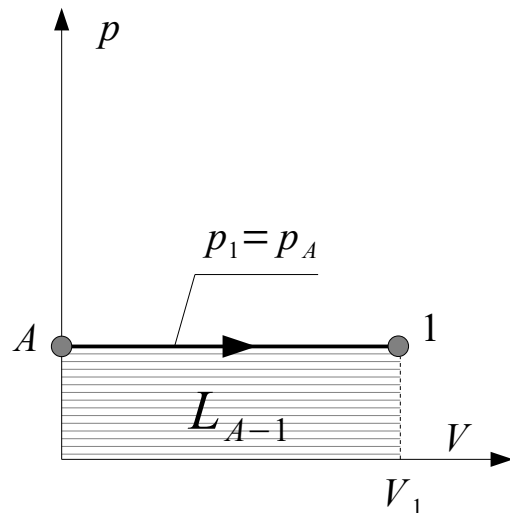
minus wynika ze zmiany granic całkowania

Pole nie może być ujemne, więc znak pracy określamy wg konwencji związanej ze zmianą objętości – tu, w przemianie 1-2, objętość rośnie, a więc że praca jest dodatnia:

$$L_{t1-2} > 0$$

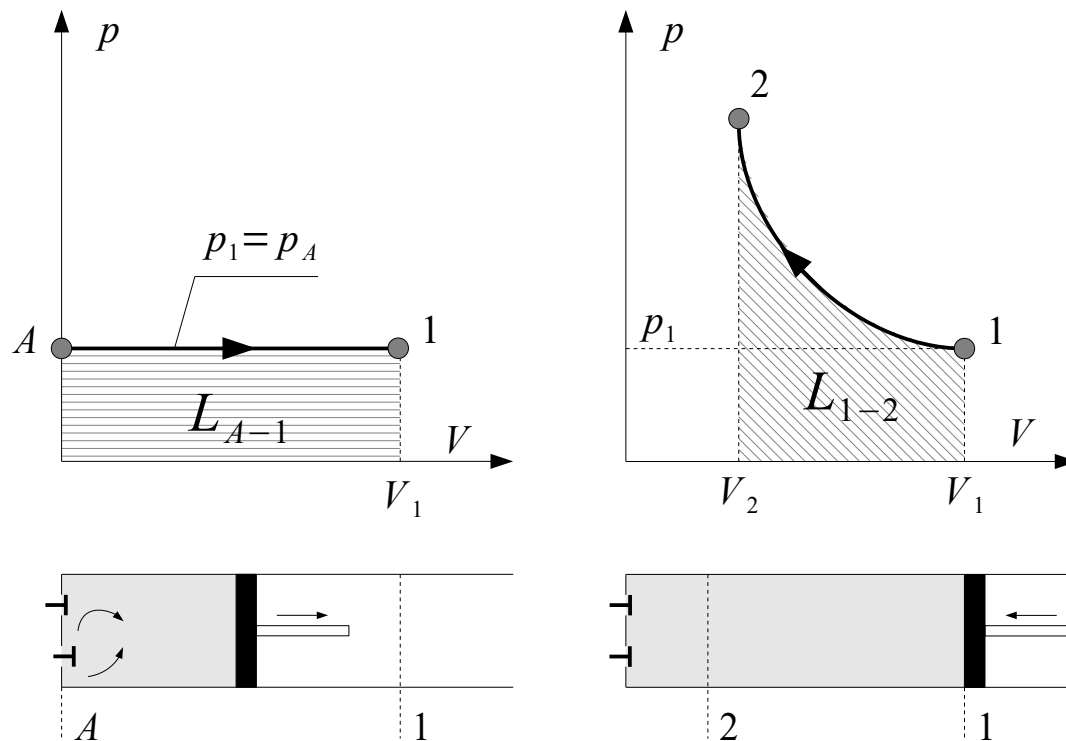
# Praca techniczna sprężarki – ssanie.

**Praca techniczna sprężarki – ssanie.** Tłok przesuwa się z położenia  $A$  do położenia  $1$ . W tym czasie zawór dolotowy jest otwarty (jest to więc przemiana otwarta) a ciśnienie wewnątrz cylindra nie zmienia się (jest to więc przemiana izobaryczna) i jest równe ciśnieniu  $p_A$ .



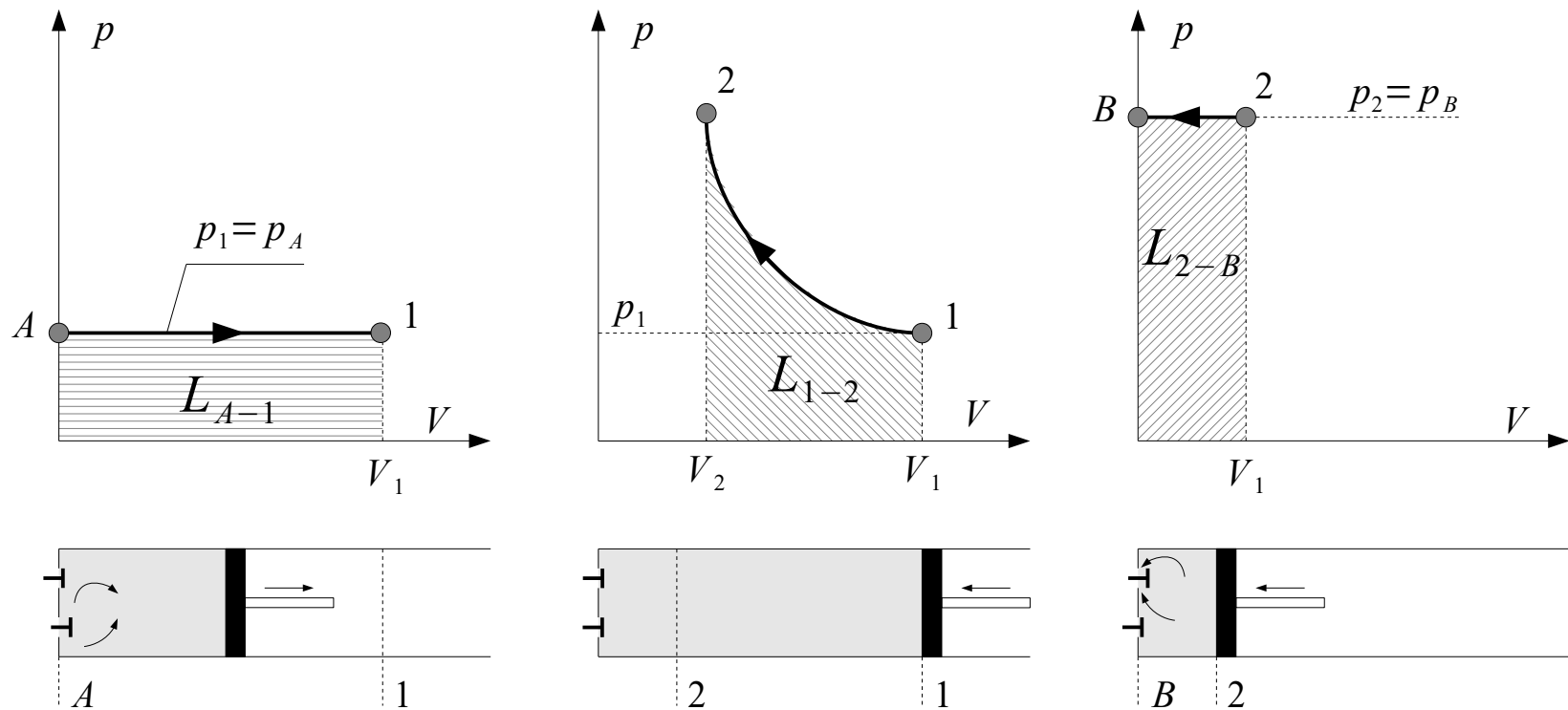
# Praca techniczna sprężarki – sprężanie czynnika.

**Praca techniczna sprężarki – sprężanie czynnika.** Obydwa zawory są zamknięte (jest to więc przemiana zamknięta), ciśnienie czynnika rośnie a objętość maleje. Przemiana ta trwa aż do chwili, w której ciśnienie czynnika staje się równe ciśnieniu  $p_B$  panującemu w przewodzie wylotowym.



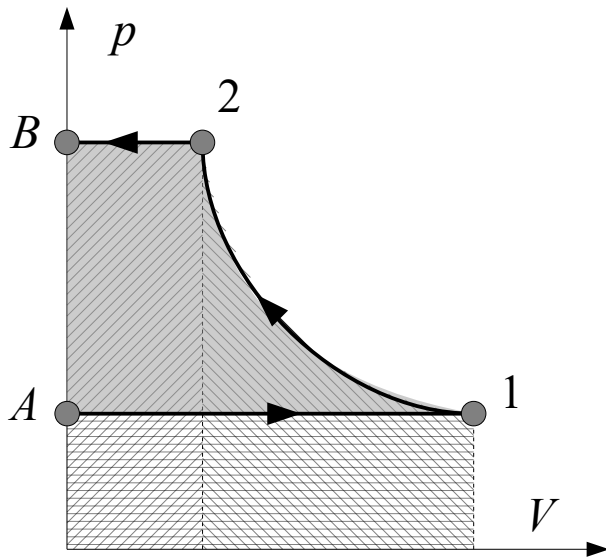
# Praca techniczna sprężarki – tłoczenie

**Praca techniczna sprężarki – tłoczenie.** Tłok przesuwa się z położenia 2 do położenia B. Zawór wylotowy jest otwarty (jest to więc przemiana otwarta) a ciśnienie jest stałe i równa się ciśnieniu  $p_B$ . Przemiana ta kończy się, gdy tłok dotknie dna cylindra.



# Praca techniczna sprężarki

Praca techniczna sprężarki jest ujemna, bo czynnik termodynamiczny zwiększa swoje ciśnienie w wyniku wykonywania nad nim pracy (występuje **sprężanie / kompresja**).



$$L_{t1-2} = L_{A-1} + L_{1-2} + L_{2-B}$$

$$L_{A-1} = \int_0^{V_1} p(V) dV = p_1 \cdot \int_0^{V_1} dV = p_1 \cdot V_1$$

$$L_{1-2} = - \int_{V_1}^{V_2} p(V) dV$$

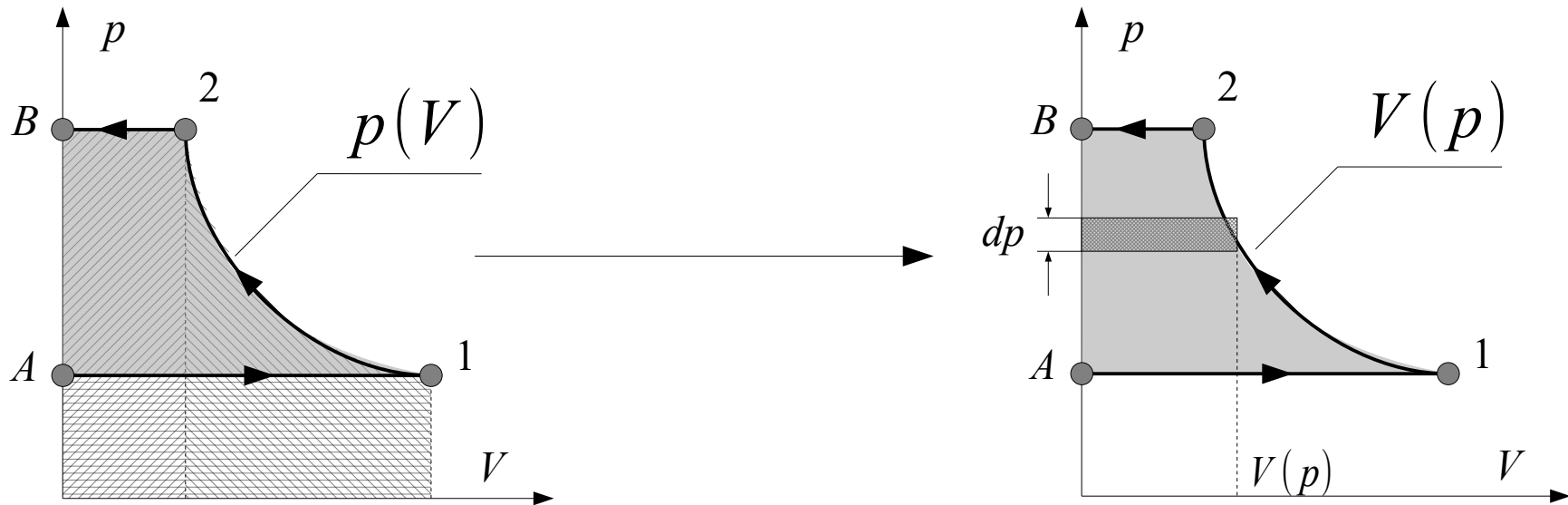
$$L_{2-B} = \int_{V_2}^0 p(V) dV = p_2 \cdot \int_{V_2}^0 dV = -p_2 \cdot V_2$$

$$L_{t1-2} = p_1 \cdot V_1 - \int_{V_1}^{V_2} p(V) dV - p_2 \cdot V_2 < 0$$



# Praca techniczna sprężarki

Zamiast liczyć trzy pola w układzie  $p = p(V)$  można liczyć jedno pole w układzie  $V = V(p)$ .



$$L_{t1-2} = \int_{p_1}^{p_2} V(p) dp = - \int_{p_2}^{p_1} V(p) dp$$

minus wynika ze zmiany granic całkowania

Pole nie może być ujemne, więc znak pracy określamy wg konwencji związanej ze zmianą objętości – tu, w przemianie 1-2, objętość maleje, a więc że praca jest ujemna:

$$L_{t1-2} < 0$$

# Klasyfikacja przemian termodynamicznych

---

Klasyfikacja procesów termodynamicznych ze względu na zmianę ciśnienia:

- rozprężanie,
- proces izobaryczny (proces przy stałym ciśnieniu),
- sprężanie.

Klasyfikacja procesów termodynamicznych ze względu na zmianę objętości:

- ekspansja,
- proces izochoryczny (proces przy stałej objętości),
- kompresja.

# Klasyfikacja przemian termodynamicznych

---

Klasyfikacja procesów termodynamicznych ze względu na stałość określonych wartości funkcji stanu.

Przemiany odwracalne (gazy doskonałe):

- izobaryczna – przemiana przy stałym ciśnieniu
- izochoryczna – przemiana przy stałej objętości
- izotermiczna – przemiana przy stałej temperaturze
- adiabatyczna odwracalna (izentropa) – brak wymiany ciepła z otoczeniem i stała entropia
- politropowa – przemiana spełniająca równanie politropy

Przemiany nieodwracalne (gazy rzeczywiste):

- adiabatyczna nieodwracalna – brak wymiany ciepła z otoczeniem i przyrost entropii
- dławienie:
  - adiabatyczno-izoenergetyczne (np. przepływ gazu między dwoma zbiornikami)
  - adiabatyczno-izentalpowe (np. przepływ płynu przez zwężkę)
- dyfuzja

# Klasyfikacja przemian termodynamicznych

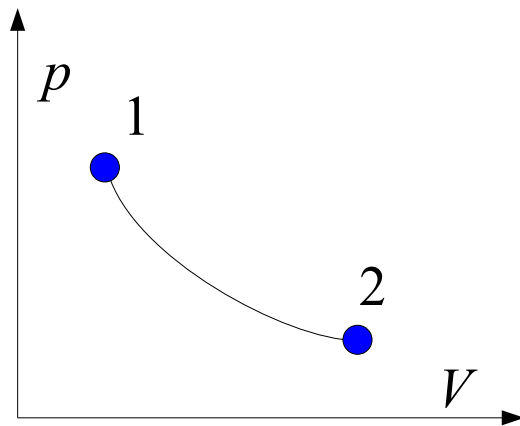
---

**Przemiana adiabatyczna** – proces termodynamiczny, podczas którego wyizolowany układ nie nawiązuje wymiany ciepła, lecz całość energii jest dostarczana lub odbierana z niego jako praca. Przemianę taką można zrealizować dzięki użyciu izolacji termicznej lub wówczas, gdy proces zachodzi na tyle szybko, że przepływ ciepła nie zdąży nastąpić.

**Adiabata odwracalna** (izentropa) – proces, w którym nie występują straty spowodowane lepkością płynu (zakłada się, że gaz jest idealny). Do sprężenia takiego gazu zużywa tyle samo pracy, ile uzyska się potem z jego rozprężenia do pierwotnej objętości. Entropia układu jest stała.

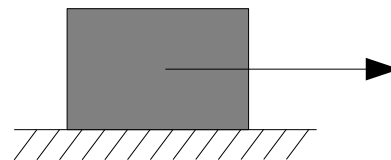
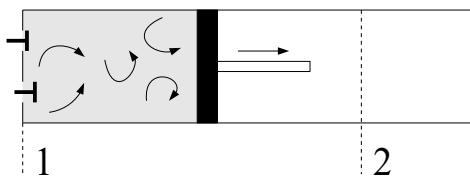
**Adiabata nieodwracalna** – proces, w którym występują straty spowodowane lepkością płynu (tarciami wewnętrznymi). Do sprężenia takiego gazu zużywa więcej pracy, ile uzyska się potem z jego rozprężenia do pierwotnej objętości. Entropia układu rośnie.

# Klasyfikacja przemian termodynamicznych

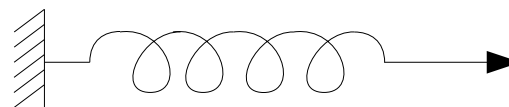


UWAGA: przy szybkim rozprężaniu powstają wiry – skoro są wiry to i jest ruch – skoro jest ruch to jest i tarcie – skoro jest tarcie to są i straty – wniosek: przemiana gazu rzeczywistego jest zawsze nieodwracalna, a straty rosną wraz ze wzrostem prędkości ruchu.

Nie zawsze jest to wada, bo np. w silnikach wiry ułatwiają mieszanie substratów spalania.



- przykład przemiany nieodwracalnej (przesuwanie klocka po podłożu)



- przykład przemiany prawie idealnie odwracalnej (naciąganie sprężyny)

# Przemiana izobaryczna

**Przemiana izobaryczna (izobara)** – przemiana przy stałym ciśnieniu.

$$p \cdot V = n \cdot R_u \cdot T \quad \text{- równanie stanu n-moli GD}$$

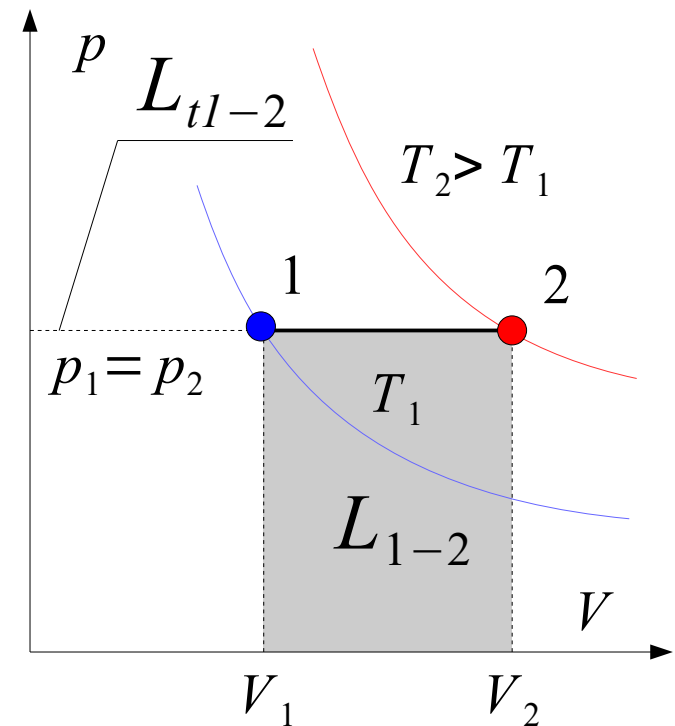
w nawiasie jest nazwa krzywej

$$p = \text{const} \quad \text{- założenie}$$

$$\frac{V}{T} = \frac{n \cdot R_u}{p} = \text{const} \quad \text{- prawo Gay-Lussaca}$$

$$L_{1-2} = \int_{V_1}^{V_2} p(V) dV = p \cdot \int_{V_1}^{V_2} dV = p \cdot (V_2 - V_1)$$

$$L_{t1-2} = \int_{p_1}^{p_2} V(p) dp = 0$$



# Przemiana izochoryczna

**Przemiana izochoryczna** (izochora) – przemiana przy stałej objętości.

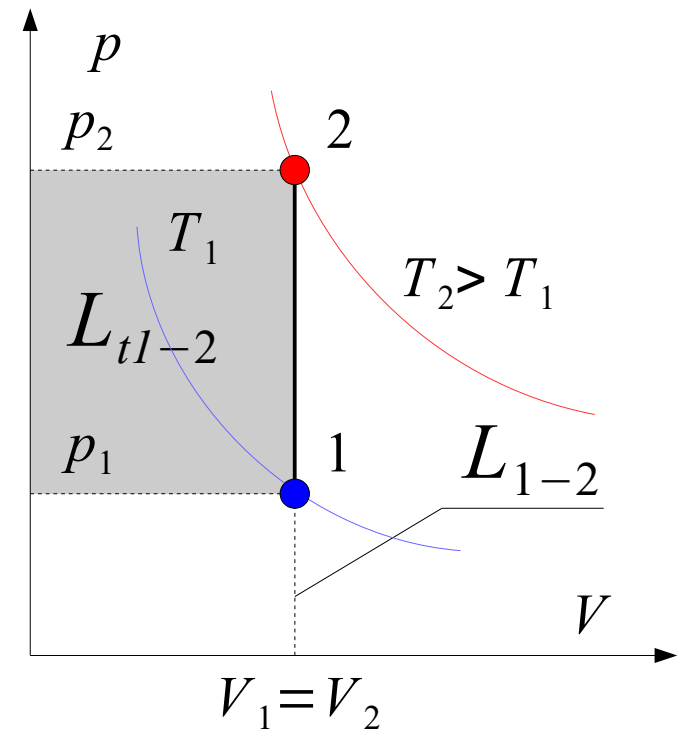
$$p \cdot V = n \cdot R_u \cdot T \quad - \text{równanie stanu n-moli GD}$$

$$V = \text{const} \quad - \text{założenie}$$

$$\frac{p}{T} = \frac{n \cdot R_u}{V} = \text{const} \quad - \text{prawo Charlesa}$$

$$L_{1-2} = \int_{V_1}^{V_2} p(V) dV = 0$$

$$L_{t1-2} = \int_{p_1}^{p_2} V(p) dp = V \int_{p_1}^{p_2} dp = V \cdot (p_2 - p_1)$$



# Przemian izotermiczna

**Przemiana izotermiczna** (izoterma) – przemiana przy stałej temperaturze.

$$p \cdot V = n \cdot R_u \cdot T \quad - \text{równanie stanu } n\text{-moli GD}$$

$$T = \text{const} \quad - \text{założenie}$$

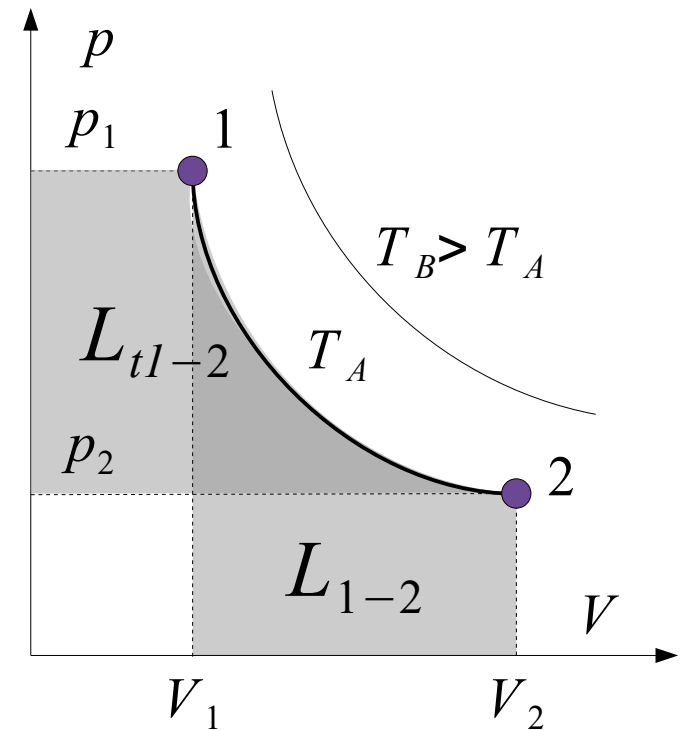
$$p \cdot V = n \cdot R_u \cdot T = \text{const} \quad - \text{prawo Boyle'a-Mariotte'a}$$

$$L_{1-2} = p_1 \cdot V_1 \cdot \ln \frac{V_2}{V_1} = p_1 \cdot V_1 \cdot \ln \frac{p_1}{p_2}$$

$$L_{tl-2} = L_{1-2}$$

lub:  $p_2 V_2$  (bo  $p_1 V_1 = p_2 V_2$ )

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{p_1}{p_2}$$





# Przemian izotermiczna

$$L_{1-2} = \int_{V_1}^{V_2} p(V) dV \quad \leftarrow \quad p = \frac{n R_u T}{V}$$

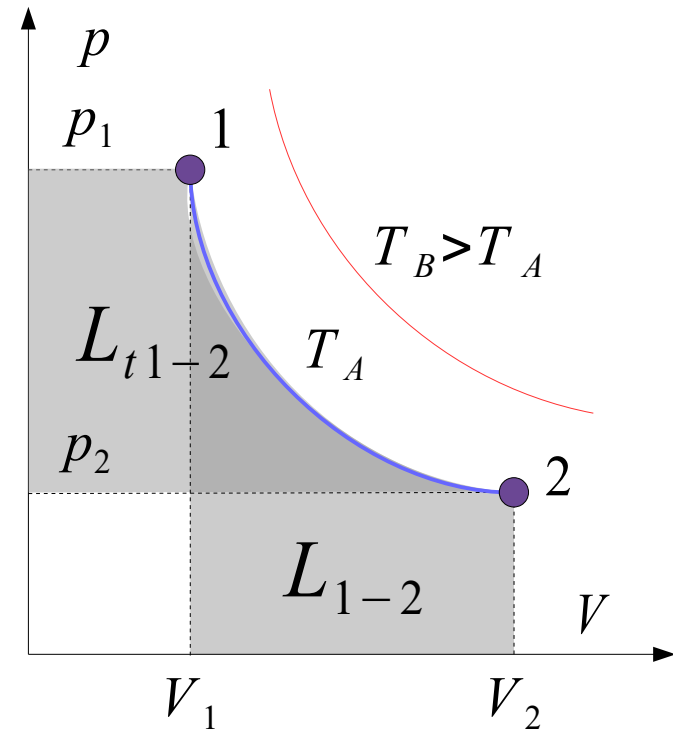
$$L_{1-2} = \int_{V_1}^{V_2} \frac{n \cdot R_u \cdot T}{V} dV = n \cdot R_u \cdot T \int_{V_1}^{V_2} \frac{1}{V} dV$$

$$L_{1-2} = n \cdot R_u \cdot T \cdot \ln V \Big|_{V_1}^{V_2}$$

$$L_{1-2} = n \cdot R_u \cdot T \cdot (\ln V_2 - \ln V_1)$$

$$L_{1-2} = n \cdot R_u \cdot T \cdot \ln \frac{V_2}{V_1} \quad \leftarrow \quad n \cdot R_u \cdot T = p \cdot V = p_1 \cdot V_1 = p_2 \cdot V_2 = \text{const}$$

$$L_{1-2} = p_1 \cdot V_1 \cdot \ln \frac{V_2}{V_1} = p_2 \cdot V_2 \cdot \ln \frac{V_2}{V_1}$$



Wyprowadzenie wzoru na pracę w przemianie izotermicznej. 34

# Przemiana adiabatyczna

Adiabata odwracalna (izentropa) – przemiana bez dostarczania ciepła.

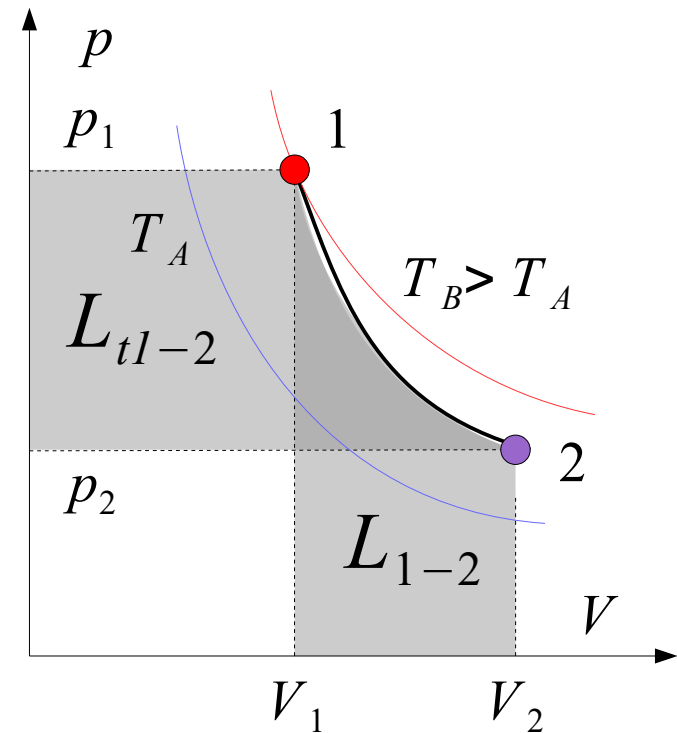
$$p \cdot V^\kappa = \text{const} \quad \kappa = \frac{c_p}{c_v}$$

$$Q = 0 \quad \text{- założenie}$$

$$Q = \Delta U + L$$

$$L_{1-2} = \frac{1}{\kappa - 1} \cdot (p_1 \cdot V_1 - p_2 \cdot V_2)$$

$$L_{t1-2} = \kappa \cdot L_{1-2}$$



# Przemiana adiabatyczna

$$Q = \Delta U + L$$

$$Q = 0$$

Wyprowadzenie  
równania adiłaty.

$$dU + dL = 0$$

$$dU = C_V \cdot dT$$

$$dL = p \cdot dV$$

rozważamy 1 [mol] gazu

$$C_V \cdot dT + p \cdot dV = 0$$

$$p \cdot V = R_u \cdot T$$

obliczenie  
pochodnej  
funkcji  
złożonej

$$C_V \cdot \frac{dp \cdot V + p \cdot dV}{R_u} + p \cdot dV = 0$$

$$dp \cdot V + p \cdot dV = R_u \cdot dT$$

podstawienie

$$dT = \frac{dp \cdot V + p \cdot dV}{R_u}$$

# Przemiana adiabatyczna

---

$$C_V \cdot \frac{dp \cdot V + p \cdot dV}{R_u} + p \cdot dV = 0$$

przekształcenia

$$\frac{C_V}{R_u} \cdot dp \cdot V + \frac{C_V}{R_u} \cdot p \cdot dV + p \cdot dV = 0$$

$$\frac{C_V}{R_u} \cdot dp \cdot V + p \cdot dV \left( 1 + \frac{C_V}{R_u} \right) = 0$$

$$\frac{C_V}{R_u} \cdot dp \cdot V + p \cdot dV \left( \frac{R_u + C_V}{R_u} \right) = 0 \quad / \cdot R_u$$

$$C_V \cdot dp \cdot V + p \cdot dV (R_u + C_V) = 0$$

# Przemiana adiabatyczna

---

$$C_V \cdot dp \cdot V + p \cdot dV (R_u + C_V) = 0 \quad \longleftarrow \quad R_u = C_p - C_V$$

$$C_V \cdot dp \cdot V + p \cdot dV C_p = 0 \quad / : C_V \quad R_u + C_V = C_p$$

$$dp \cdot V + p \cdot dV \frac{C_p}{C_V} = 0 \quad \longleftarrow \quad \kappa = \frac{C_p}{C_V}$$

$$dp \cdot V + p \cdot dV \kappa = 0$$

$$\kappa p \cdot dV = -dp \cdot V$$

$$\kappa \frac{dV}{V} = -\frac{dp}{p}$$

# Przemiana adiabatyczna

---

$$\kappa \frac{dV}{V} = -\frac{dp}{p}$$

$$\kappa \int_{V_0}^V \frac{1}{V} dV = - \int_{p_0}^p \frac{1}{p} dp \quad \longleftarrow \quad \text{obustronne całkowanie}$$

$$\kappa \ln V \Big|_{V_0}^V = - \ln p \Big|_{p_0}^p$$

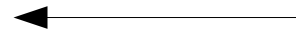
$$\kappa (\ln V - \ln V_0) = -(\ln p - \ln p_0) = \ln p_0 - \ln p$$

$$\kappa \ln \frac{V}{V_0} = \ln \frac{p_0}{p} \quad \longleftarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{twierdzenia o logarytmach:} \\ y \ln x = \ln x^y \\ \ln x + \ln y = \ln (x y) \end{array} \right.$$

# Przemiana adiabatyczna

---

$$\kappa \ln \frac{V}{V_0} = \ln \frac{p_0}{p}$$



twierdzenia o logarytmach:

$$y \ln x = \ln x^y$$

$$\ln x + \ln y = \ln (x y)$$

$$\ln \left( \frac{V}{V_0} \right)^\kappa = \ln \frac{p_0}{p}$$

$$\frac{V^\kappa}{V_0^\kappa} = \frac{p_0}{p}$$

$$p V^\kappa = p_0 V_0^\kappa$$

lub ogólnie:

$$p V^\kappa = C$$

# Przemiana adiabatyczna

$$Q = \Delta U + L$$

$$Q = 0$$

Wyprowadzenie  
równania na pracę.

$$L_{1-2} = U_{1-2} = m \cdot c_v \cdot (T_1 - T_2)$$

$$L_{1-2} = m \cdot c_v \cdot T_1 \cdot \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right)$$

$$R_i = c_p - c_v$$

$$\kappa = \frac{c_p}{c_v}$$

można wykazać  
następujący związek:

$$c_V = c_V \frac{c_p - c_V}{c_p - c_V} = \frac{c_p - c_V}{\frac{c_p - c_V}{c_V}} = \frac{c_p - c_V}{\frac{c_p}{c_V} - 1} = \frac{R_i}{\kappa - 1}$$

$$L_{1-2} = m \cdot \frac{R_i}{\kappa - 1} \cdot T_1 \cdot \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right)$$



# Przemiana adiabatyczna

$$L_{1-2} = \frac{m \cdot R_i \cdot T_1}{\kappa - 1} \left( 1 - \frac{T_2}{T_1} \right) \quad \leftarrow p_1 \cdot V_1 = m \cdot R_i \cdot T_1$$

$$L_{1-2} = \frac{p_1 \cdot V_1}{\kappa - 1} \left( 1 - \frac{T_2}{T_1} \right) = \frac{1}{\kappa - 1} \cdot \left( p_1 \cdot V_1 - p_1 \cdot V_1 \cdot \frac{T_2}{T_1} \right)$$

Równanie stanu spełnione jest w każdym punkcie adiabaty.

$$\begin{aligned} p_1 \cdot V_1 &= m \cdot R_i \cdot T_1 \\ p_2 \cdot V_2 &= m \cdot R_i \cdot T_2 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad p_2 \cdot V_2 = p_1 \cdot V_1 \cdot \frac{T_2}{T_1}$$

$$L_{1-2} = \frac{1}{\kappa - 1} \cdot (p_1 \cdot V_1 - p_2 \cdot V_2)$$

# Przemiana adiabatyczna

Znane jest równanie adiabaty, np.:

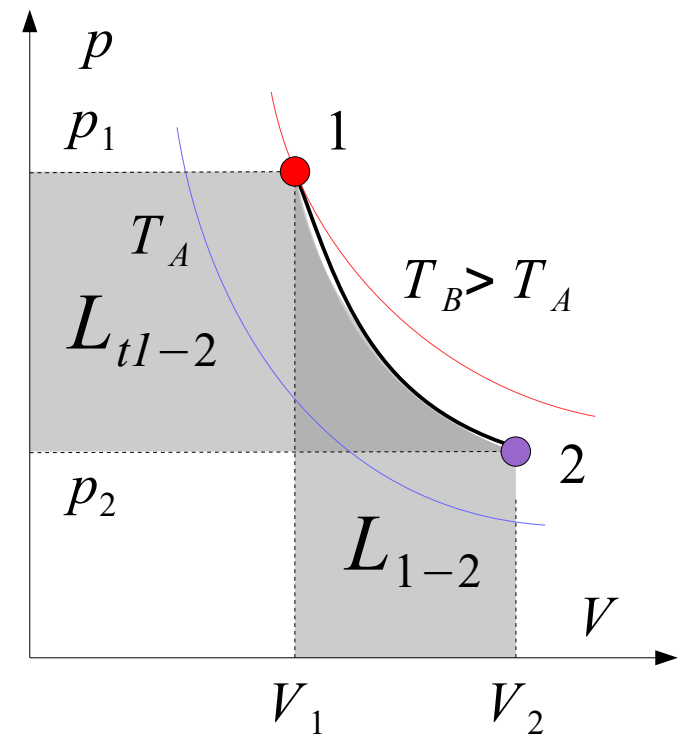
$$p \cdot V^{1.5} = p \cdot V^{\frac{3}{2}} = C$$

Znane są współrzędne punktów 1 i 2  
(jednej danej zazwyczaj brakuje):

$$p_1, p_2, V_1, V_2, T_1, T_2$$

Stałą  $C$  można wyliczyć na podstawie punktu o kompletnych danych.

Obliczanie pracy  
w przemianie adiabatycznej.



# Przemiana adiabatyczna

---

Do obliczenia pracy potrzebne są funkcje  $p(V)$  oraz  $V(p)$ :

$$L_{1-2} = \int_{V_1}^{V_2} p(V) dV$$

$$L_{t1-2} = - \int_{p_1}^{p_2} V(p) dp$$

$$p \cdot V^{\frac{3}{2}} = C$$

$$p = \frac{C}{V^{\frac{3}{2}}}$$

$$V^{\frac{3}{2}} = \frac{C}{p} \quad /^{\frac{2}{3}}$$

$$p = p(V) = C V^{-\frac{3}{2}}$$

$$V = V(p) = \left( \frac{C}{p} \right)^{\frac{2}{3}}$$

# Przemiana adiabatyczna

związek T-p

$$p \cdot V^{\kappa} = C = \text{const}$$



$$p_1 \cdot V_1^{\kappa} = p_2 \cdot V_2^{\kappa}$$

$$\frac{p_1}{p_2} = \left( \frac{V_2}{V_1} \right)^{\kappa}$$

$$\left. \begin{aligned} p_1 \cdot V_1 &= m \cdot R_i \cdot T_1 \rightarrow m \cdot R_i = \frac{p_1 \cdot V_1}{T_1} \\ p_2 \cdot V_2 &= m \cdot R_i \cdot T_2 \rightarrow m \cdot R_i = \frac{p_2 \cdot V_2}{T_2} \end{aligned} \right\}$$

$$\frac{p_1 \cdot V_1}{T_1} = \frac{p_2 \cdot V_2}{T_2}$$

$$\frac{p_1 \cdot T_2}{p_2 \cdot T_1} = \frac{V_2}{V_1}$$

Równanie stanu spełnione jest w każdym punkcie adiabaty.

# Przemiana adiabatyczna

związek T-p

$$\frac{p_1}{p_2} = \left( \frac{V_2}{V_1} \right)^\kappa$$

$$\frac{p_1 \cdot T_2}{p_2 \cdot T_1} = \frac{V_2}{V_1}$$

$$\frac{p_1}{p_2} = \left( \frac{p_1 \cdot T_2}{p_2 \cdot T_1} \right)^\kappa$$

$$\left( \frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{1}{\kappa}} = \frac{p_1 \cdot T_2}{p_2 \cdot T_1} \quad \rightarrow \quad T_2 = \frac{p_2}{p_1} \cdot T_1 \left( \frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{1}{\kappa}} \quad \rightarrow \quad T_2 = \frac{p_2}{p_1} \cdot T_1 \left( \frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{1}{\kappa}}$$

$$T_2 = T_1 \cdot \left( \frac{p_1}{p_2} \right)^{-1} \left( \frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{1}{\kappa}} = T_1 \cdot \left( \frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{1}{\kappa} - 1} = T_1 \cdot \left( \frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{1-\kappa}{\kappa}} = T_1 \cdot \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}$$

# Przemiana adiabatyczna

związek T-V

$$p \cdot V^{\kappa} = C = \text{const}$$



$$p_1 \cdot V_1^{\kappa} = p_2 \cdot V_2^{\kappa}$$

$$\boxed{\frac{p_2}{p_1}} = \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\kappa}$$

$$\left. \begin{aligned} p_1 \cdot V_1 &= m \cdot R_i \cdot T_1 \rightarrow m \cdot R_i = \frac{p_1 \cdot V_1}{T_1} \\ p_2 \cdot V_2 &= m \cdot R_i \cdot T_2 \rightarrow m \cdot R_i = \frac{p_2 \cdot V_2}{T_2} \end{aligned} \right\}$$

$$\frac{p_1 \cdot V_1}{T_1} = \frac{p_2 \cdot V_2}{T_2}$$

$$\boxed{\frac{p_2}{p_1}} = \frac{V_1 \cdot T_2}{V_2 \cdot T_1}$$

Równanie stanu spełnione jest w każdym punkcie adiabaty.

# Przemiana adiabatyczna

związek T-V

$$\frac{p_2}{p_1} = \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\kappa}$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{V_1 \cdot T_2}{V_2 \cdot T_1}$$

$$\frac{V_1 \cdot T_2}{V_2 \cdot T_1} = \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\kappa}$$

Mając związki T-V lub T-p należy wyznaczyć brakującą wartość parametru w punkcie 1 lub 2, a następnie obliczyć pracę i/lub pracę techniczną.

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{V_2}{V_1} \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\kappa}$$

$$T_2 = T_1 \cdot \frac{V_2}{V_1} \left( \frac{V_2}{V_1} \right)^{-\kappa}$$

$$T_2 = T_1 \cdot \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\kappa-1}$$

# Przemiana politropowa

**Przemiana politropowa** (politropa) – przemiana w gazie doskonałym, dla której spełnione jest równanie

$$p \cdot V^{\mathcal{G}} = \text{const}$$

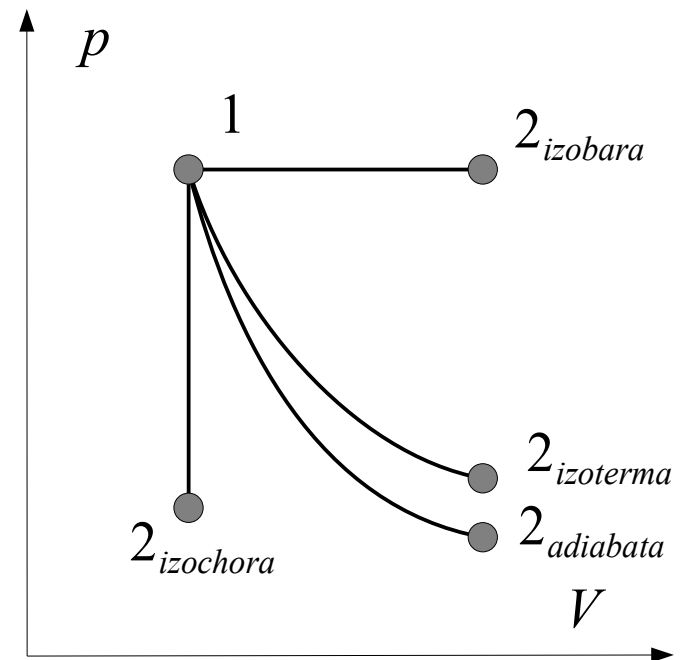
wykładnik  
politropy

$\mathcal{G}$

- $\mathcal{G} = 0$  - izobara
- $\mathcal{G} = \infty$  - izochora
- $\mathcal{G} = 1$  - izoterma
- $\mathcal{G} = \kappa$  - adiabata

$$L_{1-2} = \frac{1}{\mathcal{G} - 1} \cdot (p_1 \cdot V_1 - p_2 \cdot V_2)$$

$$L_{tl-2} = \mathcal{G} \cdot L_{1-2}$$



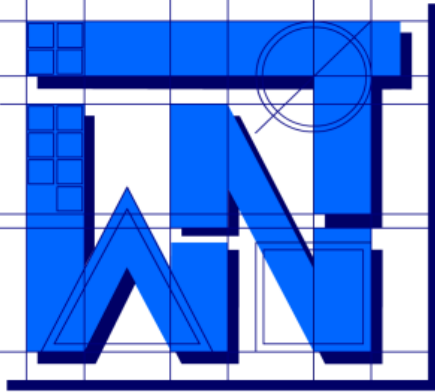


# Podsumowanie

---

## Zagadnienia:

Prawo Gay-Lussaca, prawo Charlesa, prawo Boyle'a-Mariotte'a, równanie Clapeyrona (wyprowadzenie historyczne), przemiana termodynamiczna, przemiana odwracalna i nieodwracalna, obieg termodynamiczny, praca techniczna, praca techniczna silnika, praca techniczna sprężarki, praca techniczna przy stałej objętości, klasyfikacja przemian termodynamicznych, przemiany charakterystyczne gazów doskonałych.



UNIVERSITY OF WARMIA AND MAZURY IN OLSZTYN  
The Faculty of Technical Sciences  
POLAND, 10-957 Olsztyn, M. Oczapowskiego 11  
tel.: (48)(89) 5-23-32-40, fax: (48)(89) 5-23-32-55  
URL: <http://www.uwm.edu.pl/edu/sobieski/> (in Polish)



---

**Dziękuję za uwagę**

**Wojciech Sobieski**

---

Olsztyn, 2013-2022